Universidad Tecnológica de Pereira

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DE PREGRADO:

AMALGAMA DE FILTROS PRIMOS DE CEROS DE FUNCIONES DE MCNAUGHTON.

Tesis presentada por Andrés F. Naranjo P. para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física de la Univesidad Tecnológica de Pereira

Dirigido por:
Yuri A. Poveda

PEREIRA, Noviembre 2017

Agradecimientos

Agradezco a las personas que hicieron este trabajo posible, familia, amigos y docentes que acompañaron el proceso investigativo, así como también al grupo de investigación GIGA y a todos sus integrantes por sus ideas y apoyo en todo momento.

Índice general

Introducción

En el artículo *Geometry of Robinson consistency in Lukasiewicz logic,* Manuela Busaniche y Daniele Mundici, probaron la consistencia del cálculo proposicional infinito valuado para la lógica de Lukasiewicz, a partir de herramientas elementales de la teoría de ideales primos de MV-álgebras y la geometría de $\mathbb{R}^n$. El teorema central de esta demostración es el teorema 5.1 del artículo en mención: suponga que Θ es una L_X teoría prima, y que Ψ es una L_Y teoría prima, si $\Theta \cap L_{X\cap Y} = \Psi \cap L_{X\cap Y}$, entonces existe una $L_{X\cup Y}$ teoría prima Φ, tal que $\Theta = \Phi \cap L_X$ y $\Psi = \Phi \cap L_Y$.

El teorema 5.2 del mismo artículo traduce el teorema 5.1 en términos del lenguaje de los ideales primos de las MV-álgebras libres: dados X y Y conjuntos finitos de variables, I y J ideales primos de $Free_X$ y $Free_Y$ respectivamente. Si $I \cap Free_{X\cap Y} = J \cap Free_{X\cap Y}$, entonces existe un ideal primo H en $Free_{X\cup Y}$ tal que $H \cap Free_X = I$ y $H \cap Free_Y = J$.

El teorema central del presente trabajo, establece condiciones necesarias para que dados dos filtros primos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en el retículo de los ceros de funciones $L(Free_n)$ y $L(Free_m)$ respectivamente, exista un filtro primo $\mathcal{H}$ de $L(Free_{n+m-r})$ cuyas proyecciones a $L(Free_n)$ y a $L(Free_m)$ son $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente. Dicho teorema es el equivalente al teorema 5.1 en lenguaje de filtros.

El capítulo uno contiene tres secciones: espacios topológicos, filtros en conjuntos y simplex. En el capítulo dos se desarrollan los conceptos, definiciones y propiedades más relevantes de las MV-álgebras, profundizando en las MV-álgebras libres. El capítulo tres muestra cómo se comportan los filtros en relación con los ideales de las MV-álgebras. El capítulo cuatro introduce el concepto de tupla, proyecciones y co-proyecciones; además en el mismo capítulo se muestra como actuan estas nuevas herramientas sobre todos los conceptos trabajados hasta entonces. Finalmente en el capítulo cinco se establecen condiciones necesarias para la existencia del filtro primo $\mathcal{H}$ que amalgama los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dados y que son dualmente equivalentes a los ideales de que habla el teorema 5.1. Los resultados originales del autor se encuentran sin referencia en el transcurso del texto y los restantes se encuentran en la literatura del tema y están debidamente referenciados.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se estudiarán conceptos básicos de topología general y álgebra lineal que serán fundamentales para el presente trabajo.

1.1. Espacios topológicos

Definición 1.1 (ver [7])**.** Una topología τ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) La intersección finita de elementos de τ está en τ.

(iii) La unión arbitraria de elementos de τ está en τ.

Se dice que (X, τ) es un espacio topológico cuyos abiertos son los elementos de τ. Cuando no hay ambiguedad simplemente se dice que X es un espacio topológico.

Ejemplo 1. Dados $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}$. (X, τ) es un espacio topológico.

Definición 1.2 (Ver [7])**.** Dado un espacio topológico (X, τ) y $x \in X$ se dice que V_x es un entorno de x si y solo si existe $U \in \tau$ tal que

$$x \in U \subset V_x.$$

Definición 1.3 (Ver [7])**.** Dado X un conjunto, una base para una topológia sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X tales que:

(i) Para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(ii) si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_i \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Si $\mathcal{B}$ satisface las condiciones anteriores, se define la topológia τ generada por $\mathcal{B}$ como sigue:
$U \in \tau$ si y solo si, para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subset U.$$

Ejemplo 2. la familia $\mathcal{B} = \{B_x(r) : x \in \mathbb{R}^n\}$ es una base para la topológia usual de $\mathbb{R}^n$ donde $B_x(r)$ son las bolas abiertas con centro en x y radio r. Con la métrica euclidea.

Definición 1.4 (Ver [7])**.** Dado un espacio topológico (X, τ) y $A \subset X$. Definimos la topológia inducida por A como $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$. (A, τ_A) es un espacio topológico.

Definición 1.5 (Ver [7])**.** Dado (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es un espacio de Hausdorff si y solo si, para todo $a, b \in X$ con $a \neq b$, existen entornos $V_a, V_b \in \tau$ tales que $V_a \cap V_b = \emptyset$

Ejemplo 3. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es un espacio de Hausdorff. Considere $a, b \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $B_a(\frac{d(a,b)}{3}), B_b(\frac{d(a,b)}{3})$ son entornos de a y b respectivamente. Claramente $B_a(\frac{d(a,b)}{3}) \cap B_b(\frac{d(a,b)}{3}) = \emptyset$ si $a \neq b$.

1.2. Filtros en conjuntos

Los ideales y los filtros tienen una dualidad que es fundamental en el presente trabajo. Se definirá filtro, convergencia de un filtro, filtros maximales, entre otros. Las definiciones que se darán son de la literatura en general y pueden consultarse en [8].

Definición 1.6 (Ver [8])**.** Dados X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro propio sobre X si:

(1) $X \in \mathcal{F}, \emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) La intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$.

(3) $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ implica $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 4. Dado X un conjunto infinito. $\mathcal{F}_{cof} = \{F \subseteq X : F^c \text{ es finito}\}$ es un filtro sobre X, conocido como filtro de complementarios finitos.

Definición 1.7 (Ver [8])**.** Dado un filtro propio $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X decimos que $\mathcal{F}$ es un filtro primo si y solo si:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X \text{ con } A_i \subset X \text{ para todo } i, \text{ implica } A_i \in \mathcal{F} \text{ para algún } i.$$

Definición 1.8 (Ver [8])**.** Dados X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{B}$ es base de filtro sobre X si:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implica que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

De la definición anterior se deduce la siguiente proposición.

Proposición 1.1 (Ver [8])**.** *Dado un conjunto no vacío X y $\mathcal{B}$ una base de filtro sobre X.*

$$F(\mathcal{B}) = \{A \subseteq X : B \subseteq A \textit{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

es el filtro generado de $\mathcal{B}$ sobre X.

Demostración.

(i) como $\emptyset \notin \mathcal{B}$ entonces $\emptyset \notin F(\mathcal{B})$, en consecuencia $X \in F(\mathcal{B})$ pues $B \subseteq X$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(ii) Dados $A_1, A_2 \in F(\mathcal{B})$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subseteq A_1$ y $B_2 \subseteq A_2$, al ser $\mathcal{B}$ una base de filtro, existe $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ con $B_3 \in \mathcal{B}$, así $B_3 \subseteq A_1 \cap A_2 \in F(\mathcal{B})$.

(iii) la tercera propiedad de filtro, se sigue directamente de la definición de $F(\mathcal{B})$.

(iv) El filtro $F(\mathcal{B})$ es el filtro generado por la base $\mathcal{B}$, es decir, es el filtro más pequeño que contiene a $\mathcal{B}$. En efecto, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ siendo $\mathcal{G}$ un filtro, se tiene que para todo $A \in F(\mathcal{B})$, $B \subseteq A$ para algún $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ y se concluye $A \in \mathcal{G}$.

□

Definición 1.9 (Ver [8])**.** [Convergencia de un filtro]
Dado X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, se dice que $\mathcal{F}$ converge a $p \in X$ si y solo si:

$$\text{Para todo entorno } V_p \text{ de } p, \text{ existe } A \in \mathcal{F} \text{ tal que } p \in A \subset V_p$$

y se denota por $\mathcal{F} \to p$.

1.3. Simplex

A continuación se van a describir y definir conceptos básicos de los simplices en $\mathbb{R}^n$ y algunas de sus propiedades. Dichas propiedades se pueden consultar en [6].

Proposición 1.2 (Ver [6])**.** *Dado $A \subseteq [0,1]^n$. A es convexo si y solo si $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \in A$ para todo $a_1, \cdots, a_k \in A$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ y $\alpha_i \geq 0$.*

Demostración. Ver [6] página 14.

□

En virtud de la proposición anterior se da la siguiente definición de cápsula convexa o simplemente el convexo de un conjunto.

Definición 1.10 (Ver [6])**.** Dado P un conjunto de k puntos en $[0,1]^n$. $Conv(P) = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i : p_i \in P, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$.

De aquí en adelante se trabajará con este tipo de convexos.

Proposición 1.3 (Ver [6])**.** *$Conv(P)$ es el menor convexo que contiene a P.*

Demostración. Prueba directa de la proposición 20.

□

Cabe resaltar que $Conv(P) \subset [0,1]^n$, puesto que $[0,1]^n$ es convexo.

Proposición 1.4. *Dado un convexo $T = Conv(P)$ en $[0,1]^n$ y $\mathcal{T}_v : [0,1]^n \to [0,1]^n$ una traslación.*

$$\mathcal{T}_v(Conv(P)) = Conv(\mathcal{T}_v(P)).$$

Demostración.

$$\mathcal{T}_v(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i + v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (p_i + v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{T}_v(p_i)$$

con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ y $p_i \in P$.

□

Definición 1.11 (Ver [6])**.** Un conjunto P de k puntos en $[0,1]^n$ es geometricamente independiente si y solo si $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i = 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ con $p_i \in P$ y $\alpha_i \geq 0$ implica $\alpha_i = 0$.

De ahora en adelante se omite el término geometricamente por simplificación de la escritura. El concepto de vectores linealmente independientes es equivalente al concepto de puntos geometricamente independientes.

Ejemplo 5. Tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ que son colineales, no son geometricamente independientes. Dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^2$ son geometricamente independientes.

Definición 1.12 (Ver [6]). $Conv(P)$ es un $k-$simplex en $[0,1]^n$ si y solo si P es un conjunto de $k+1$ puntos independientes en $[0,1]^n$.

*Observación $Dim(Conv(P)) = k$

Proposición 1.5. *Dado P conjunto de $k+1$ puntos independientes en $[0,1]^n$. Para todo $p \in Conv(P)$, $p = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i p_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i p_i$ con $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1$ implica $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i, 1 \leq i \leq k+1$.*

Demostración. Se sigue directamente de la independencia de P.

