UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

**TESIS DOCTORAL**

# Espacios de *moduli* de *jets* de estructuras geométricas en un punto

**Adrián Gordillo Merino**

**Programa de Doctorado**
**Modelización y Experimentación en Ciencia y Tecnología**

**2017**

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

**TESIS DOCTORAL**

# Espacios de *moduli* de *jets* de estructuras geométricas en un punto

**Adrián Gordillo Merino**

**Programa de Doctorado**
**Modelización y Experimentación en Ciencia y Tecnología**

Conformidad del director:

Fdo.: José Navarro Garmendia

**2017**

*A mis abuelos y mi padre,*
*que tanto habrían disfrutado hojeando estas páginas, sin entender nada*

*A mi madre,*
*la entrega constante y generosa*

*A Cruci,*
*el amor persistente e inagotable*

*A Adrián y Ángel,*
*la alegría de mi hoy y la esperanza de mi mañana*

# Agradecimientos

No es mi pretensión en estas líneas ser original, sino tan solo, como anticipa su título, ser agradecido.

Y, si de agradecimiento se trata, está claro que en primer lugar debo nombrar a mi amigo, director y joven maestro José. Sin su ánimo, su generosidad y su entusiasta disposición para hablar de Matemáticas, nada de lo que viene a continuación estaría donde está ahora. No solo hemos compartido correcciones sobre versiones que ya estaban supuestamente pulidas, sino discusiones sobre lo humano y lo divino, bromas y risas, congresos y penas propias de doctorando. Ojalá podamos seguir llenando de monigotes, flechas y tablas las pizarras de nuestros despachos durante muchos años más, de manera fructífera y alegre, disfrutando del rico aroma de un café de máquina. Si no fuera así, al menos siempre nos quedará la amistad. Para mí, eso ya es mucho.

Me gustaría también dedicar unas líneas a Juan Sancho, quien se acercó hace ya demasiado tiempo a proponerme un proyecto apasionante, pero con el que no conseguí entonces entrar en resonancia. Si este momento es o no el adecuado para entonar el *mea culpa*, no lo sé bien. Pero lo hago igualmente. Una parte esencial de esta memoria, sin duda, se debe a él. Siempre ha sido un maestro generoso, y su elegancia en el planteamiento y la resolución de los problemas es una verdadera inspiración.

A él y a Juan Antonio Navarro quiero agradecer también que me hicieran llegar la teoría de fibrados naturales, cuya definición esencial, para mi gusto mucho más sugerente que la habitual en la literatura, aprendieron a su vez de Sancho Guimerá.

No puedo olvidarme, por supuesto, de José Enrique. Me tendió una mano abierta en un momento especialmente duro, y, aunque finalmente no consiguiéramos llegar a buen puerto, siempre recordaré con un cariño especial mi estancia en el lejano Pittsburgh, donde tanto él como su encantadora familia me ayudaron a sobrellevar la añoranza del hogar. Desde entonces no ha dejado de animarme siempre que ha podido para que rematara esta tarea, ejerciendo un papel de tutor de programa de doctorado muy superior sin duda a lo exigido por cualquier compromiso, más o menos burocrático. Esa notita que dejamos pendiente debe acabar cayendo más tarde o más temprano...

A todos los compañeros del Departamento de Matemáticas, sin excepción —y con nuestro Carlos Benítez siempre en la memoria—, aprovecho ahora, que tengo unas líneas a mi disposición, para darles las gracias con el corazón por todos estos años, por el «simple» —¡ay, si fuera tan simple!— motivo de hacer de nuestro departamento un excepcional lugar donde trabajar.

Concretamente, se me hace la boca agua pensando en mi habitual grupo de comensales, a los que para evitar enfados me referiré de un modo más formalito que el que acostumbramos a usar entre nosotros, con el cariño que nos caracteriza; a saber, y por orden alfabético, como en las coautorías matemáticas: Javier, José Antonio y Pedro; a ellos, de cuando en cuando, se suma Ignacio; y nos solía acompañar en su época, cuando aún no le había entrado la preocupación por la línea, Santiago. A todos ellos me gustaría expresarles mi gratitud por amenizar los almuerzos con polémicas de todo tipo, a veces resueltas con cuatro voces y otras muchas con un «Tienes la razón, pero no te la voy a dar». Ellos han conseguido que quedarse a echar una tarde de trabajo sea algo más sencillo.

Y luego está mi grupito de café matutino: vayan por delante las chicas, Amelia y Teresa; y luego los chicos, José Luis, y, de nuevo, José y Pedro (¿abusando de agradecimiento por partida doble, como quien chupa cámara?). Siempre consiguen que empezar la mañana laboral sea algo entretenido y cordial. (Yo ya).

Me gustaría agradecer especialmente a Mariano por ahorrarme un tiempo valiosísimo, al pasarme una fantástica plantilla de LaTeX, que yo he modificado a mi conveniencia, para poner en negro sobre blanco esta memoria.

Y a Fernando (abandona ya el lado oscuro de la fuerza, aún estás a tiempo), que se ofreció a revisar lo que yo iba escribiendo. Sus sugerencias sobre mi capítulo 1 han sido muy acertadas y provechosas.

No dejo de recordar también a mis nuevos compañeros de Forestales del Centro Universitario de Plasencia. Entre las paredes de aquel laberíntico edificio, he escrito muchas de estas páginas a lo largo del último año. Les agradezco a todos ellos, y en especial a mis compañeros de despacho, María y Willy, el excelente recibimiento que me han ofrecido, y que hayan conseguido que me sienta uno más de su «familia».

Quiero expresar mi gratitud a mi amigo Fernando, que ya hace años que viene confiando en mi capacidad de rematar esta tarea casi más que yo mismo. (Tú, tranquilo). Sé positivamente que mi alegría al acabar esta memoria es su alegría.

Y, por último —*last, but not least*—, claro está, tengo que darles las gracias a ellos. A mi familia. A mi madre, a mi Cruci y a mis niños.

Ellos han vivido conmigo mis ilusiones, pero también mis desencantos, mis dudas y mis ansiedades. Todos esos sentimientos que uno va experimentando, como en montaña rusa, cuando se mete en una empresa como esta. A ellos les he hurtado tantas y tantas horas juntos, y muchas veces no he sido capaz de darles más que desvelos y preocupaciones.

Pero en todo momento han estado a mi lado, siempre he sentido su apoyo, y, por encima de todo, nunca han dejado de entregarme lo único que no tiene precio en el mundo: su amor. Yo, a cambio, aquí y ahora, solamente puedo ofrecerles estas sencillas palabras:

Gracias, os quiero.

*15 de octubre de 2017,*
*festividad de Santa Teresa de Jesús,*
*Doctora de la Iglesia*

# Índice general

# Introducción

El problema de clasificación, sean cuales sean los entes que se desee clasificar, es un problema recurrente en Matemáticas, y, en particular, en Geometría Diferencial.