□

La proposición anterior garantiza que cualquier punto p en un $K-$simplex S generado por un conjunto de puntos independiente P, tiene escritura única respecto a P.
La siguiente definición, es una generalización de una división baricéntrica de un convexo que puede consultarse en [3].

Definición 1.13. Dado S convexo. Una colección de $\{Conv(P_i) = S_i\}$ con $1 \leq i \leq l$ es una $k-$división por simplex de S si:

(i) P_i es un conjunto de $k+1$ puntos independientes en $[0,1]^n$ para cada $1 \leq i \leq l$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^{l} S_i = S$ con $1 \leq i \leq l$.

(iii) $S_i \cap S_j = Conv(P_i \cap P_j)$ para todo $1 \leq i, j \leq l$.

Ejemplo 6. Considere el segmento $\overline{AB}$ y el punto medio C del segmento.
$Conv(\{A, C\}), Conv(\{C, B\})$ es una $1-$división por simplex de $\overline{AB}$.

Definición 1.14. Dados dos convexos $B \subseteq A$ con $\{B_i = Conv(Q_i)\}$ una $k-$división por simplex de B con $1 \leq i \leq r$ y $\{A_j = Conv(P_j)\}$ una $w-$división por simplex de A con $1 \leq j \leq s$, $w \geq k$. Se dice que la colección $\{A_i\}$ respeta la colección $\{B_i\}$ si y solo si para todo $1 \leq i \leq r$ existe $1 \leq j \leq s$ tal que $Q_i \subseteq P_j$.

Observación: De la definición anterior se tiene que $\bigcup_{i=1}^{r} Q_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} P_j$.

Proposición 1.6 (Ver [1]). *Dados dos convexos $B \subset A$ donde $\{B_i = Conv(Q_i)\}$ es una $k-$división por simplex de B con $1 \leq i \leq b$. Existe $\{A_j = Conv(P_j)\}$ una $w-$división por simplex de A con $1 \leq j \leq a$, $w \geq k$ tal que $\{A_i\}$ respeta a $\{B_i\}$.*

Demostración. Se hará un bosquejo de la demostración. Considere un convexo A generado por un número finito en $\mathbb{R}^2$ que contiene otro convexo B generado por un número finito de puntos. Si $\{B_i = Conv(Q_i)\}$ una k división de B entonces tome la unión de Q_i y de aquellos puntos que generan a A pero que son independientes con Q_i y están en el semiplano que no corta a B, a dichos puntos llamelos P_j. como $B \subseteq A$ entonces la independencia pedida tiene sentido y existe, luego la w división pedida será $\{A_i = Conv(P_j)\}$.

□

Proposición 1.7. *Dado T convexo en $[0,1]^n$. Toda traslación $\mathcal{T}_v : [0,1]^n \to [0,1]^n$ respeta $k-$divisiones por simplex de T.*

Demostración. Considere a $\{Conv(P_i) = T_i\}$ una $k-$división por simplex de T. Probemos que $\{\mathcal{T}_v(T_i) = T_i'\}$ es una $k-$división por simplex de $\mathcal{T}_v(T)$. Tenga en cuenta que $T_v(Conv(P_i)) = Conv(T_v(P_i))$.
(i) Supongamos $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathcal{T}_v(p_i) = 0$ y $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 0$.

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \mathcal{T}_v(p_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (p_i + v) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i p_i + v \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i p_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0 \text{ Para todo i.}$$

(ii)

$$\bigcup_{i=1}^{l} \big(\mathcal{T}(T_i)\big) = \mathcal{T}\big(\bigcup_{i=1}^{l} T_i\big) = \mathcal{T}(T). \text{ con } 1 \leq i \leq l.$$

(iii) Queremos probar que $T_i' \cap T_j' = Conv(P_i' \cap P_j')$. donde $\mathcal{T}_v(P_i) = P_i'$. Como $\mathcal{T}_v$ es inyectiva se tiene

$$\begin{aligned} T_i' \cap T_j' = \mathcal{T}_v(T_i) \cap \mathcal{T}_v(T_j) = \mathcal{T}_v(T_i \cap T_j) = \mathcal{T}_v(Conv(P_i \cap P_j)) = Conv(\mathcal{T}_v(P_i \cap P_j)) \\ = Conv(\mathcal{T}_v(P_i) \cap \mathcal{T}_v(P_j)) \end{aligned}$$

□

Proposición 1.8. *Toda transformación lineal $\mathcal{T} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ inyectiva respeta $K-$ divisiones por simplex, i.e, si $\{T_i = conv(P_i)\}$ es una $k-$ división por simplex de $T = conv(P)$ entonces $\{T_i' = \mathcal{T}(T_i)\}$ es una $k-$ división por simplex de $T' = \mathcal{T}(T)$.*

Demostración.
(i) $\mathcal{T}(T_j) = \mathcal{T}(Conv(P_j) = Conv(\mathcal{T}(P_j))$. Para $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{ji} = 0$ y $\alpha_{ji} \geq 0$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{ji} \mathcal{T}(p_{ji}) = 0 = \mathcal{T}(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{ji} p_{ji}) \Longleftrightarrow (\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{ji} p_{ji}) = 0 \Longleftrightarrow P_{ji} = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{T}(P_{ji}) = 0$$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{T}(T_i) = \mathcal{T}(\bigcup_{i=1}^{l} T_i) = \mathcal{T}(T) = T'$.
(iii)

$$\begin{aligned} T_i' \cap T_j' = \mathcal{T}(T_i) \cap \mathcal{T}(T_j) = \mathcal{T}(T_i \cap T_j) = \mathcal{T}(Conv(P_i \cap P_j)) = conv(\mathcal{T}(P_i \cap P_j)) \\ = Conv(\mathcal{T}(P_i) \cap \mathcal{T}(P_j)) \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

MV-álgebras

En el presente capítulo, se dará la definición de MV-álgebra, ideal, ideal primo. Se estudiarán algunas de sus propiedades más relevantes. Las demostraciones presentadas no son en general las usuales (ver [3]).

Definición 2.1 (Ver [3])**.** Una MV-álgebra es una cuádrupla $\langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $0 \in A$, $\oplus$ es una operación binaria y $\neg$ es una operación unaria que cumple los siguientes axiomas:

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \oplus y = y \oplus x$
3. $x \oplus 0 = x$
4. $\neg\neg x = x$
5. $x \oplus \neg 0 = \neg 0$
6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Ejemplo 7. El intervalo real $[0,1]^n$ con las operaciones $x \oplus y = min(1, x+y)$,$\neg x = 1 - x$. Es una MV-álgebra.

Definición 2.2 (Ver [3])**.** [Función de McNaughton]
Dada una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ diremos que es de McNaughton en $n-$variables si y solo si:

(i) f es continua respecto a la topología natural de $[0,1]^n$.

(ii) Existen polinomios lineales $P_1, P_2, ..., P_m$ con coeficientes enteros tales que, para cada $x \in [0,1]^n$ existe i tal que $f(x) = P_i(x)$ con $1 \leq i \leq m$.

Ejemplo 8. La MV-álgebra M_n es el cojunto de todas las funciones f de McNaughton en $n-$variables con las operaciones:

(i) $f(x) \oplus g(x) = min(1, f(x) + g(x))$

(ii) $\neg f(x) = 1 - f(x)$.

Observación: El elemento 0 de $Free_n$ es la función de McNaughton $f(x) \equiv 0$

Definición 2.3 (Ver [3])**.**
$1 = \neg 0$
$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$
$x \ominus y = \neg(\neg x \oplus y) = x \odot \neg y.$

El axioma seis es equivalente a $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$.

Proposición 2.1. *La MV-álgebra M_n es la MV-álgebra libre en la categoría de las MV-álgebras. Es decir, $M_n = Free_n$.*

Ejemplo 9. En la MV-álgebra $Free_n$ se tiene que:

(i) $f(x) \ominus g(x) = max(0, f(x) - g(x))$

(ii) $f(x) \odot g(x) = max(0, f(x) + g(x) - 1)$

Las MV-álgebras tienen estructura de retículo. Sin embargo, primero es necesario definir un orden.

Lema 2.2. *[Ver [3]]*
Dada una MV-álgebra A. Para todo $x, y \in A$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\neg x \oplus y = 1$*;*

(ii) $x \odot \neg y = 0$*;*

(iii) $y = x \oplus (y \ominus x)$*;*

(iv) *Existe $z \in A$ tal que $x \oplus z = y$.*

Demostración. La prueba se encuentra en [2]. □

Definición 2.4 (Ver [3])**.** Dada una MV-álgebra A se tiene que $x \leq y$ si y solo si x e y cumplen alguna de las condiciones del lema 2.2. la relación $\leq$ definida anteriormente, es una relación de orden. Ver [3].

Proposición 2.3. *Toda MV-álgebra A tiene estructura de retículo donde:*
$x \vee y = (x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x.$
$x \wedge y = x \ominus (x \ominus y) = y \ominus (y \ominus x).$

Demostración. ver [3] página 10. □

Proposición 2.4 (Ver [3])**.** *Toda MV-álgebra satisface la ecuación:* $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$.

2.1. Ideales

Definición 2.5 (Ver [3])**.** Dada una MV-álgebra A, un ideal I de A es un subconjunto no vacío de A tal que para todo $x, y \in A$:

(i) $0 \in I$.

(ii) $x, y \in I$ implica $x \oplus y \in I$.

(iii) $y \in I$ y $x \leq y$ implica $x \in I$.

Proposición 2.5 (Ver [3])**.** *Dado I un ideal de una MV-álgebra A, con $x, z \in A$ se tiene que:*

$$x \ominus z \in I \ y \ z \in I \ si \ y \ solo \ si \ z \ominus x \in I \ y \ x \in I$$

.

Demostración. Sin perder generalidad solo se muestra la primer implicación.
Dado que $x \ominus z \in I$ y $z \in I$ se tiene $(x \ominus z) \oplus z \in I$, como $(x \ominus z) \oplus z = (z \ominus x) \oplus x$ así, $z \ominus x \in I$ y $x \in I$.

□

Proposición 2.6 (Ver [3])**.** *Dado I ideal de una MV-álgebra A. $x, y \in I$ implica $(x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \in I$.*

Demostración. $1 \oplus y = 1 \iff \neg x \oplus y \oplus x = 1 \iff \neg\{\neg(\neg x \oplus y)\} \oplus x = 1 \iff \neg(x \ominus y) \oplus x = 1 \iff x \geq x \ominus y \in I$, analogamente, $y \geq y \ominus x \in I$.

□

Ejemplo 10. El conjunto $I_{[a,b]} = \{f \in Free_1 : f(p) = 0, \forall p \in [a, b] \subseteq [0, 1]\}$ es ideal de $Free_1$.

Definición 2.6 (Ver [3])**.** Dada una MV-álgebra A, J es ideal primo de A si y solo si:

(i) J es ideal de A

(ii) Para todo $a, b \in A$, $a \ominus b \in J$ o $b \ominus a \in J$.

Ejemplo 11. Definamos el conjunto I_{x^+} como sigue: $f \in I_{x^+}$ si y solo si:

(i) f es una función de McNaughton de $1-$variable.

(ii) Existe $\epsilon > 0$, tal que $f(p) = 0$ para todo $p \in [x, x + \epsilon]$.
I_{x^+} es ideal primo de $Free_1$.

Proposición 2.7 (Ver [3])**.** *Un ideal P de una MV-álgebra A es primo si y solo si, $x \wedge y \in P$ implica $x \in P$ o $y \in P$ para todo $x, y \in A$.*

Demostración. Para todo $x, y \in A$, $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0 \in P$ luego $x \ominus y \in P$ ó $y \ominus x \in P$. Por otro lado, si P es ideal primo de A, $x \wedge y \in P$, y, $x \ominus y \in P$. $x \wedge y = x \ominus (x \ominus y) \in P$ implica $x \in P$. Análogamente $y \ominus x \in P$ y $x \wedge y = y \ominus (y \ominus x) \in P$ implica $y \in P$.

□

Lema 2.8 (Ver [3]). *Dado H un subconjunto de una MV-álgebra A,* $\langle H \rangle = \{x \in A : x \leq h_1 \oplus h_2 \oplus ... \oplus h_m,$ *donde* $h_1, h_2, ..., h_m \in H\}$ *es el ideal generado por H en A.*

Demostración. ver [3] página 13.

□

Si $H = \{h\}$ entonces $\langle H \rangle$ es un ideal principal.

Definición 2.7 (Ver [3]). Un ideal M de una MV-álgebra A es maximal si no existe un ideal J tal que $M \subset J \subset A$.

Lema 2.9 (Ver [3]). *Dado un ideal M de una MV-álgebra A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) M es ideal maximal de A.

(ii) $x \in A - M$ si y solo si $\neg nx \in M$ para algún entero $n \geq 1$.

Demostración. ver [3] página 14.

□

Proposición 2.10 (Ver [3]). *Dado un ideal I de una MV-álgebra A que no es maximal, existe un ideal maximal M que lo contiene.*

Demostración. Ver [3]. □

Dado un Ideal I de una MV-álgebra A se construye la MV-álgebra A/I cociente de A por el ideal I. La construcción de A/I se hace a partir de una relación de congruencia.

Proposición 2.11 (Ver [3]). *Dada una MV-álgebra A, la función $d : AXA \to A$ definida por $d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x)$ es una distancia.*

Demostración. Ver [3].

□

Proposición 2.12 (Ver [3]). *Dada una MV-álgebra A y un ideal I la relación $x \equiv_I y$ si y solo si $d(x, y) \in I$ es una congruencia.*

Dado que $\equiv_I$ es una congruencia, dicha relación genera una partición de la MV-álgebra A con respecto al ideal I, la cual resulta ser la MV-álgebra cociente A/I. Claramente si $x \in A$ entonces $[x] = \{y \in A : d(x, y) \in I\} \in A/I$. Las operaciones $\oplus$ y $\neg$ están definidas naturalmente, es decir, $[x] \oplus [y] = [x \oplus y]$ y $\neg[x] = [\neg x]$.

Ejemplo 12. Consideremos la MV-ágebra $Free_1$ y el ideal $I_0 = \{f \in Free_1 : f(0) = 0\}$. Tenemos entonces que $Free_1/I_0$ es una MV-álgebra que consta de dos elementos $\{0, 1\}$

Proposición 2.13 (Ver [3]). *Dado P un ideal de una MV-álgebra A, P es ideal primo de A si y solo si A/P es una MV-álgebra totalmente ordenada.*

Demostración. A/P cadena $\Longleftrightarrow [x] \leq [y]$ ó $[y] \leq [x]$ para todo x e y en $A \Longleftrightarrow [x \ominus y] = [0]$ ó $[y \ominus x] = [0] \Longleftrightarrow [x \ominus y] = P$ ó $[y \ominus x] = P \Longleftrightarrow x \ominus y \in P$ ó $y \ominus x \in P \Longleftrightarrow$ P es primo.

□

Proposición 2.14 (Ver [3]). *Todo ideal maximal M de una MV-álgebra A es un ideal primo.*

Ejemplo 13. $I_a = \{f \in Free_1 : f(a) = 0\}$ es un ideal maximal y consecuentemente primo.

2.2. Ceros de funciones de McNaugthon

Definición 2.8 (Ver [3]). Dada $f \in Free_n$, se define el conjunto de los ceros de f como:

$$Z(f) = \{x \in [0,1]^n : f(x) = 0\}.$$

Ejemplo 14. la función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ definida por $f(x) = x \oplus x$ es una función de $McNaughton$ y $Z(f) = \{0\}$.

Proposición 2.15 (Ver [3]). *Dadas $f, g \in Free_n$. $g \in < f >$ si y solamente si $Z(f) \subseteq Z(g)$.*

Demostración. Ver [3]. □

Teorema 2.16 (Ver [3]). *Dadas $f, g \in Free_n$,$Z(f) \cap Z(g) = Z(f \oplus g)$.*

Demostración. Dado $p \in Z(f) \cap Z(g)$ se tiene que $f(p) = g(p) = 0$ luego $(f \oplus g)(p) = f(p) \oplus g(p) = 0$ y se concluye que $p \in Z(f \oplus g)$. De otra parte, $p \in Z(f \oplus g)$ implica $f(p) \oplus g(p) = (f \oplus g)(p) = 0$ así $f(p) = g(p) = 0$ con lo cual $p \in Z(f) \cap Z(g)$.

□

Corolario 2.1. *Dadas $f_1, f_2, ..., f_m \in Free_n$.*

$$\bigcap_{i=1}^{m} Z(f_i) = Z(\bigoplus_{i=1}^{m} f_i)$$

Demostración. Para la prueba solo se debe hacer inducción sobre m. □

Teorema 2.17 (ver [3]). *Dadas $f, g \in Free_n$,$Z(f \wedge g) = Z(f) \cup Z(g)$.*

Demostración. $p \in Z(f \wedge g) \iff (f \wedge g)(p) = 0 \iff f(p) = 0$ o $g(p) = 0 \iff p \in Z(f) \cup Z(g)$.

□

Corolario 2.2. *Dadas $f_1, f_2, ..., f_m \in Free_n$.*

$$Z(\wedge_{i=1}^{m} f_i) = \bigcup_{i=1}^{m} Z(f_i)$$

Demostración. Para la prueba se realiza inducción sobre m.

□

Proposición 2.18. *El conjunto $I_S = \{f \in Free_n : f(x) = 0, \forall x \in S \subset [0,1]^n\}$ es ideal de $free_n$.*

Demostración.

(i) Claramente la función $f \equiv 0$ está en I_S.

(ii) Dadas dos funciones $f, g \in I_S$ se tiene que $S \subset Z(f)$ y $S \subset Z(g)$ luego $S \subset Z(f) \cap Z(g) = Z(f \oplus g)$ por lo tanto $f \oplus g \in I_S$.

(iii) Dada $f \leq g$ y $g \in I_S$ se tiene que $Z(g) \subset Z(f)$ y $S \subset Z(g)$ así $S \subset Z(f)$ por lo cual $f \in I_S$.

□

2.3. MV-álgebra fuertemente semisimples

Definición 2.9 (Ver [4])**.** Dada una MV-álgebra A. Un elemento $a \in A$ es infinitesimal si $a \neq 0$ y $\forall n \in \mathbb{N}\ na < \neg a$.

Proposición 2.19 (Ver [4])**.** *Dado un ideal maximal M de una MV-álgebra A, A/M no tiene infinitesimales.*

Demostración. Como M es maximal, $\forall a \notin M, \exists n > 0$ tal que $\neg na \in M$, así $[\neg na] = [0]$ con lo cual $[na] = [1]$. De otra parte, supongamos que A/M tiene por los menos un elemento $[a]$ que es infinitesimal, así $a \notin M$, y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\neg(na) \in M$, con lo cual, $[na] = 1$.

□

Definición 2.10 (MV-álgera simple)**.** [Ver [4]] Una MV-álgebra A es simple si y solo si, su único ideal propio es $\{0\}$.

Ejemplo 15. La MV-álgebra $[0, 1]$ es simple.

Proposición 2.20 (Ver [4])**.** *Dado M un ideal de una MV-álgebra A, A/M es simple si y solo si M es maximal.*

Demostración. Si M es maximal, y J es un ideal de A/M, si $J \neq [0]$, existe $[a] \in J$ tal que $a \notin M$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[na] = [1] \in J$.
Si A/M es simple, como los ideales de A/M están en correspondencia uno a uno con los ideales de A que contienen a M, entonces M es maximal.

□

Proposición 2.21 (Ver [4])**.** *Una MV-álgebra A es simple si y solo si para todo x diferente de cero en A, existe n en los naturales tal que $nx = 1$.*

Demostración. Ver [3]. □

Una MV-álgebra simple no tiene infinitesimales.

Definición 2.11 (Ver [4])**.** Un elemento a de una MV-álgebra A se dice arquimediano si existe $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tal que $na = (n + 1)a$.

Teorema 2.22 (Ver [4])**.** *Dada una MV-álgebra A, $x \in A$ es arquimediano si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\neg x \vee nx = 1$.*

Demostración. Se sigue directamente de que, $\neg(x \oplus nx) \oplus nx = (\neg x \ominus nx) \oplus nx = \neg x \vee nx = 1$.

□

Corolario 2.3. *Si x es arquimediano, no es infinitesimal.*

Demostración. Se sigue directamente de que para todo $n \in \mathbb{N}$, $nx < \neg x$ si y solo si $nx \vee \neg x = \neg x$.

□

Definición 2.12 (Ver [3],[4]). Una MV-álgebra A es hiperarquimediana si todos sus elementos son arquimedianos.

Definición 2.13 (Ver [3],[4]). Dado $\mathcal{M} = \{M : M$ ideal maximal de $A\}$ se tiene que el radical de una MV-álgebra A es la intersección de todos sus ideales maximales.
$\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$

Proposición 2.23 (Ver [3],[4]). *Dada una MV-álgebra A,*

$$rad(A) = inf(A) \cup \{0\}$$

con $inf(A) = \{a \in A : a$ es infinitesimal$\}$.

Demostración. Ver [3] página 73. □

Definición 2.14 (Ver [3],[4]). Una MV-álgebra A es semisimple si A no tiene infinitesimales.

Teorema 2.24 (Ver [3],[4]). *Dada una MV-álgebra A.*

(i) A hiperarquimediana implica A semisimple.