Es nuestro interés aquí hablar del problema de equivalencia de *jets* en un punto de ciertas estructuras geométricas. Pensamos que este es un primer paso para poder abordar el problema más deseable de la clasificación local de tales estructuras. Como sugerentes introducciones a este último problema, pueden leerse [1, cap. 7] y [2].

Precisando algo más el problema, si $J_p^r F$ denota el fibrado de *jets* de orden $r$ de secciones del fibrado natural $F \to X$ de orden $s$, y $\mathrm{Dif}_p^{r+s}$ es el grupo de los *jets* de orden $r+s$ de difeomorfismos locales en la variedad diferenciable $X$ que dejan fijo el punto $p$, se trata de dilucidar la naturaleza del siguiente cociente:

$$J_p^r F / \mathrm{Dif}_p^{r+s} \,.$$

En la literatura, este cociente ha sido estudiado en [8] para los casos de conexiones lineales simétricas, en [7] para estructuras de Fedosov, y en [24], más en general, para $G-$estructuras en presencia de una conexión lineal.

Concretamente, en esta memoria, el fibrado $F$ es el de las conexiones lineales en el capítulo 2, y el de las métricas en el capítulo 3. En este documento, entre otras cosas, aparecen algunas aportaciones a la resolución del problema planteado —en lo relativo a las conexiones lineales y las métricas—, que ya han sido publicadas: véanse [16] y [17].

Nuestro modo de enfocar la cuestión presta especial atención al estudio de los invariantes diferenciales escalares de orden $r$ asociados a la estructura geométrica que deseamos analizar; es decir, las funciones «diferenciables» reales definidas sobre el cociente $J_p^r F / \mathrm{Dif}_p^{r+s}$.

El estudio de los invariantes diferenciales escalares está presente en diversos trabajos de la literatura; entre otros, [25] y [26] se dedican al análisis de las álgebras de invariantes diferenciales de métricas, mientras que [33] se centra en el estudio de los invariantes diferenciales en el ámbito de los *diffieties* .

Procedamos ahora a relatar de modo sucinto el contenido de esta memoria.

En el primer capítulo presentamos la noción básica de espacio anillado, que nos permitirá considerar cocientes y límites proyectivos, preservando una cierta estructura «diferenciable», y no meramente topológica. Como caso particular de espacio anillado, introducimos posteriormente la definición de espacio diferenciable, que amplía el concepto de variedad diferenciable. Tras una breve exposición de la teoría de los fibrados naturales, donde seguimos la definición debida a Sancho Guimerá, damos la definición de invariante diferencial escalar (global) de orden menor o igual que $r$ de las secciones de un fibrado natural, como una función real «diferenciable» definida sobre todo el espacio de clases de *jets* de orden $r$ de secciones del fibrado. Acabamos el capítulo fijando notaciones y aplicando las definiciones generales a los casos concretos de los fibrados de *jets* de conexiones lineales y de métricas pseudo-riemannianas, y planteamos también la notación y definiciones necesarias para abordar el problema de la clasificación de desarrollos formales, es decir, de *jets* de orden infinito.

En el capítulo 2, exponemos cómo asociar una sucesión de tensores normales en un punto de una variedad diferenciable $X$ a cada tensor definido en un entorno del punto. Por lo que sabemos, este desarrollo en tensores normales, válido siempre que dispongamos de una conexión lineal $\nabla$, fue introducido en primer lugar por Veblen y Thomas ([32]). No es difícil ver que es posible también obtener la sucesión de tensores normales «asociados a la propia conexión lineal».

Además, definimos unos espacios vectoriales, $N_i$, formados por tensores en el punto que tienen las mismas simetrías lineales que los tensores normales que acabamos de mencionar.

Esta construcción permite definir una aplicación

$$\phi_r : J^r_p\mathrm{Con} \longrightarrow N_0 \times \ldots \times N_r \,,$$

que hace corresponder a cada *jet* de orden $r$ en un punto de conexiones lineales la sucesión de sus tensores normales hasta el orden $r$, y el primer resultado fundamental asociado a este desarrollo en tensores normales es el teorema de reducción 2.1.3 —del que también damos su versión para conexiones simétricas (teorema 2.1.4)—, que reformulamos aquí:

**Teorema. (Reducción).** *Para cada entero $r \geq 0$, la aplicación $\phi_r$ es una proyección regular epiyectiva, cuyas fibras son las órbitas de un cierto grupo de jets de difeomorfismos locales.*

Además, $N_0 \times \ldots \times N_r$ es una representación lineal del grupo lineal real $\mathrm{Gl}_n$, y, como corolario del teorema de reducción, se sigue inmediatamente que el espacio de clases de *jets* de conexiones lineales es isomorfo, como espacio anillado, al cociente $(N_0 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{Gl}_n$. Esto, junto con la conveniente aplicación de la teoría de invariantes de $\mathrm{Gl}_n$, servirá para demostrar el teorema 2.2.3:

**Teorema.** *Los únicos invariantes diferenciales escalares asociados a las conexiones lineales, sean estas simétricas o no, son las funciones constantes.*

Queda abierta la cuestión de estudiar qué condiciones de «estabilidad» pueden imponerse sobre las conexiones lineales, de modo que, restringiendo el análisis a aquellos *jets* de conexiones que verifiquen dichas condiciones, sí obtengamos una colección suficiente de invariantes diferenciales escalares que permitan, en último término, llevar a cabo una clasificación cabal, y de tal manera, que el espacio de clases tenga una buena estructura (deseablemente, de espacio diferenciable). Recientemente, pueden consultarse [5], [11] y [12] como referencias que abordan este problema.

Por otra parte, nuestras técnicas permiten recuperar, mediante argumentos diferentes de los allí empleados, las fórmulas ya presentes en [8] sobre la «dimensión genérica» del espacio de clases de *jets* de conexiones lineales simétricas.

Acabamos el capítulo 2 probando el teorema 2.3.1, resultado que extiende el teorema de reducción anteriormente citado al caso de *jets* de orden infinito de conexiones lineales:

**Teorema.** *El morfismo de espacios anillados que hace corresponder a cada jet de orden infinito en un punto de conexiones lineales su desarrollo formal mediante tensores normales en dicho punto es epiyectivo, equivariante respecto a la acción del grupo de jets de orden infinito de difeomorfismos locales y tiene, para cada $\infty-$jet de conexiones, una sección que pasa por dicho jet.*

Dedicamos el tercer capítulo al estudio de los espacios de clases de *jets* de métricas.

De modo análogo a lo hecho en el capítulo 2, empezamos presentando los tensores normales en un punto asociados a una métrica pseudo-riemanniana y definimos los espacios $N_i$ de tensores en un punto que tienen las mismas simetrías que los normales.