(ii) A Simple implica A hiperarquimediana.

Demostración. (i) se sigue directamente del colorario 2.3 y proposición 2.23. (ii) se sigue directamente de la proposición 2.21. □

Definición 2.15 (Ver [3],[4]). Una MV-algebra A es fuertemente semisimple si para algún $a \in A$ la intersección de todos los ideales maximales que contienen a a es el ideal generado por a, es decir, $< a >= \bigcap_{a \in M} M$, siendo M ideal maximal de A.

Teorema 2.25 (Ver [3],[4]). *Una MV-algebra A es fuertemente semisimple si y solo si para cada ideal principal I de A se tiene que A/I es semisimple.*

Demostración. Ver [4] página 1024-1046. □

Teorema 2.26 (Ver [3],[4]). *Toda MV-álgebra A fuertemente semisimple es semisimple.*

Demostración. Supongamos que A no es semisimple, es decir que existe $x \in A$ tal que $x \in inf(A)$ luego $\forall n \in \mathbb{N}, nx < \neg x$ es decir $[nx]_{<x>} < [\neg x]_{<x>}$ y se tendría que $[x]_{<x>}$ es infinitesimal, lo cual es una contradicción, pues $A/ < x >$ es semisimple por ser A fuertemente semisimple. □

Teorema 2.27 (Ver [3],[4]). *Toda MV-álgebra A hiperarquimediana es fuertemente semisimple.*

Demostración. Dado un $a \in A$ veamos que $A/ < a >$ es semisimple.
si $x \in A$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx = nx \oplus x$, es decir, $n[x]_{<a>} = n[x]_{<a>} \oplus [x]_{<a>}$ luego $[x]_{<a>}$ es arquimediano, o mejor, todo elemento $[y] \in A/ < a >$ es arquimediano,por lo tanto $A/ < a >$ es hiperarquimediana y por teorema 2.24 (i) $A/ < a >$ es semisimple. De donde se concluye que A es fuertemente semisimple.

□

Proposición 2.28 (Ver [3],[4])**.** *La MV-álgebra $Free_n$ es semisimple.*

Demostración. Demostremos que dada $f \in Free_n$, f no es infinitesimal. Dada $f \in Free_n$ tal que $f \neq 0$ existe $p \in [0,1]^n$ tal que $f(p) \neq 0$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mf(p) = 1$, en consecuencia $1 = mf(p) > \neg f(p)$.

□

Proposición 2.29. *La MV-álgebra $Free_n$ es fuertemente semisimple.*

Demostración. Para mostrar que $Free_n$ es fuertemente semisimple, basta probar que $Free_n/ < f >$ no tiene infinitesimales para toda $f \in Free_n$, se tienen dos casos; f se anula en al menos un punto o f no se anula en ningún punto; analicemos cada caso.

(i) f se anula en al menos un punto.
Supongamos que $[g] \in Free_n/ < f >$ y $[ng] < [\neg g], \forall n \in \mathbb{N}$ así, $[ng \ominus \neg g] = [0]$ es decir $ng \ominus \neg g \in < f >$ así $Z(f) \subset Z(ng \ominus \neg g)$. Veamos que $Z(f) \subset Z(g)$, en efecto, dado $p \in Z(f)$ tal que $g(p) \neq 0$ implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mg(p) = 1$ así $mg(p) \ominus \neg g(p) = 1 \ominus \neg g(p) = g(p)$, lo cual es una contradicción pues $p \in Z(ng \ominus g) \forall n \in \mathbb{N}$ implica $[g] = [0]$.

(ii) f no se anula en ningún punto. Como f no se anula en ningún punto, entonces $< f >= Free_n$ luego $Free_n/ < f >= \{0\}$ y $\{0\}$ es semisimple.

□

Capítulo 3

Filtros e ideales en las MV-álgebras libres

Como se aclaró en el capítulo de preliminares, los ideales como estructura algebraica y los filtros tienen una relación que es dual. Algunas demostraciones que son más complejas en el espacio de los ideales pueden resultar más sencillas que en el espacio de los filtros y viceversa. A continuación se presenta la definición de filtro en un retículo.

Definición 3.1. $\mathcal{F}$ es un filtro propio de un retículo L con máximo 1 y mínimo 0 si y solo si, para todo $a, b \in L$,
(i) $\mathcal{F} \subset L$.
(ii) $0 \notin \mathcal{F}$
(iii) $a, b \in \mathcal{F}$ implica $a \wedge b \in \mathcal{F}$.
(iv) $a \leq b$ y $a \in \mathcal{F}$ implica $b \in \mathcal{F}$.

Definición 3.2. $\mathcal{F}$ es filtro primo de L si,
(i) $\mathcal{F}$ es filtro.
(ii) $1 = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$ implica $a_i \in \mathcal{F}$ para algún i.

Definición 3.3. Se define, $L(Free_n) = \{Z(f) \colon f \in Free_n\}$ el retículo de los ceros de funciones de McNaughton donde: $Z(f) = \{x \in [0,1]^n \colon f(x) = 0\}$, (i) $[0,1]^n = Z(0)$; $\emptyset = Z(1)$, (ii) $Z(f) \vee Z(g) = Z(f) \cup Z(g) = Z(f \wedge g)$, (iii) $Z(f) \wedge Z(g) = Z(f) \cap Z(g) = Z(f \oplus g)$.

Proposición 3.1. *Dado $\mathcal{F}$ un filtro en $L(Free_n)$, entonces $I(\mathcal{F}) = \{f \in Free_n : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ es un ideal de $Free_n$*

Demostración. *(i)* $Z(0) = [0,1]^n \in \mathcal{F}$ implica, $0 \in I(\mathcal{F})$. *(ii)* $f, g \in I(\mathcal{F})$ implica $Z(f), Z(g) \in \mathcal{F}$ así $Z(g \oplus f) = Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$ luego $g \oplus f \in I(\mathcal{F})$. *(iii)* si $g \leq f$ y $f \in I(\mathcal{F})$ se tiene que $Z(f) \subseteq Z(g)$ y $Z(f) \in \mathcal{F}$ luego $z(g) \in \mathcal{F}$, y así $g \in I(\mathcal{F})$.

$\square$

Proposición 3.2. *Dado I un ideal de $Free_n$ se tiene que $\mathcal{F}(I) = \{Z(f) : f \in I\}$ es filtro en $L(Free_n)$.*

Demostración. Se sigue directamente de la definición. □

Proposición 3.3. $I(\mathcal{F}(I)) = I$.

Demostración. $f \in I(\mathcal{F}(I))$ si y solo si $Z(f) \in \mathcal{F}(I)$ si y solo si $f \in I$. □

Proposición 3.4. $\mathcal{F}(I(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$

Demostración. $Z(f) \in \mathcal{F}(I(\mathcal{F}))$ si y solo si $f \in I(\mathcal{F})$ si y solo si $Z(f) \in \mathcal{F}$ □

Teorema 3.5. *Hay una correspondencia biyectiva entre ideales de $Free_n$ y filtros de $L(Free_n)$.*

Demostración. Se sigue directamente de las proposiciones 3.1,3.2,3.3,3.4. □

Teorema 3.6. *Si I es un ideal primo entonces $\mathcal{F}(I)$ es un filtro primo.*

Demostración. Antes se mostró que $\mathcal{F}(I)$ es filtro. Basta ver que es primo. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z(f_i) = [0,1]^n$ implica $Z(\bigwedge_{i=1}^{n} f_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z(f_i) \in \mathcal{F}(I)$ así $\bigwedge_{i=1}^{n} f_i \in I$. Como I es primo entonces $f_i \in I$ para algún i. Consecuentemente $Z(f_i) \in \mathcal{F}(I)$ para algún i. □

Teorema 3.7. *Si $\mathcal{F}$ es filtro primo de $L(Free_n)$, $I(\mathcal{F})$ es ideal primo de $Free_n$.*

Demostración. Antes se mostró que $I(\mathcal{F})$ es ideal. Basta ver que es primo. Para todo $f, g \in Free_n$, $(f \ominus g) \wedge (g \ominus f) = 0$ (ver [1]). Consecuentemente, $Z(f \ominus g \wedge g \ominus f) = Z(f \ominus g) \cup Z(g \ominus f) = [0,1]^n \in \mathcal{F}$ implica $Z(g \ominus f) \in \mathcal{F}$ o $Z(f \ominus g) \in \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ filtro primo, así, $f \ominus g \in I(\mathcal{F})$ o $g \ominus f \in I(\mathcal{F})$. □

Corolario 3.1. *$\mathcal{F}$ es filtro primo si y solo si $Z(f) \cup Z(g) \in \mathcal{F}$ implica $Z(f) \in \mathcal{F}$ o $Z(g) \in \mathcal{F}$*

Demostración. Dado $\mathcal{F}$ filtro primo, $Z(f \wedge g) = Z(f) \cup Z(g) \in \mathcal{F}$ si y solo si $f \wedge g \in I(\mathcal{F})$, como $I(\mathcal{F})$ es primo $f \in I(\mathcal{F})$ o $g \in I(\mathcal{F})$ consecuentemente $Z(f) \in \mathcal{F}$ o $Z(g) \in \mathcal{F}$.
La otra implicación es inmediata. □

Proposición 3.8. *Dado un filtro primo $\mathcal{F}$ de $L(Free_n)$, $\mathcal{F} \to p$ si $p \in \bigcap_{s \in \mathcal{F}} S$.*

Demostración. Dado p y un entorno V_p de p, existe un simplex S_p contenido en V_p tal que $p \in int(S_p)$. $[S_p^c \cup Front(S_p)] \cup S_p = [0,1]^n \in \mathcal{F}$; $\mathcal{F}$ primo implica $[S_p^c \cup Front(S_p)] \in \mathcal{F}$ o $S_p \in \mathcal{F}$. $p \notin [S_p^c \cup Front(S_p)] \notin \mathcal{F}$. Así, $S_p \in \mathcal{F}$. □

Proposición 3.9. *Dado un filtro primo y propio $\mathcal{F}$ en $L(Free_n)$. $\bigcap_{s\in\mathcal{F}} S = \{p\}$.*

Demostración. $\mathcal{F}$ propio implica que $\mathcal{F}$ está contenido en un filtro maximal $\mathcal{M}$, dicho filtro al ser maximal, genera un ideal maximal M, y las funiones de McNaughton en M se anulan en un punto p, por lo tanto $p \in Z(f) = S$ para todo $f \in M$ y se concluye $\bigcap_{s\in\mathcal{F}} S \neq \emptyset$. Supongamos que $p \neq q \in \bigcap_{s\in\mathcal{F}}$. Como p, q están en un espacio de Hausdorff, existen entornos V_q, V_p de q y p respectivamente, tales que $V_q \cap V_p = \emptyset$. Por la proposición 21, existen $S_q, S_p \in \mathcal{F}$ tales que $p \in S_p \subset V_q$ y $q \in S_q \subset V_q$, lo cual conlleva a una contradicción pues $S_p \cap S_q = \emptyset$ y $\mathcal{F}$ es propio. Así se concluye que $p = q$.