También podemos definir una aplicación

$$\phi_r : J^r_p M \longrightarrow N_0 \times \ldots \times N_r \,,$$

que a cada *jet* de métricas le hace corresponder su sucesión de tensores normales en $p$ hasta el orden $r$, y damos el teorema 3.1.3, totalmente análogo al correspondiente para conexiones lineales:

**Teorema. (Reducción).** *Para cada entero $r \geq 0$, la aplicación $\phi_r$ es una proyección regular epiyectiva, cuyas fibras son las órbitas de un cierto grupo de jets de difeomorfismos locales.*

Este último teorema es usado para probar, de modo inmediato, que hay un isomorfismo de espacios anillados entre el espacio de clases de *jets* de métricas pseudo-riemannianas de signatura $(s_+, s_-)$ y el cociente de $N_2 \times \ldots \times N_r$ por el grupo ortogonal $\mathrm{O}_{s_+,s_-}$. La combinación de este hecho con un resultado de Luna (teorema A.1) bastará para demostrar también que el álgebra de invariantes diferenciables es finito-generada, en el siguiente sentido (teorema 3.2.1):

**Teorema. (Finitud de invariantes).** *Existe un número finito $q_1, \ldots, q_s$ de invariantes diferenciales escalares de orden menor o igual que $r$ de las métricas pseudo--riemannianas, tales que cualquier otro invariante diferencial $f$ de orden menor o igual que $r$ es una función diferenciable de los primeros; es decir, $f = F(q_1, \ldots, q_s)$, para alguna función $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^s)$.*

En el caso de métricas riemannianas, al espacio de clases lo llamaremos espacio de *moduli*, debido a los dos siguientes resultados.

Por una parte, los invariantes diferenciales escalares separan puntos en el espacio de clases de *jets* de métricas riemannianas, de modo que los valores que dichos invariantes tomen sirven para clasificar los $r-$*jets* en un punto de métricas riemannianas (teorema 3.2.2):

**Teorema. (Clasificación de métricas riemannianas).** *Los invariantes diferenciales de orden menor o igual que* $r$ *separan puntos en el espacio de* moduli *de jets en un punto de orden* $r$ *de métricas riemannianas.*

En su demostración, desempeña un papel clave la compacidad del grupo ortogonal de una métrica riemanniana. Sin embargo, como es bien sabido, el grupo ortogonal de una métrica pseudo-riemanniana no es compacto; ello hace que no sea cierto en general que los invariantes diferenciales separen puntos en el espacio de clases de *jets* de métricas pseudo-riemannianas, a lo que volveremos más adelante.

Por otra parte, proporcionamos un par de teoremas estructurales (teoremas 3.2.3 y 3.2.5) para el espacio de *moduli* riemanniano. Este hecho, donde de nuevo es crucial la compacidad del grupo ortogonal de una métrica riemanniana, es el resultado fundamental de esta memoria:

**Teorema.** *El espacio* $\mathsf{M}_n^r$ *de* moduli *de jets de orden* $r$ *de métricas riemannianas es un espacio diferenciable que estratifica de modo canónico en un número finito de subespacios localmente cerrados que son variedades diferenciables, y de modo que una de ellas es un subconjunto conexo, denso y abierto del espacio de* moduli*.*

Cada estrato del *moduli*, cuya existencia garantiza el teorema anterior, está formado por aquellos *jets* de métricas riemannianas que tienen esencialmente el mismo grupo de automorfismos; más concretamente, un estrato, digamos $S_{[H]}$, será el conjunto de clases de equivalencia de *jets* $j_p^r g$ cuyo grupo de automorfismos, visto como subgrupo del grupo ortogonal $\mathrm{O}(T_pX, g_p) \simeq \mathrm{O}_n$, es conjugado a $H$.

En este mismo capítulo, determinamos de modo preciso qué estratos aparecen en los espacios de *moduli* asociados a una variedad bidimensional, mediante el siguiente resultado (teorema 3.3.3), donde estamos denotando por $D_m$ el grupo diédrico de orden $2m$ y por $K_m$ el grupo de giros de orden $m$ (en ambos casos, con $m \geq 1$):

**Teorema.** *Los estratos del espacio de* moduli $\mathsf{M}_2^r$ *se corresponden con alguna de las siguientes clases de conjugación en* $\mathrm{O}_2$ : $[\mathrm{O}_2]$, $[D_1]$, ..., $[D_{r-2}]$, $[K_1]$, ..., $[K_{r-4}]$ *(y también* $[K_1]$*, si* $r = 4$*).*

Aplicamos este último teorema para realizar el estudio completo de los espacios de *moduli* sobre una variedad de dimensión $2$ en órdenes bajos ($r = 2, 3$ y $4$).

Con respecto a las métricas pseudo-riemannianas, presentamos el análisis de un ejemplo de espacio de clases de *jets*, que sirve para ilustrar que los teoremas antes enunciados para métricas riemannianas no son ciertos en el caso pseudo-riemanniano. Más concretamente, puede observarse:

- Que, en general, los invariantes diferenciales no separan puntos en el espacio de clases; es decir, los invariantes diferenciales escalares no clasifican los *jets* de métricas pseudo-riemannianas.

- Que, en general, el espacio de clases no es un espacio diferenciable ni estratifica en variedades diferenciables, como sí sucedía en el caso riemanniano.

Es un problema abierto aún el determinar ciertas condiciones de «estabilidad» sobre los *jets* de métricas pseudo-riemannianas, de modo que sea posible realizar una clasificación adecuada —posiblemente, mediante algún teorema de estratificación similar al que hemos obtenido en el caso riemanniano— sobre aquellos *jets* que las verifiquen.

Al final del tercer capítulo, demostramos un teorema de reducción (3.5.1) para *jets* de orden infinito de métricas pseudo-riemannianas, análogo al correspondiente para *jets* de orden infinito de conexiones lineales. Este teorema, de nuevo junto a la compacidad del grupo ortogonal de una métrica riemanniana, nos permitirá probar que el espacio de clases de *jets* de orden infinito de métricas riemannianas, $\mathsf{M}_n^\infty$, es el límite proyectivo de los espacios de *moduli* $\mathsf{M}_n^r$.

Como consecuencia, además, obtenemos el corolario 3.5.6:

**Teorema.** *Los invariantes diferenciales escalares de orden finito clasifican los jets de orden infinito de métricas riemannianas.*

*Es decir, dos jets, $j_p^\infty g$, $j_p^\infty g'$, son equivalentes si, y solo si, para todo entero $r \geq 0$, y para todo invariante diferencial escalar $h$ de orden menor o igual que $r$, se satisface $h(g)(p) = h(g')(p)$.*

La memoria tiene, finalmente, un breve Apéndice en el que, sin demostración, presentamos algunos resultados relativos a la teoría de invariantes de los grupos de Lie clásicos, de los que tendremos que hacer uso en algún momento.

# Capítulo 1

# Espacios de clases de *jets* en un punto

En este capítulo, vamos a presentar algunos conceptos que serán de utilidad a lo largo de esta memoria. En particular, introduciremos los espacios de clases de equivalencia de *jets* en un punto de secciones de un fibrado natural, así como la estructura con la que los vamos a considerar, que es la de espacio anillado (reducido).

## 1.1. Espacios anillados

Es bien patente en la mayoría de los textos de Geometría Diferencial que dicha disciplina se puede estudiar sin presentar la definición de variedad diferenciable como un caso particular de espacio anillado.

Sin embargo, este concepto permite considerar entes matemáticos que escapan del ámbito de las variedades diferenciables, como son el cociente de una variedad por la acción de un grupo de Lie y el límite proyectivo de variedades diferenciables.

Puesto que el paso al cociente será una operación fundamental en nuestro trabajo, consideramos la categoría de espacios anillados como la base más apropiada para el desarrollo posterior.

La noción de espacio anillado que vamos a introducir —más restrictiva que la habitual en Geometría Algebraica[1]— se ajusta al grado de generalidad que necesitaremos en lo sucesivo.

**Definición 1.1.1.** *Un **haz de funciones continuas** sobre un espacio topológico $X$ es una aplicación $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto $U \subseteq X$ le asigna una subálgebra $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ (del álgebra de funciones continuas sobre $U$ con valores en $\mathbb{R}$), de modo que se satisfaga la siguiente condición:*

*Para cada abierto $U \subseteq X$, cada recubrimiento por abiertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y cada función*

[1] Véase la definición de espacio anillado propia de la Geometría Algebraica en [18]

*$f : U \to \mathbb{R}$, se verifica:*

$$f \in \mathcal{O}_X(U) \iff f|_{U_i} \in \mathcal{O}_X(U_i)\,, \;\; \forall\, i \in I\,.$$

Es decir, un haz de funciones continuas sobre $X$ no es otra cosa que un subhaz del haz $\mathcal{C}_X$ de funciones continuas con valores reales.

En particular, si $U$ y $V$ son abiertos de $X$, tales que $U \subseteq V$, entonces se cumple:

$$f \in \mathcal{O}_X(V) \implies f|_U \in \mathcal{O}_X(U)\,.$$

**Definición 1.1.2.** *Un **espacio anillado** es una pareja $(X, \mathcal{O}_X)$, en la que $X$ es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es un haz de funciones continuas sobre $X$.*

Todo subconjunto abierto $V$ de un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es a su vez, y de modo natural, un espacio anillado. Basta definir $\mathcal{O}_V(U) := \mathcal{O}_X(U)$, para cada abierto $U \subseteq V$.

Por comodidad en la notación, es muy habitual —y así lo haremos en la mayoría de las ocasiones, salvo cuando interese hacer hincapié en el haz de funciones continuas— denotar un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ simplemente como $X$, omitiendo pues el haz.

Si $X$ es un espacio anillado y $U$ es un subconjunto abierto suyo, nos referiremos con frecuencia a las funciones que pertenezcan a $\mathcal{O}_X(U)$ como funciones «diferenciables» sobre $U$.

**Definición 1.1.3.** *Un **morfismo entre espacios anillados** $\varphi : X \to Y$ es una aplicación continua, tal que, para cada abierto $U \subseteq Y$ y para cada $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, se verifique: $\varphi^* f := f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$.*

*Un morfismo de espacios anillados $\varphi : X \to Y$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $\phi : Y \to X$ (el morfismo inverso de $\varphi$), tal que $\varphi \circ \phi = Id_Y$ y $\phi \circ \varphi = Id_X$.*

**Ejemplos:**

1. Sea $X$ un espacio anillado y sea $U \subseteq X$ un abierto. La inclusión natural $U \hookrightarrow X$ es un morfismo de espacios anillados.

2. Por supuesto, la composición de morfismos de espacios anillados vuelve a ser un morfismo de espacios anillados.

3. $\mathbb{R}^n$, dotado del haz $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n}$ de funciones diferenciables, es un espacio anillado.

4. Una **variedad diferenciable** es un espacio anillado en el que cada punto tiene un entorno abierto isomorfo como espacio anillado a (algún abierto de) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})$.

   Una aplicación entre variedades diferenciables se dice **diferenciable** precisamente si es un morfismo de espacios anillados, y se llama **difeomorfismo** si es un isomorfismo de espacios anillados.

5. Cualquier subespacio $Z$ cerrado —es más, en general, localmente cerrado— de $\mathbb{R}^n$, junto con el haz $\mathcal{C}_Z^\infty$ de las funciones que coinciden localmente con restricciones de funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$, es un espacio anillado.

6. En ocasiones podremos considerar un sistema proyectivo de morfismos de espacios anillados:
$$\cdots \longrightarrow X_{r+1} \longrightarrow X_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \ .$$
El límite proyectivo $\lim\limits_{\leftarrow} X_r$ es un espacio anillado, con la siguiente estructura.

   Sobre el conjunto $\lim\limits_{\leftarrow} X_r$ se tiene la topología del límite proyectivo, es decir, la topología inicial inducida por las proyecciones canónicas $\pi_s : \lim\limits_{\leftarrow} X_r \to X_s$. Por otra parte, diremos que una función real sobre un abierto de $\lim\limits_{\leftarrow} X_r$ es «diferenciable» si coincide localmente con la composición de una proyección $\pi_s : \lim\limits_{\leftarrow} X_r \to X_s$ y una función diferenciable sobre un abierto de $X_s$.

   El espacio topológico $\lim\limits_{\leftarrow} X_r$, dotado del haz de funciones diferenciables explicitado anteriormente, es un espacio anillado, que satisface la siguiente propiedad universal:

   Para cada espacio anillado $Y$, existe la biyección natural (funtorial en $Y$):
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(Y, \lim\limits_{\leftarrow} X_r) & \overline{\overline{\qquad}} & \lim\limits_{\leftarrow} \mathrm{Hom}\,(Y, X_r) \\ \varphi & \longmapsto & (\ldots, \pi_r \circ \varphi, \ldots)\,. \end{array}$$

### 1.1.1. Espacios anillados cocientes

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado, $G$ un grupo que actúa sobre $X$, $X/G$ el espacio topológico cociente y $\pi : X \to X/G$ la aplicación canónica (continua) de paso al cociente.