□

De las proposiciones anteriores, se deduce que un filtro primo $\mathcal{F}$ en $[0,1]^n$ converge a un único punto $p \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$.

Capítulo 4

Operaciones con tuplas

Se introduce la noción de tupla de manera natural, al igual que las proyecciones y co-proyecciones. La noción de tupla permite manipular conjuntos de variables que aunque son finitos no necesariamente poseen un orden predefinido.

Definición 4.1. Dado $\mathcal{X}$ un conjunto infinito y totalmente ordenado de variables. Definimos la categoría de tuplas finitas $\mathbb{T}$, cuyos objetos son subconjuntos finitos totalmente ordenados de $\mathcal{X}$, (con el orden heredado de $\mathcal{X}$), a los que llamaremos tuplas. Es decir, $X = (x_1, \cdots, x_n) \in Obj(\mathbb{T})$ si y solo si $x_i \in \mathcal{X}$ y $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, y $\varphi\colon X \to Y \in Hom_{\mathbb{T}}(X, Y)$ si y solo si,

$$x_i < x_k \Leftrightarrow \varphi(x_i) < \varphi(x_k)$$

Nótese que en las tuplas no hay repeticiones.

Definición 4.2 (Orden en tuplas)**.** Dadas dos tuplas $X, Y \in \mathbb{T}$ diremos que $Y \leq X \Leftrightarrow Y \subseteq X$. Notemos que la inclusión $i\colon Y \hookrightarrow X \in Hom_{\mathbb{T}}(Y, X)$.

Proposición 4.1. *La categoría $\mathbb{T}$ con el orden entre tuplas, definido antes, es un retículo.*

Demostración. $X \wedge Y = X \cap Y$, y $X \vee Y = XUY$.

□

Definición 4.3. Dado $X \in \mathbb{T}$ definimos la longitud de X como su cardinal. Es decir el número de variables que ocurren en X.

4.1. Tuplas, cubos y ceros

Definición 4.4. Dada $X \in \mathbb{T}$, $|X| = n$, para cada $x_i \in X$, definimos las proyecciones $x_i\colon [0,1]^n \to [0,1]$, tales que $x_i(p) = p_i$ para todo $p = (p_1, \cdots, p_n) \in [0,1]^n$ y para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 4.5. Dadas $Y \subseteq X$ dos tuplas en $\mathbb{T}$, tales que $|X| = n$ y $|Y| = m$, definimos

$$X_Y : [0,1]^n \to [0,1]^m$$

la proyección de X a Y como sigue: para cada $p = (p_1, \cdots, p_n) \in [0,1]^n$

$$X_Y(p) = (x_{i_1}(p), \cdots, x_{i_m}(p)) \text{ con } x_{i_j} \in Y \text{ con } x_i(p) = p_i$$

Definición 4.6. Dadas $Y \subseteq X$ dos tuplas definimos,

$$Y^X : [0,1]^m \to \mathcal{P}([0,1]^n)$$

la co-proyección de Y a X como sigue: para cada $q = (q_1, \cdots, q_m) \in [0,1]^m$

$$Y^X(q) = \{p \in [0,1]^n \colon X_Y(p) = q\}$$

Observación. Para todo $V \subseteq [0,1]^n$ y $T \subseteq [0,1]^s$

$$X_Y(V) = \{X_Y(p) : p \in V\} \qquad Y^X(T) = \bigcup_{q \in T} Y^X(q)$$

Ejemplo 16. $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (x_1, x_3)$ y $p = (2,3,4)$ Entonces

$$X_Y(p) = (2,4) = (x_1(p), x_3(p))$$

Proposición 4.2. *Dadas dos tuplas $Y \subseteq X$, tales que $|X| = n$ y $|Y| = m$,entonces,*

1. $V, T \subset [0,1]^n$ *implica* $X_Y(V \cap T) \subseteq X_Y(V) \cap X_Y(T)$.
2. $V, T \subset [0,1]^m$ *implica* $Y^X(V \cap T) = Y^X(V) \cap Y^X(T)$.
3. $V, T \subset [0,1]^n$ *implica* $X_Y(V \cup T) = X_Y(V) \cup X_Y(T)$.
4. $V, T \subset [0,1]^m$ *implica* $Y^X(V \cup T) = Y^X(V) \cup Y^X(T)$.
5. $T \subset [0,1]^n$ *implica* $T \subseteq Y^X(X_Y(T)))$.
6. $V \subset [0,1]^m$ *implica* $X_Y(Y^X(V)) = V$.
7. $X_Y([0,1]^n) = [0,1]^m$, *y* $Y^X([0,1]^m) = [0,1]^n$.
8. $V \subset T \subset [0,1]^m$ *implica* $Y^X(V) \subset Y^X(T)$.
9. $V \subset T \subset [0,1]^n$ *implica* $X_Y(V) \subset X_Y(T)$.

Demostración. (1) $q \in X_Y(V \cap T)$ implica $q = X_Y(p)$ con $p \in V \cap T$, así $q \in X_Y(V) \cap X_Y(T)$. De otro lado, (2) $p \in Y^X(V \cap T) \Leftrightarrow X_Y(p) \in V \cap T \Leftrightarrow p \in Y^X(V) \cap Y^X(T)$. (5) si $p \in T$ entonces $X_Y(p) \in X_Y(T)$ y en consecuencia $p \in Y^X(X_Y(T))$. Las afirmaciones (3), (4), (6), (7), (8) y (9) se siguen directamente de la definición.

□

Proposición 4.3 (Amalgama de un punto)**.** *Dadas X, Y dos tuplas tales que $|X| = n$ y $|Y| = m$, $r = |X \cap Y|$. $p \in [0,1]^n$, $q \in [0,1]^m$ y $X_{X\cap Y}(p) = Y_{X\cap Y}(q) \Rightarrow \exists! c \in [0,1]^{m+n-r}$ tal que $(X \cup Y)_X(c) = p$ y $(X \cup Y)_Y(c) = q$.*

Demostración. Basta ver que $\{c\} = X^{X\cup Y} \cap Y^{X \cup Y}$. $X \cup Y = (z_1, \cdots, z_{m+n-r})$ tal que $z_i = x_k \in X$ o $z_i = y_j \in Y$. Entonces $c \in [0,1]^{m+n-r}$ queda determinado biunívocamente por: $c_i = z_i(c) = x_k(p)$ si $z_i = x_k$, o $c_i = z_i(c) = y_j(q)$ si $z_i = y_j$. como hay compatibilidad en $X \cap Y$, no hay problemas si se dan los dos casos al tiempo. La unicidad se sigue de la construcción.

□

Notación: bajo las condiciones de la proposición anterior, se escribe $p * q = c$.

Proposición 4.4. *Dados* $V \subset [0,1]^n$ *y* $T \subset [0,1]^m$

1. $X_{X\cap Y}(V) \subset Y_{X\cap Y}(T)$ *implica* $(X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(V) \cap Y^{X\cup Y}(T)\right) = V$.

2. $Y_{X\cap Y}(T) \subset X_{X\cap Y}(V)$ *implica* $(X \cup Y)_Y \left(X^{X\cup Y}(V) \cap Y^{X\cup Y}(T)\right) = T$.

Demostración. (1) $(X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(V) \cap Y^{X\cup Y}(T)\right) \subseteq (X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(V)\right) = V$ (por prop 4.2.6). De otro lado, $p \in V$ implica $X_{X\cap Y}(p) = Y_{X\cap Y}(t)$ con $t \in T$ por hipótesis. Por (prop 4.3.) existe $c \in [0,1]^{n+m-r}$ tal que $(X \cup Y)_X(c) = p$ y $(X \cup Y)_Y(c) = t$. Así $c \in X^{X\cup Y}(V) \cap Y^{X\cup Y}(T)$ y $p = (X \cup Y)_X(c)$ implica $p \in (X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(V) \cap Y^{X\cup Y}(T)\right)$.
(2) se demuestra de manera análoga.

□

Definición 4.7. Dada $X \in \mathbb{T}$

$$f \in Free_X \Leftrightarrow Var(f) \subseteq X, \text{ y } f_X : [0,1]^n \to [0,1] \in Free_n$$

Con $Free_n$ la MV-álgebra de las funciones de McNaughton en n variables, $Var(f)$, el conjunto de variables que ocurren en f, y f_X la función de McNaughton que le corresponde al término f, tal que:

$$f_X(p) = f(x_1(p), \cdots, x_n(p)) \in [0,1]$$

Observación. $Y \subseteq X$ y $f \in Free_Y \Rightarrow f_X(p) = f_Y(X_Y(p))$.

Proposición 4.5 (Proyección de ceros)**.** $Y \subseteq X$ *y* $f \in Free_Y \Rightarrow Z(f_Y) = X_Y(Z(f_X))$

Demostración. $q \in X_Y(Z(f_X))$, si y solo si, $q = X_Y(p)$ con $p \in Z(f_X)$, si y solo si, $0 = f_X(p) = f_Y(X_Y(p)) = f_Y(q)$ con $q = X_Y(p)$, si y solo si, $q \in Z(f_Y)$ y $p \in Y^X(q)$.

□

Proposición 4.6. *Dados* $Y \subseteq X$, $f \in Free_Y$ *y* $T \subseteq [0,1]^n$,

$$Z(f_Y) = X_Y(T) \Rightarrow T \subset Z(f_X)$$

Demostración. $p \in T$ implica $X_Y(p) \in Z(f_Y)$. Así $0 = f(X_Y(p)) = f_X(p)$.

□

4.2. Tuplas, topológia y filtros

De ahora en adelante se trabajará con la métrica $d : \mathbb{R}^n \text{x} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ euclidea, definida por $d(x,y) = \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Proposición 4.7. *Dadas dos tuplas* $X, Y \in \mathbb{T}$ *con* $|X| = n, |Y| = m, |X \cap Y| = r$, $p, q \in [0,1]^{m+n-r}$.

$$d^2((X\cup Y)_X(p), (X\cup Y)_X(q)) < a, d^2((X\cup Y)_Y(p), (X\cup Y)_Y(q)) < b \textit{ implica } d^2(p,q) < a+b.$$

Demostración.

$$d^2(p,q) = \sum_{i=1}^{m+n-r}(p_i-q_i)^2 < \sum_{j=1}^{n}(x_{ij}(p)-x_{ij}(q))^2 + \sum_{l=1}^{n}(y_{kl}(p)-y_{kl}(q))^2 < a+b.$$

□

Proposición 4.8. *Dadas dos tuplas $Y \subset X \in \mathbb{T}$ con $|X| = n, |Y| = m$. Para todo $q \in [0,1]^n$,*

$$X_Y(B_q(r)) = B_{X_Y(q)}(r).$$

Demostración. para todo punto $p \in B_q(r)$ se tiene

$$d(p,q) < r \Longleftrightarrow (p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+...+(p_m-q_m)^2 \leq (p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+...+(p_n-q_n)^2 < r^2$$

así

$$d(X_Y(p), X_Y(q)) < d(p,q) < r.$$

se concluye $X_Y(p) \in B_{X_Y(q)}(r)$, en consecuencia $X_Y(B_q(r)) \subset B_{X_Y(q)}(r)$. Mostremos la otra contenencia. Para $p \in B_{X_Y(q)}(r)$ se tiene

$$d(p, X_Y(q)) = (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + ... + (p_m-q_m)^2 < r.$$

Tome $b = (p_1, p_2, ..., p_m, q_{m+1}, ..., q_n) \in [0,1]^n$. Claramente

$$d(b,q) = d(p,q) < r \text{ y } X_Y(b) = p \Longleftrightarrow b \in B_q(r), X_Y(b) = p \Longleftrightarrow p \in X_Y(B_q(r)).$$

□

Teorema 4.9. *Dadas $Y \subseteq X$ tuplas en $\mathbb{T}$, tales que $|X| = n$ y $|Y| = m$.*
$\mathcal{F}$ es un filtro primo en $L(Free_n) \Rightarrow \mathcal{F}_{X_Y} = \{X_Y(T) : T \in \mathcal{F}\}$es un filtro primo en $L(Free_m)$

Demostración. (i) $X_Y([0,1]^n) = [0,1]^m \in \mathcal{F}_{X_Y}$. (ii) $V \subseteq T \subset [0,1]^m$ y $V \in \mathcal{F}_{X_Y}$ implica $V = X_Y(H)$ para algún $H \in \mathcal{F}$. Como $H \subseteq Y^X(X_Y(H)) \subseteq Y^X(T)$, entoces, $Y^X(T) \in \mathcal{F}$. Así $X_Y(Y^X(T)) = T \in \mathcal{F}_{X_Y}$. (iii) $V, T \in \mathcal{F}_{X_Y}$ implica $V \cap T = X_Y(T_0) \cap X_Y(V_0) \supset X_Y(T_0 \cap T_0)$ con $V_0, T_0 \in \mathcal{F}$. Como $V_0 \cap T_0 \in \mathcal{F}$, entonces $X_Y(T_0 \cap T_0) \in \mathcal{F}_{X_Y}$ y $V \cap T \in \mathcal{F}_{X_Y}$. (iv) $V \cup T \in \mathcal{F}_{X_Y}$ implica $X_Y(R) = V \cup T$, con $R \in \mathcal{F}$. Así $R \subseteq Y^X(X_Y(R)) = Y^X(V \cup T) = Y^X(V) \cup Y^X(T) \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es primo, $Y^X(V) \in \mathcal{F}$, o $Y^X(T) \in \mathcal{F}$. Así $V = X_Y(Y^X(V)) \in \mathcal{F}_{X_Y}$ o $T = X_Y(Y^X(T)) \in \mathcal{F}_{X_Y}$.

□

Corolario 4.1. *$V \in \mathcal{F}_{X_Y} \Leftrightarrow Y^X(V) \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Se sigue directamente del teorema 4.9.(iv) y proposición (4.2.5).

□

Proposición 4.10. *Dadas dos tuplas $X, Y \in \mathbb{T}$ con $|X| = n, |Y| = m, |X \cap Y| = r$. $\mathcal{F} \to p, \mathcal{G} \to q$ filtros primos y propios en $L(Free_n), L(Free_m)$ respectivamente.*

$$R = X_{X\cap Y}(\mathcal{F}) = Y_{X\cap Y}(\mathcal{G}) \text{ implica } X_{X\cap Y}(p) = Y_{X\cap Y}(q).$$

Demostración. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ primos y propios, implica R primo y propio. $X_{X\cap Y}(p) \in S$ para todo $S \in X_{X\cap Y}(\mathcal{F}) = Y_{X\cap Y}(\mathcal{G})$, por otro lado, $Y_{X\cap Y}(q) \in S$ para todo
$S \in Y_{X\cap Y}(\mathcal{G}) = X_{X\cap Y}(\mathcal{F})$. Así se concluye $X_{X\cap Y}(p), Y_{X\cap Y}(q) \in \bigcap_{S\in X_{X\cap Y}(\mathcal{F})}(S)$ de las proposiciones 3.8 y 3.9 se tiene $X_{X\cap Y}(p) = Y_{X\cap Y}(q)$.

□

4.3. Tuplas, convexos e independencia

Proposición 4.11. *Dada la tupla X y $|X| = n$. Si $p, q \in [0,1]^n$ entonces*

$$x_i(\alpha p + q) = \alpha x_i(p) + x_i(q)$$

.

Demostración.

$$x_i(\alpha p + q) = x_i(\alpha p_1 + q_1, \alpha p_2 + q_2, ..., \alpha p_n + q_n) = \alpha p_i + q_i = \alpha x_i(p) + x_i(q)$$

.

□

Proposición 4.12. *Dadas dos tuplas $Y \subset X$ con $|X| = n$ $|Y| = m$. P un conjunto de puntos en $[0,1]^n$ implica $X_Y(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_Y(p_i)$ con $p_i \in P$.*

Demostración. Claramente $\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i \in [0,1]^n$ entonces $X_Y(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i)$ tiene sentido.

$$X_Y(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i) = (x_{j1}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i), x_{j2}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i), ..., x_{jm}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i)) \text{ Con } Y = \{x_{j1}, ..., x_{jm}\}$$

por definición de proyección.

$$(x_{j1}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i), x_{j2}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i), ..., x_{jm}(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i)) = (\sum_{i=1}^k \alpha_i x_{j1}(p_i), ..., \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{jm}(p_i))$$

Finalmente

$$(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_{j1}(p_i), \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{j2}(p_i), ..., \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{jm}(p_i)) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_{j1}(p_i), x_{j2}(p_i), ..., x_{jm}(p_i))$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i X_Y(p_i)$$

y se demuestra lo que se quería.

□

Definición 4.8. Para $Y \subset X$ y $Q \in L(Free_n)$ se dice que Q es inyectivo respecto a Y si y solo si $X_Y(p) = X_Y(q)$ implica $p = q$ para todo $p, q \in Q$.

Teorema 4.13. *Dadas dos tuplas $Y \subset X$ con $|X| = n$ $|Y| = m$. P un conjunto de puntos en $[0,1]^m$, Q un conjunto de puntos en $[0,1]^n$ donde $|Q| = |P| = k$. $X_Y(Q) = P$ y P independiente implica Q independiente.*

Demostración. $|Q| = |P|$ y $X_Y(Q) = P$ implica $X_Y(q_i) = p_i$.
Supongamos que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i = 0$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ entonces

$$X_Y(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_Y(q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i = 0$$

Luego $\alpha_i = 0$ por ser P independiente.

□

Corolario 4.2. *$Conv(Q)$ es inyectivo respecto a Y.*

Demostración. Tome $a, b \in Conv(Q)$ tales que $X_Y(a) = X_Y(b)$. $a, b \in Conv(Q)$ implica $a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i q_i$ con escritura única debido a la proposición 1.5. así

$$X_Y(a) = X_Y(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_Y(q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i \in Conv(P)$$

.

$$X_Y(b) = X_Y(\sum_{i=1}^{k} \beta_i q_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_Y(q_i) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i p_i \in Conv(P)$$

.
La proposición 1.5 implica $\alpha_i = \beta_i$ luego $a = b$ y se demuestra lo que se quería.

□

Proposición 4.14. *Dadas dos tuplas $Y \subset X$ tales que $|X| = n, |Y| = m$, y Q un conjunto de k puntos en $[0, 1]^n$. $X_Y(Q) = P$ implica $X_Y(Conv(Q)) = Conv(P)$.*

Demostración. $y \in X_Y(Con(Q)) \Leftrightarrow y = X_Y(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_Y(q_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i \in Conv(P)$ Con $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

□

Teorema 4.15. *Dadas dos tuplas $Y \subset X \in \mathbb{T}$ con $|X| = n$ y dos convexos $S = Conv(P), T = Conv(Q)$ en $[0, 1]^n$ tales que $X_Y(S) = X_Y(T)$. Se tiene que*

$$Conv(X_Y(P) \cup X_Y(Q)) = Conv(X_Y(P)) \cup Conv(X_Y(Q)).\ y$$

$$dim(Conv(P \cup Q)) \geq max(dim(T), dim(S)).$$

Demostración. Observe que

$$Conv(X_Y(P)) \cup Conv(X_Y(Q)) \subset Conv(X_Y(P) \cup X_Y(Q))$$

$$\text{pues } Conv(X_Y(P)) \subset Conv(X_Y(P) \cup X_Y(Q))$$
$$\text{y } Conv(X_Y(Q)) \subset Conv(X_Y(P) \cup X_Y(Q)).$$

Por otro lado

$$Conv(X_Y(P)) \cup Conv(X_Y(Q)) = X_Y(S) \cup X_Y(T) = X_Y(S) = X_Y(T) \text{ es convexo.}$$

$$X_Y(P) \cup X_Y(Q) \subset Conv(X_Y(P)) \cup Conv(X_Y(Q))$$

implica

$$Conv(X_Y(P) \cup X_Y(Q)) \subset Conv(X_Y(P)) \cup Conv(X_Y(Q)).$$

$dim(Conv(P \cup Q)) \geq max(dim(Con(P)), dim(Conv(Q)))$.

$\square$

Capítulo 5

Amalgama de filtros

Teorema 5.1. *Dadas Y, X tuplas en $\mathbb{T}$, con $|X| = n$, $|Y| = m$, $|X \cap Y| = r$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dos filtros de $L(Free_n)$ y $L(Free_m)$ respectivamente, tales que, $\mathcal{F}_{X_{X\cap Y}} = \mathcal{G}_{Y_{X\cap Y}} = \mathcal{R}$, entonces,*

(i) *$X^{X\cup Y}(S) \cap Y^{X\cup Y}(T) \neq \emptyset$ para todo $S \in \mathcal{F}$ y $T \in \mathcal{G}$.*

(iia) *Para todo $S \in \mathcal{F}$ existe $S^{\perp} \in \mathcal{G}$ tal que $X_{X\cap Y}(S) = Y_{X\cap Y}(S^{\perp})$.*

(iib) *Para todo $T \in \mathcal{G}$ existe $T^{\perp} \in \mathcal{F}$ tal que $Y_{X\cap Y}(T) = X_{X\cap Y}(T^{\perp})$.*

(iii) *$\mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \{X^{X\cup Y}(S) \cap Y^{X\cup Y}(T)\}$ es base de filtro en $L(Free_{m+n-r})$.*

Demostración. (i) Dados $S \in \mathcal{F}, T \in \mathcal{G}$, $X_{X\cap Y}(S), Y_{X\cap Y}(T) \in \mathcal{R}$ así $\emptyset \neq X_{X\cap Y}(S) \cap Y_{X\cap Y}(T) \in \mathcal{R}$ por ser $\mathcal{R}$ filtro propio. Consecuentemente, existe $p \in X_{X\cap Y}(S) \cap Y_{X\cap Y}(T)$, así $p = X_{X\cap Y}(q) = Y_{X\cap Y}(t)$ con $q \in S, t \in T$ y por proposición 4.3, existe un único $c \in [0,1]^{m+n-r}$ tal que $(X \cup Y)_X(c) = q$ y $(X \cup Y)_Y(c) = t$ así $c \in X^{X\cup Y}(S) \cap Y^{X\cup Y}(T)$.