**Definición 1.1.4.** *El **espacio anillado cociente** $(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$ es la pareja formada por el espacio topológico cociente $X/G$, junto con el haz de funciones continuas que, a cada abierto $U \subseteq X/G$, le hace corresponder:*
$$\mathcal{O}_{X/G}(U) := \{f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}) : f \circ \pi \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))\}\,.$$

Existe un isomorfismo de $\mathbb{R}-$álgebras canónico:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X/G}(U) & \overline{\overline{\qquad}} & \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G \\ f & \longmapsto & f \circ \pi\,, \end{array}$$
donde con $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ estamos denotando el conjunto de todas las aplicaciones pertenecientes a $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))$ que son invariantes por la acción de $G$ (es decir, aquellas $f \in \mathcal{O}_X^\infty(\pi^{-1}(U))$, tales que $f(g \cdot p) = f(p)$, para cualesquiera $g \in G$ y $p \in \pi^{-1}(U)$).

Obsérvese que la aplicación canónica $\pi : X \to X/G$ es, con la estructura expuesta en el cociente, un morfismo de espacios anillados. Además, el espacio anillado cociente $X/G$ verifica, como sería de esperar, la propiedad universal del cociente en la categoría de espacios anillados:

**Propiedad universal del cociente:** *Todo morfismo de espacios anillados $\varphi : X \to Y$ que sea constante sobre cada órbita de la acción de $G$ sobre $X$ factoriza de modo unívoco a través de la aplicación cociente $\pi : X \to X/G$; esto es, existe un único morfismo de espacios anillados $\tilde{\varphi} : X/G \to Y$, que verifica $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$.*

Como caso particular de la definición anterior, si $G \times X \to X$ es una acción diferenciable de un grupo de Lie $G$ sobre una variedad diferenciable $X$, el espacio topológico cociente $X/G$ tiene, con el haz de funciones continuas expuesto en la definición 1.1.4, estructura de espacio anillado, aunque no, en general, de variedad diferenciable.

Enunciemos ahora unos resultados que necesitaremos más adelante:

**Proposición 1.1.1.** *Sea $G$ un grupo que actúe sobre un cierto espacio anillado $X$, y sea $f : X \to Y$ un morfismo epiyectivo de espacios anillados, de modo que, para cada punto $p \in X$, existe una sección local (morfismo de espacios anillados) de $f$ que pase por $p$. Si las órbitas de $G$ coinciden precisamente con las fibras de $f$, entonces la siguiente aplicación establece un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\begin{array}{ccc} X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ [p] & \longmapsto & \bar{f}([p]) = f(p)\,. \end{array}$$

*Demostración:* La propiedad universal del cociente (en la página 3, tras la definición 1.1.4) nos garantiza que $f$ factoriza a través de un único morfismo de espacios anillados,

$$\begin{array}{ccc} X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \\ [p] & \longmapsto & \bar{f}([p]) = f(p)\,, \end{array}$$

claramente biyectivo.

Para concluir, falta comprobar que $\bar{f}^{-1}$ es también un morfismo de espacios anillados, siendo esta una cuestión de carácter local.

Cualquier sección local $\sigma$ de $f$ induce, al proyectarla al cociente $X/G$, un morfismo de espacios anillados que es una inversa local de $\bar{f}$ y debe coincidir, por tanto, con la correspondiente restricción de $\bar{f}^{-1}$.

□

Esta proposición permite formular el siguiente corolario:

**Corolario 1.1.1.** *Si $G$ es un grupo de Lie que actúa diferenciablemente sobre una variedad diferenciable $X$, $Y$ es otra variedad diferenciable y $f : X \to Y$ es una proyección regular epiyectiva, de modo que las fibras de $f$ coincidan con las órbitas de $G$, entonces $X/G$ tiene estructura de variedad diferenciable (y es difeomorfa a $Y$).*

**Proposición 1.1.2.** *Sea $X$ un espacio anillado sobre el que actúa un grupo $G$. Si tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos,*

$$1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow G \longrightarrow H_2 \longrightarrow 1\,,$$

*entonces existe este isomorfismo de espacios anillados:*

$$\begin{array}{ccc} X/G & =\!=\!= & (X/H_1)/H_2 \\ [p] & \longmapsto & [p]\,. \end{array}$$

*Demostración:* Observemos en primer lugar que $H_2 \simeq G/H_1$ actúa en $X/H_1$, considerando que $H_1$ actúa en $G$ por la derecha:

$$\begin{array}{ccc} G/H_1 \times X/H_1 & \longrightarrow & X/H_1 \\ ([g],[p]) & \longmapsto & [g\cdot p]\,. \end{array}$$

(Esa acción está bien definida: $[g]\cdot[h_1\cdot p] = [gh_1^{-1}]\cdot[h_1 p] = [(gh_1^{-1}h_1)\cdot p] = [g\cdot p]$ ).

La propiedad universal del cociente de espacios anillados, aplicada dos veces, define un morfismo de espacios anillados trivialmente epiyectivo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & X/G & {[p]} \\ & X/H_1 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & (X/H_1)/H_2 \arrow[u, dotted] & {[p]} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} .$$

Es bien sencillo comprobar que también es inyectivo:

Sean $[p]$ ,$[q] \in (X/H_1)/H_2$, tales que $[p]=[q]$ en $X/G$, de modo que existe $g\in G$, tal que $q = g\cdot p$.

Si denotamos por $[q]_{H_1}$ la clase de equivalencia de $q$ en $X/H_1$, y mediante $[g]_{H_1}$ la clase de equivalencia de $g$ en $G/H_1$, entonces:

$$[q]_{H_1} = [g\cdot p]_{H_1} = [g]_{H_1}\cdot [p]_{H_1} = h_2\cdot [p]_{H_1}\,,$$

donde $h_2 \in H_2$ el único elemento que se corresponde con $[g]_{H_1}$, a través del isomorfismo $H_2 \simeq G/H_1$, de modo que $[q]=[p]$ en $(X/H_1)/H_2$.

La aplicación inversa,

$$\begin{array}{ccc} X/G & \longrightarrow & (X/H_1)/H_2 \\ [p] & \longmapsto & [p] \end{array} ,$$

es la factorización —de nuevo, aplicamos la propiedad universal del cociente para espacios anillados— por $X/G$ del morfismo de espacios anillados $X \longrightarrow (X/H_1)/H_2$, y es a su vez, por consiguiente, morfismo de espacios anillados.

$\square$

**Proposición 1.1.3.** *Sean $X$ e $Y$ espacios anillados, y sea $G$ un grupo de Lie que actúa por la izquierda sobre $Y$, y que también actúa por la izquierda sobre $X$, de modo transitivo. (Ambas acciones son morfismos de espacios anillados). Si denotamos el subgrupo de isotropía de un cierto elemento $p_0 \in X$ mediante $I = \{g \in G : g \cdot p_0 = p_0\}$, entonces se tiene el siguiente isomorfismo de espacios anillados cocientes:*

$$\begin{array}{ccc} (X \times Y)/G & = & Y/I \\ [(p,q)] & \longmapsto & [g^{-1} \cdot q] \, , \end{array}$$

*donde $g$ es un elemento de $G$, tal que $p = g \cdot p_0$.*

*Demostración:* La acción de $G$ sobre $X$ y sobre $Y$ induce de modo natural una acción sobre $X \times Y$: $g \cdot (p,q) := (g \cdot p, g \cdot q)$.

Por otra parte, puesto que $I$ es un subgrupo cerrado del grupo de Lie $G$, $I$ también es grupo de Lie. (Véase el Teorema 2.3, pág. 115, de [19]). Por restricción de la acción de $G$, $I$ actúa por la izquierda sobre la variedad $Y$ como morfismo de espacios anillados.

La propiedad universal del cociente (pág. 3) afirma entonces que tanto $(X \times Y)/G$ como $Y/I$ son espacios anillados (cocientes de $X \times Y$ e $Y$, respectivamente).

Llamemos $\varphi$ a la aplicación dada en el enunciado y $\psi$ a su inversa, que es como sigue:

$$[q] \longmapsto [(p_0, q)] \, .$$

La aplicación $\varphi$ está bien definida, puesto que, si existe $\bar{g} \in G$, tal que

$$(p_2, q_2) = \bar{g} \cdot (p_1, q_1) = (\bar{g} \cdot p_1, \bar{g} \cdot q_1) \, ,$$

con $p_1 = g_1 \cdot p_0$ y $p_2 = g_2 \cdot p_0$, entonces $h = g_2^{-1} \bar{g} g_1$ es un elemento de $I$:

$$h \cdot p_0 = (g_2^{-1} \bar{g} g_1) \cdot p_0 = (g_2^{-1} \bar{g}) \cdot p_1 = g_2^{-1} \cdot p_2 = g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot p_0) = (g_2^{-1} g_2) \cdot p_0 = p_0 \, ;$$

y se verifica:

$$g_2^{-1} \cdot q_2 = g_2^{-1} \cdot (\bar{g} \cdot q_1) = (g_2^{-1} \bar{g} g_1) \cdot (g_1^{-1} \cdot q_1) = (h g_1^{-1}) \cdot q_1 \, .$$

Por su parte, la aplicación $\psi$ también está bien definida, ya que, dados $q_1, q_2 \in Y$ y $h \in I$, tales que $q_2 = h \cdot q_1$, entonces el propio $h$ es el elemento de $G$ que verifica lo siguiente:

$$h \cdot (p_0, q_1) = (h \cdot p_0, h \cdot q_1) = (p_0, q_2) \, .$$

Tanto $\varphi$ como $\psi$ son morfismos de espacios anillados. Veámoslo:

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & Y/I \\ (p,q) & \longmapsto & [g^{-1} \cdot q] \end{array}$$

es un morfismo de espacios anillados que es constante sobre las órbitas de $G$, como puede comprobarse trivialmente, e induce por tanto —por la propiedad universal del cociente de espacios anillados— un morfismo de espacios anillados, que es justamente el morfismo $\varphi$.

La aplicación $\phi$ es morfismo de espacios anillados como composición de los morfismos

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (p,q) & \longmapsto & g^{-1} \cdot q \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y/I \\ q & \longmapsto & [q] \end{array} .$$

El segundo es morfismo de espacios anillados, pues es una aplicación de paso al cociente. El primero también es morfismo de espacios anillados, ya que las aplicaciones «órbita»,

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Y \\ g & \longmapsto & g \cdot q \, , \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & X \\ g & \longmapsto & g \cdot p_0 \, , \end{array}$$

lo son, y también lo es la aplicación de tomar inverso en el grupo $G$:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} . \end{array}$$

Análogamente, $\psi$ es el morfismo de espacios anillados inducido, gracias a la propiedad universal del cociente, por el siguiente morfismo de espacios anillados constante sobre las órbitas de $I$:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & (X \times Y)/G \\ q & \longmapsto & [(p_0, q)] \, . \end{array}$$

Para acabar, es bien sencillo comprobar que $\varphi$ y $\psi$ son aplicaciones inversas la una de la otra:

$$\varphi(\psi([q])) = \varphi([(p_0, q)]) = [1 \cdot q] = [q] \, ,$$

$$\psi(\varphi([(p,q)]) \overset{p=g\cdot p_0}{=} \psi([g^{-1} \cdot q]) = [(p_0, g^{-1} \cdot q)] = [(g \cdot p_0, (gg^{-1}) \cdot q)] = [(p,q)] \, .$$

□

### 1.1.2. Espacios diferenciables

Vamos a introducir una estructura más general que la de variedad diferenciable: la de espacio diferenciable (como referencia, puede consultarse [28]).

Antes de dar la definición, recordemos que todo cerrado $Z \subset \mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio anillado, como ya dijimos en el ejemplo 5 de la página 3.

**Definición 1.1.5.** *Un* ***espacio diferenciable*** *(reducido) es un espacio anillado en el que cada punto admite un entorno abierto isomorfo como espacio anillado a un cierto subespacio cerrado* $(Z, \mathcal{C}^\infty_Z)$ *de algún* $\mathbb{R}^n$.

*Una aplicación entre espacios diferenciables se llama* ***diferenciable*** *si es un morfismo de espacios anillados.*

**Ejemplos:**

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})$ es un espacio diferenciable.

2. Cualquier variedad diferenciable es un espacio diferenciable.

3. Todo subespacio (localmente) cerrado de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}^n})$ (con su estructura natural de espacio anillado) es un espacio diferenciable.

Otro de los ejemplos más importantes y más útiles de espacios diferenciables es proporcionado por el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.2 (Schwarz).** *Sea $G \to \mathrm{Gl}(V)$ una representación lineal diferenciable de dimensión finita de un grupo de Lie compacto $G$. En estas condiciones, el espacio anillado cociente $V/G$ es un espacio diferenciable.*

*Demostración:* Puede verse en [28, Teorema 11.14, pág. 140].

□

El Teorema de finitud de Hilbert ([28, pág. 139]) asegura la existencia de un sistema finito de generadores de la $\mathbb{R}-$álgebra de polinomios $G-$invariantes sobre $V$.

Si $p_1, \ldots, p_k$ es un sistema tal, entonces podemos definir un isomorfismo de espacios anillados:

$$(p_1, \ldots, p_k) \,:\, V/G =\!=\!= Z \subseteq \mathbb{R}^k\,,$$

donde $Z$ es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^k$.

En relación con lo anterior, y más generalmente, el cociente $X/G$ por la acción diferenciable de un grupo de Lie compacto $G$ sobre una variedad diferenciable $X$ es un espacio diferenciable. ([28, Teorema 11.17, pág. 141]).