(iia) $S \in \mathcal{F}$ implica $X_{X\cap Y}(S) \in \mathcal{F}_{X_{X\cap Y}} = \mathcal{G}_{Y_{X\cap Y}}$, así existe $S^{\perp} \in \mathcal{G}$ tal que $X_{X\cap Y}(S) = Y_{X\cap Y}(S^{\perp})$. (iib) es análogo.

(iii) Por (i) se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ y $\mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ es una familia no vacía de ceros de elementos en $L(Free_{n+m-r})$.
De otro lado, $R_1, R_2 \in \mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ implica que existen $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ y $T_1, T_2 \in \mathcal{G}$ tales que: $X^{X\cup Y}(S_1) \cap Y^{X\cup Y}(T_1) = R_1$ y $X^{X\cup Y}(S_2) \cap Y^{X\cup Y}(T_2) = R_2$ entonces, existe $R_3 = X^{X\cup Y}(S_1 \cap S_2) \cap Y^{X\cup Y}(T_1 \cap T_2) \in \mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ tal que $R_3 \subset R_1 \cap R_2$, en efecto, por proposición (4.2)

$$X^{X\cup Y}(S_1 \cap S_2) \cap Y^{X\cup Y}(T_1 \cap T_2) \subseteq X^{X\cup Y}(S_1) \cap Y^{X\cup Y}(T_1) \cap X^{X\cup Y}(S_2) \cap Y^{X\cup Y}(T_2) = R_1 \cap R_2.$$

$\square$

Corolario 5.1. *Dados $S \in \mathcal{F}$ y $T \in \mathcal{G}$, con las condiciones del teorema anterior,*
$(X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(S)\right) \cap Y^{X\cup Y}(S^{\perp})) = S$ *y* $(X \cup Y)_Y \left(X^{X\cup Y}(T^{\perp})\right) \cap Y^{X\cup Y}(T)) = T$.

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 4.4.

□

Teorema 5.2 (Amalgama de filtros). *Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de $L(Free_n)$ y $L(Free_m)$ respectivamente, $X, Y \in \mathbb{T}$, con $|X| = n, |Y| = m, |X \cap Y| = r$. $\mathcal{F}_{X_{X\cap Y}} = \mathcal{G}_{Y_{X\cap Y}}$ implica que existe un filtro $\mathcal{C}$ en $L(Free_{m+n-r})$ talque $\mathcal{C}_{(X\cup Y)_X} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}_{(X\cup Y)_Y} = \mathcal{G}$.*

Demostración. Dado $F(\mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ el filtro generado como en la proposición 1.1 en $L(Free_{n+m-r})$. Basta ver que $\mathcal{C}_{(X\cup Y)_X} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}_{(X\cup Y)_Y} = \mathcal{G}$. Sólo se mostrará que $\mathcal{C}_{(X\cup Y)_X} = \mathcal{F}$. La otra igualdad es análoga. Del teorema 5.1. y el corolario 5.1. se sigue que para $S \in \mathcal{F}$ existe $S^\perp \in \mathcal{G}$ tal que

$$S = (X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(S)\right) \cap Y^{X\cup Y}(S^\perp)) \in \mathcal{C}_{(X\cup Y)_X}.$$

Así $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_{(X\cup Y)_X}$.
Veamos la otra contenencia. Dado $R \in \mathcal{C}_{(X\cup Y)_X}$ se tiene que $R = (X\cup Y)_X(H)$ con $H \in \mathcal{C}$. Así $X^{X\cup Y}(S) \cap Y^{X\cup Y}(T) \subseteq H$ para algún $S \in \mathcal{F}$ y, $T \in \mathcal{G}$. Por teorema 5.1. existe $T^\perp \in \mathcal{F}$ tal que $Y_{X\cap Y}(T) = X_{X\cap Y}(T^\perp)$. Consecuentemente, $X^{X\cup Y}(S \cap T^\perp) \cap Y^{X\cup Y}(T) \subseteq H$, y de la proposición (4.4.),

$$S \cap T^\perp = (X \cup Y)_X \left(X^{X\cup Y}(S \cap T^\perp) \cap Y^{X\cup Y}(T)\right) \subseteq (X \cup Y)_X(H) = R.$$

Así $S \cap T^\perp \in \mathcal{F}$ implica $R \in \mathcal{F}$.

□

5.1. Amalgama prima de filtros primos

Teorema 5.3. *Dado $\mathcal{C} = F(\mathcal{C}^{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ el filtro generado.*

$$\mathcal{F} \to p, \mathcal{G} \to q \Longrightarrow \mathcal{C} \to p * q.$$

Demostración. Dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existen $S \in \mathcal{F}, T \in \mathcal{G}$ tales que $S \subset B_p(\frac{\epsilon}{2}), T \subset B_q(\frac{\epsilon}{2})$. así $X^{X\cup Y}(S) \cap Y^{X\cup Y}(T) \subset X^{X\cup Y}(B_p(\frac{\epsilon}{2})) \cap Y^{X\cup Y}(B_q(\frac{\epsilon}{2})) \subset B_{p*q}(\epsilon)$, en efecto,

$$w \in X^{X\cup Y}(B_p(\frac{\epsilon}{2})) \cap Y^{X\cup Y}(B_q(\frac{\epsilon}{2})) \textit{ implica}$$

$$d(X \cup Y_X(w), X \cup Y_X(p)) < \frac{\epsilon}{2}, d(X \cup Y_Y(w), X \cup Y_Y(q)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

De la proposición 4.7 se concluye $d(w, p * q) < \epsilon$, consecuentemente $w \in B_{p*q}(\epsilon)$.

□

Teorema 5.4. *Dadas dos tuplas $X, Y \in \mathbb{T}$ tales que $|X| = n \geq |Y| = m, |X \cap Y| = r$. T convexo en $L(Free_m)$. Existe $T' \in L(Free_n)$ y $\mathcal{T} : [0,1]^m \to [0,1]^n$ transformación lineal tal que:*

(i) $\mathcal{T}(T) = T'$ convexo.

(ii) $Conv(P_i) = T_i$ k-división por simplex de T implica $\mathcal{T}(T_i) = T'_i$ es una k-división por simplex de T' tal que $X_{X\cap Y}(\mathcal{T}(T_i)) = Y_{X\cap Y}(T_i)$, con $\mathcal{T}(P_i) = P'_i$.

Demostración. Dado $\mathcal{T} : [0,1]^m \to []0,1^n$ una matriz definida por:

$$(t)_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \text{ Para todo } i \leq r \\ 0 & si \quad i \neq j \text{ Para todo } i \leq r \\ z_{ij} & si \qquad\qquad i > r \end{cases}$$

Donde las entradas z_{ij} son $n\text{x}m - r\text{x}m$ valores libres tales que la transformación $\mathcal{T}$ es una matriz rectangular invertible a izquierda. Esto siempre es posible dado que $n > m$ y las matrices invertibles son densas en el espacio de las matrices. en consecuencia, la transformación $\mathcal{T}$ es inyectiva. Como $\mathcal{T}$ es una transformación lineal inyectiva entonces $\mathcal{T}(T) = T'$ es convexo ya que T es convexo y $\mathcal{T}(T_i)$ es una división por simplex de T' (por proposición 1.8). Veamos que

$$X_{X\cap Y}(\mathcal{T}(T_i)) = Y_{X\cap Y}(T_i).$$

.

para todo $p_{j1} \in [0,1]^m$ se tiene que:

$$X_{X\cap Y}(\mathcal{T}(p_{j1})) = X_{X\cap Y}((\sum_{j=1}^{m} t_{1j}p_{j1}, ..., \sum_{j=1}^{m} t_{rj}p_{j1}, ..., \sum_{j=1}^{m} t_{nj}p_{j1})) = (\sum_{j=1}^{m} t_{1j}p_{j1}, .., \sum_{j=1}^{m} t_{rj}p_{j1})$$

Nótese que $\sum_{j=1}^{m} t_{ij}p_{j1} = p_{i1}$ para todo $i \leq r$. Luego

$$X_{X\cap Y}(\mathcal{T}(p_{j1})) = (\sum_{j=1}^{m} t_{1j}p_{j1}, .., \sum_{j=1}^{m} t_{rj}p_{j1}) = (p_{11}, p_{21}, ..., p_{r1}) = Y_{X\cap Y}(p_{j1})$$

.

Con esto se demuestra lo que se quería.

$\square$

Teorema 5.5. *Dados $X, Y \in \mathbb{T}$ con $|X| = n > |Y| = m, |X \cap Y| = r$; $\mathcal{F} \to p, \mathcal{G} \to q$ filtros primos y propios de $L(Free_n), L(Free_m)$ respectivamente. $X_{X\cap Y}(\mathcal{F}) = Y_{X\cap Y}(\mathcal{G})$ implica que existe $H \in L(Free_{n+m-r})$ tal que:*

(i) H es inyectivo respecto a X.

(ii) $(X \cup Y)_X(H) \in \mathcal{F}$ y $(X \cup Y)_Y(H) \in \mathcal{G}$.