## 1.2. Fibrados naturales

Para la revisión de la definición de fibrado (diferenciable) sobre una variedad diferenciable, pueden consultarse [15] o [22].

En esta sección presentaremos la definición de un tipo especial de fibrados, los fibrados naturales, que serán, usando un lenguaje sugerente y poco riguroso, aquellos que pueden definirse universalmente sobre cualquier variedad diferenciable para una dimensión fija.

La definición que proponemos no es la habitual —que puede encontrarse en [21]—, pero es equivalente a ella, como se expone en [27].

En lo que sigue, salvo que se diga otra cosa, $X$ será una variedad diferenciable de dimensión constante $n$. Llamaremos *difeomorfismo de $X$* a cualquier difeomorfismo local $\tau : U \to V$ entre dos abiertos de $X$. Para denotar el conjunto de los difeomorfismos de $X$ usaremos $\mathrm{Dif}\, X$.

**Definición 1.2.1.** *Sea $\pi : F \to X$ un fibrado y sea $\tau : U \to V$ un difeomorfismo de $X$. Una **subida de $\tau$ a $F$** es cualquier difeomorfismo $\tau_* : F_{|U} \to F_{|V}$ que haga conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} F_{|U} \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\pi"] & F_{|V} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "\tau"'] & V, \end{tikzcd}$$

*donde estamos denotando por $F_{|_U}$ justamente lo que el fibrado $F$ «tiene por encima de» $U$, es decir: $F_{|_U} := \pi^{-1}(U)$.*

Es muy frecuente —y así lo haremos también en esta memoria— abusar del lenguaje y hablar del fibrado $F$ sobre $X$, sin hacer referencia explícita a la aplicación $\pi : F \to X$, siempre que no haya dudas sobre cuál sea esta.

**Definición 1.2.2.** *Un **fibrado natural sobre** $X$ es un fibrado $\pi : F \to X$ junto con una subida de difeomorfismos, es decir, una aplicación que asigna a cada difeomorfismo de $X$ una subida a $F$,*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}\, X & \xrightarrow{\ *\ } & \mathrm{Dif}\, F \\ \tau & \longmapsto & \tau_* \,, \end{array}$$

*que cumpla las condiciones siguientes de funtorialidad, carácter local y regularidad (o dependencia diferenciable de los parámetros), es decir:*

*(i) Funtorialidad: respeta composiciones ($(\tau \circ \tau')_* = \tau_* \circ \tau'_*$), siempre que estas tengan sentido, y hace corresponder la identidad a la identidad, $\mathrm{Id}_* = \mathrm{Id}$.*

*(ii) Carácter local: para cualquier difeomorfismo de $X$, $\tau : U \to V$, y su restricción a ciertos abiertos,*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ \tau\ } & V \\ \cup & & \cup \\ U' & \xrightarrow{\ \tau'\ } & V', \end{array}$$

*se verifica $\tau'_* = \tau_{*|_{F_{|_{U'}}}}$.*

*(iii) Dependencia diferenciable de los parámetros: si $\{\tau_t : U_t \to V_t\}_{t\in T}$ es una familia diferenciable de difeomorfismos de $X$ parametrizada[2] por una cierta variedad $T$, entonces $\{\tau_{t*} : F_{|_{U_t}} \to F_{|_{V_t}}\}_{t\in T}$ es una familia diferenciable de difeomorfismos de $F$.*

En [10] puede verse que la tercera condición relativa a la dependencia diferenciable de los parámetros puede omitirse, ya que se obtiene de las dos primeras condiciones exigidas en la definición de fibrado natural. Se preserva aquí como una de las tres condiciones de la definición, por su utilidad para demostrar que un determinado fibrado no puede ser dotado de estructura natural, como podrá verse en el ejemplo 4 de la página 10.

Es importante observar que las fibras de un fibrado natural $\pi : F \to X$ son todas difeomorfas entre sí. Efectivamente, si denotamos por $F_p (= \pi^{-1}(p))$ y $F_q$ las fibras de los puntos $p$ y $q$, respectivamente, entonces, dado un difeomorfismo $\varphi : U \to V$ entre sendos

[2] Con precisión, una familia $\{\tau_t : U_t \to V_t\}_{t\in T}$ de difeomorfismos locales de $X$, parametrizada por una cierta variedad diferenciable $T$, es diferenciable si verifica las siguientes condiciones:

(a) los conjuntos $U := \amalg_{t\in T} U_t$ y $V := \amalg_{t\in T} V_t$ son abiertos de $X \times T$;

(b) la aplicación $\tau : U \to V$, $(p,t) \mapsto \tau(p,t) := \tau_t(p)$, es diferenciable.

entornos abiertos de $p$ y $q$, su subida $\varphi_* : F_{|U} \to F_{|V}$ establece, mediante restricción, el difeomorfismo $\varphi_* : F_p \to F_q$ entre las fibras buscado.

**Ejemplos:**

1. Dada una variedad diferenciable $\Phi$, el **fibrado natural trivial de fibra** $\Phi$ sobre $X$, consiste en la proyección en el primer factor $\pi_X : F = X \times \Phi \to X$, junto con la siguiente subida de difeomorfismos: dado un difeomorfismo $\tau : U \to V$ de $X$, su subida es el difeomorfismo

$$\tau_* : F_{|U} = U \times \Phi \longrightarrow F_{|V} = V \times \Phi\,,$$

   donde $\tau_*(p, \phi) = (\tau(p), \mathrm{Id}_\Phi(\phi)) = (\tau(p), \phi)$.

   Es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones de funtorialidad y de localidad que impusimos a la subida de difeomorfismos en la definición 1.2.2 de fibrado natural.

2. El **fibrado tangente de** $X$ es un fibrado natural. La subida de un difeomorfismo $\tau : U \to V$ será:

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\tau_*} & TV \\ D_p & \longmapsto & \tau_{*,p}(D_p)\,, \end{array}$$

   donde $\tau_{*,p}$ designa la aplicación lineal tangente de $\tau$ en el punto $p$.

   De nuevo, la comprobación de la funtorialidad y del carácter local de esta subida de difeomorfismos es rutinaria.

3. También es un fibrado natural el **fibrado cotangente de** $X$. La subida de un difeomorfismo $\tau : U \to V$ es como sigue:

$$\begin{array}{ccc} T^*U & \xrightarrow{\tau_*} & T^*V \\ \omega_p & \longmapsto & (\tau^t_{*,p})^{-1}(\omega_p)\,, \end{array}$$

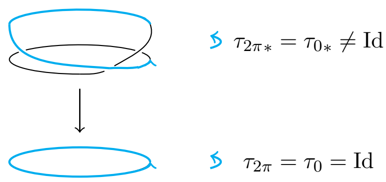
   donde con $(\tau^t_{*,p})^{-1}$ estamos denotando la inversa de la aplicación lineal cotangente de $\tau$.