Demostración. $X_{X\cap Y}(\mathcal{F}) = Y_{X\cap Y}(\mathcal{G})$ implica que existen $Conv(P) = S_p \in \mathcal{F}$ y $Conv(Q) = T_q \in \mathcal{G}$ tales que $X_{X\cap Y}(S_p) = Y_{X\cap Y}(T_q)$. Puesto que $n > m$ existe $\mathcal{T}$ transformación lineal, tal que $\mathcal{T}(T_q) = S_q \in L(Free_n)$ donde $X_{X\cap Y}(S_q) = Y_{X\cap Y}(T_q)$ y $\mathcal{T}$ respeta cualquier $k-$división por simplex de T_q. Considere la traslación $\mathcal{T}_v$ con $v = p - \mathcal{T}(q)$ así para $\mathcal{L} = \mathcal{T}_v \circ \mathcal{T}$ $\mathcal{L}(q) = \mathcal{T}(q) + p - \mathcal{T}(q) = p$. $A = \mathcal{L}(Q) \cup P$ implica $S_p = Conv(P) \subset Conv(A) = S \in \mathcal{F}$. Considere una $k-$división por simplex $T_i = Conv(Q_i)$ de T_q con $1 \leq i \leq a$ y una $w-$división por simplex $S_j = Conv(P_j)$ de S con $1 \leq j \leq b$ que respete la $k-$división $\mathcal{L}(T_i))$.
Definamos

$$f : (\bigcup_{j=1}^{b} P_i) \cup \{p\} \to B \text{ con } B \subset [0,1]^m \textit{ como sigue} :$$

- $f(p) = q$
- Como $\mathcal{L}$ es inyectiva para todo $p_i \in \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{a} Q_i) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{b} P_j\right)$ existe un único $q_i \in Q_i$ tal que $\mathcal{L}(q_i) = p_i$. Por lo anterior, defina $f(p_i) = q_i$.
- Para todo $p_l \in (\bigcup_{j=1}^{b} P_j) - \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{a} Q_i)$ elija un único $q_l \in int(T_q)$ tal que $X_{X\cap Y}(p_l) = Y_{X\cap Y}(q_l)$ y defina $f(p_l) = q_l$. Nótese que q_l siempre existe pues $X_{X\cap Y}(S_p) = Y_{X\cap Y}(T_q)$. Al conjunto de elementos q_l elegido libremente, llámelo Q_l.

De la construcción anterior se sigue que, $B = \{q\} \cup (\bigcup_{i=1}^{a} Q_i) \cup Q_l$, $X_{X\cap Y}(f(x)) = Y_{X\cap Y}(x)$ para todo $x \in A$, $x * f(x)$ esta definido para todo $x \in \bigcup_{j=1}^{b} P_j \cup \{p\}$ y f es biyectiva.

$$\text{Defina } H = \bigcup_{j=1}^{b} H_j \text{ con } H_j = Conv\{p_{ij} * f(p_{ij}) : p_{ij} \in P_j\}$$

- (i). Mostremos que H es inyectivo respecto a X.

  Tome $\sum_{i=1}^{w+1} \alpha_i p_{ij} = c \in H_j$, $\sum_{i=1}^{w+1} \beta_i p_{il} = d \in H_l$ y $\sum_{i=1}^{w+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{w+1} \beta_i = 1$ tales que $(X \cup Y)_X(c) = (X \cup Y)_X(d)$.

$$(X\cup Y)_X(c) = (X\cup Y)_X(d) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{w+1} \alpha_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{w+1} \beta_i p_{il} \in S_j \cap S_l \Longleftrightarrow p_{ij}, p_{il} \in P_j \cap P_l, \forall i.$$

  Es decir, p_{ij}, p_{il} pueden representarse como $p_{ijl} \in S_j \cap S_l$, así

$$\sum_{i=1}^{w+1} \alpha_i p_{ijl} = \sum_{i=1}^{w+1} \beta_i p_{ijl} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{w+1} \alpha_i p_{ijl} - \sum_{i=1}^{w+1} \beta_i p_{ijl} = \sum_{i=1}^{w+1} (\alpha_i - \beta_i) p_{ijl} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$$

  pues $P_i \cap P_l$ es un conjunto independiente.

- (ii) Probemos la parte dos del teorema.

  $T_q = \bigcup_{i=1}^{a} T_i$ implica que existe $1 \leq i \leq a$ tal que $T_i = Conv(Q_i) \in \mathcal{G}$ por ser $\mathcal{G}$ primo. Por otro lado $\mathcal{L}(Q_i) \subset P_j$ para algún $1 \leq j \leq b$ ya que $\{S_i\}$ respeta la $k-$división $\{\mathcal{L}(T_i)\}$. Dado $D = \{q_{yi} * f(q_{yi}) : q_{yi} \in \mathcal{L}(Q_i)\}$ implica $Q_i = (X \cup Y)_Y(Conv(D)) \in \mathcal{G}$, además $|D| = |\mathcal{L}(Q_i)| = |Q_i|$ debido a que f es biyeciva. Note que

$$Conv(D) \subseteq H_i \subset H \Longrightarrow (X \cup Y)_Y(Conv(D)) \subset (X \cup Y)_Y(H) \in \mathcal{G}$$

$$\textit{pues } (X \cup Y)_Y(Conv(D)) = Conv((X \cup Y)_Y(D)) = Conv(Q_i) = T_i \in \mathcal{G}.$$

  Finalmente

  $(X \cup Y)_X(H) = S \in \mathcal{F}$ por construcción de H.

□

El teorema anterior establece que si $|X| > |Y|$ entonces H es inyectivo sobre X, pero si $|X| \leq |Y|$ se tendría que H es inyectivo sobre Y.

Corolario 5.2.

(i) $(X \cup Y)_X(H \cap R) \in \mathcal{F}$ *y* $(X \cup Y)_Y(H \cap R) \in \mathcal{G}$ *para todo* $R \in \mathcal{C}$ *con* $\mathcal{C}$ *el filtro generado ver(1.1, 5.2).*

(ii) $R \cap H \subseteq A_1 \cup A_2$ *para algún* $R \in \mathcal{C}$ *implica* $[(X \cup Y)_X(A_i) \in \mathcal{F}$ *y* $(X \cup Y)_X(A_i) \in \mathcal{G}]$ *para algún* $1 \leq i \leq 2$. *Si se cunplen las condiciones (i) y (ii) entonces existe* $\mathcal{H}$ *un filtro* ***primo*** *en* $L(Free_{n+m-r})$ *tal que* $\mathcal{H}_{(X \cup Y)_X} = \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{H}_{(X \cup Y)_Y} = \mathcal{G}$.

Demostración. Se define

$$\mathcal{H}_H = \{A \in L(Free_{m+n-r}) \colon H \cap R \subseteq A, \text{ para algún } R \in \mathcal{C}\}.$$

Se observa que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}_H$
Queremos ver que este es el filtro pedido. Se verificamente directamente que $\mathcal{H}_H$ es filtro, debido a que $A, B \in \mathcal{H}_H$ implica $H \cap R_1 \subseteq A$ y $H \cap R_2 \subseteq B$, y así $H \cap R_1 \cap R_2 \subseteq A \cap B$. con $R_1 \cap R_2 \in \mathcal{C}$ debido a que $\mathcal{C}$ es filtro.
Veamos que $\mathcal{H}_{H_{(X \cup Y)_X}} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{H}_H(X \cup Y)_Y = \mathcal{G}$. Para $S \in \mathcal{F}$ se tiene que $X^{X \cup Y}(S) \in \mathcal{C}$ luego $X^{X \cup Y}(S) \cap H \subset X^{X \cup Y}(S) \in \mathcal{H}_{\mathcal{H}}$ y por el colorario 4.1 se concluye $S \in \mathcal{H}_{H_{(X \cup Y)_X}}$. La otra contenencia es sencilla. Análogamente se muestra la otra igualdad.
Falta ver que $\mathcal{H}_H$ es primo. $A \cup B \in \mathcal{H}_H$ implica $H \cap R \subseteq A \cup B$ para algún $R \in \mathcal{C}$. Así $(H \cap R \cap A) \cup (H \cap R \cap B) = H \cap R \cap (A \cup B) \in \mathcal{H}_H$. Consecuentemente de la condicion (ii) de la hipótesis, $(X \cup Y)_X(H \cap R \cap A) \in \mathcal{F} \wedge (X \cup Y)_Y(H \cap R \cap A) \in \mathcal{G}$, o $(X \cup Y)_X(H \cap R \cap B) \in \mathcal{F}, \wedge (X \cup Y)_Y(H \cap R \cap B) \in \mathcal{G}$. Si $H \cap R \cap A$ proyecta bien respecto a X y respecto a Y entonces,

$$W = H \cap X^{X \cup Y}\left[(X \cup Y)_X(H \cap R \cap A)\right] \cap Y^{X \cup Y}\left[(X \cup Y)_Y(H \cap R \cap A)\right] \subseteq A.$$

En efecto, $r \in W$ implica $r \in H$ y $(X \cup Y)_X(r) \in (X \cup Y)_X(H \cap R \cap A)$. Así, $(X \cup Y)_X(r) = (X \cup Y)_X(a)$ con $a \in H \cap R \cap A$. Si H es inyectivo respecto a X, entonces $r = a \in A$. De lo contrario, $(X \cup Y)_Y(r) \in (X \cup Y)_Y(H \cap R \cap A)$, así $(X \cup Y)_Y(r) = (X \cup Y)_Y(a')$ con $a' \in H \cap R \cap A$. Si H es inyectivo respecto a Y se tiene $r = a' \in A$. Consecuentemente $A \in \mathcal{H}_H$. Si por el contrario $H \cap R \cap B$ es el que proyecta bien respecto a X e Y, entonces $B \in \mathcal{H}_H$.

□

Las condiciones del teorema anterior son (como se demostró en el teorema) condiciones necesarias para la existencia del filtro $\mathcal{H}$ pedido en el teorema 5.1 en lenguaje de filtros.

Conclusiones

Trabajar con filtros puede resultar más sencillo que trabajar con ideales, por ejemplo, el teorema 5.2 del presente trabajo es una generalización del teorema 5.1 de [2]. La demostración de dicho teorema es sencilla y requiere de poca álgebra. Debido a esto se pensó que la demostración del teorema 5.1 de [2] sería más sencilla mediante una noción dual de filtros que cuenta con herramientas matemáticas muy intuitivas como las proyecciones y co-proyecciones, sin embargo, el establecer condiciones para demostrar el teorema 5.1 resultó igual de complejo aunque con resultados e ideas diferentes.

Bibliografía

[1] A.D. ALEXANDROV, Convex Polyhedra, *Springer monographs in matemathics*, 2005.

[2] BUSANICHE M., D. MUNDICI , Geometry of Robinson Consistency in Lukasiewicz Logic, *Annals of Pure and Applied Logic*, 2007.

[3] CIGNOLI R., I. D'OTTAVIANO, D. MUNDICI, Algebraic Foundations of Many Valued Reasoning, *Vol 7. Springer Science & Business Media, 2013.*

[4] DUBUC E., Y. POVEDA, Representation theory of MV-algebras, Trends in Logic, *Annals of pure and Applied Logic (2010).*

[5] HELI J., Algunas Propiedades del Espectro Primo de las MV-Álgebras, *Universidad Tecnológica de Pereira, 2012.*

[6] MUNKRES J., Elements of Algebraic Topology, *Addison-Wesley Publishing Company, 1984.*

[7] MUNKRES J., Topología, Segunda edición, *Pearson Educación, 2002.*

[8] YESCAS, C., Filtros en topológia y algunas aplicaciones, *Universidad Tecnológica de Mixteca, 2013.*