4. Veamos un sencillo ejemplo de fibrado que no puede ser dotado de estructura de fibrado natural. Basta considerar la circunferencia unidad $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ como fibrado sobre sí misma:

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ z & \longmapsto & z^2\,. \end{array}$$

   Como dar una vuelta completa en la circunferencia de la base del fibrado supone dar solo media vuelta en la circunferencia de arriba, resulta que, para la familia de difeomorfismos de $S_1$ parametrizada por $\theta$, $\{\tau_\theta : S_1 \longrightarrow S_1\}_{\theta\in[0,2\pi)}$, donde cada $\tau_\theta$ es el giro de ángulo $\theta$, no hay subida diferenciable de la familia que además respete que la aplicación identidad suba a la identidad.

(El giro $\tau_{2\pi} = \tau_0$ es la identidad en la base y, sin embargo, $\tau_{2\pi *}$ no es la identidad en la circunferencia de «arriba»).




5. Dado un fibrado natural $\pi : F \to X$ y dado un entero $r \geq 0$, el **fibrado de *jets* de orden $r$ de secciones**[3] **(locales) de** $F$,

$$\begin{array}{ccc} J^r F & \xrightarrow{\bar{\pi}} & X \\ j^r_p \sigma & \longmapsto & \bar{\pi}(j^r_p \sigma) = p \,, \end{array}$$

es otro fibrado natural.

(Como referencias para el concepto de fibrado de *jets* de secciones, sirvan [15] y [31]).

Dado un difeomorfismo de $X$, $\tau : U \to V$, seguimos denotando por $\tau_*$ su subida al fibrado $F$. La subida $J\tau_*$ de $\tau$ a $J^r F$ será la obvia:

$$\begin{array}{ccc} J^r F_{|U} & \xrightarrow{J\tau_*} & J^r F_{|V} \\ j^r_p \sigma & \longmapsto & J\tau_*(j^r_p \sigma) = j^r_{\tau(p)}(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1}) \,. \end{array}$$

Es elemental comprobar que tal subida es de carácter local y funtorial.

**Definición 1.2.3.** *Dados dos fibrados naturales sobre* $X$, $\pi : F \to X$, $\bar{\pi} : \bar{F} \to X$, *un* ***morfismo*** *de fibrados* $\varphi : F \to \bar{F}$ *(es decir,* $\bar{\pi} \circ \varphi = \pi$ *) se dice* ***natural*** *si, dado cualquier difeomorfismo de* $X$, $\tau : U \to V$, *el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} F_{|U} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{F}_{|U} \\ {\scriptstyle \tau_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_*} \\ F_{|V} & \xrightarrow[\varphi]{} & \bar{F}_{|V} \end{array}$$

(No distinguimos en la notación la subida de $\tau$ al fibrado $\pi : F \to X$ del difeomorfismo subido al fibrado $\bar{\pi} : \bar{F} \to X$, representando ambos como $\tau_*$).

Dado $p \in X$, denotaremos $\mathrm{Dif}_p$ el grupo de gérmenes de difeomorfismos locales (entre entornos abiertos de $p$) que dejan fijo $p$,

$$\mathrm{Dif}_p = \{\text{gérmenes de difeomorfismos } \tau : U \to V \,,\, \tau(p) = p\} \,.$$

[3] Siempre consideraremos diferenciables las secciones de un fibrado.

El hecho de que un fibrado natural tenga una subida de difeomorfismos (definición 1.2.2) que, en particular, es funtorial permite definir una acción del grupo $\mathrm{Dif}_p$ sobre la fibra $F_p$ de un fibrado natural $F \to X$ del siguiente modo: $\tau \cdot x = \tau_*(x)$, para cada $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ y cada $x \in F_p$ —y denotando $\tau_*$ de nuevo la subida de $\tau$ al fibrado $F$—.

Sea $\mathrm{Dif}_p^r$ el grupo de los $r-$*jets* de difeomorfismos locales de $X$ que dejan $p$ fijo.

Si en cierto entorno de $p$ tomamos un sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$, de modo que $x_i(p) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, entonces un elemento $\bar{\tau} \in \mathrm{Dif}_p^r$ viene dado por $n$ *jets* de funciones:

$$\bar{\tau}(x_1, \dots, x_n) = (\bar{f}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \bar{f}_n(x_1, \dots, x_n)),$$

donde cada $\bar{f}_i$ es una serie formal hasta el orden $r$:

$$\bar{f}_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0<|\alpha|\le r} \lambda_{i,\alpha} x^\alpha$$

(con la notación habitual: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ ).

(Nótese que los $\lambda_{i,\alpha}$ pueden tomarse como coordenadas sobre $\mathrm{Dif}_p^r$, que adquiere así estructura diferenciable, y es un grupo de Lie).

La condición de que $\bar{\tau}$ sea un germen de difeomorfismo equivale a que la parte lineal del desarrollo de $\bar{\tau}$ sea un isomorfismo lineal; es decir, a que la matriz $(\lambda_{i,j})$ sea invertible. Observemos, por tanto, que $\mathrm{Dif}_p^1$ se identifica canónicamente con $\mathrm{Gl}_n(T_pX)$.

De modo natural, si $s \le r$ y para cada $r-$*jet* en $p$ de difeomorfismos nos quedamos solo con su parte hasta orden $s$, obtenemos el siguiente morfismo de grupos epiyectivo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}_p^r & \xrightarrow{\pi_{rs}} & \mathrm{Dif}_p^s \\ j_p^r\tau & \longmapsto & j_p^s\tau \, . \end{array}$$

**Definición 1.2.4.** *Dados $p \in X$ y un entero $r \ge 1$, $\mathrm{NDif}_p^r$ es el siguiente subgrupo de $\mathrm{Dif}_p^r$:*

$$\mathrm{NDif}_p^r := \{j_p^r\tau \in \mathrm{Dif}_p^r : j_p^1\tau = j_p^1\mathrm{Id}\}.$$

La siguiente es una sucesión exacta de grupos de Lie:

$$1 \longrightarrow \mathrm{NDif}_p^r \hookrightarrow \mathrm{Dif}_p^r \xrightarrow{\pi_{r1}} \mathrm{Dif}_p^1 \longrightarrow 1 \, . \tag{1.1}$$

Por otra parte, si asignamos a cada germen de difeomorfismo su correspondiente $r-$*jet* en $p$, tenemos el siguiente epimorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}_p & \longrightarrow & \mathrm{Dif}_p^r \\ \tau & \longmapsto & \bar{\tau} = j_p^r\tau \, , \end{array}$$

de modo que esta es también una sucesión exacta de grupos:

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_p^r \hookrightarrow \mathrm{Dif}_p \longrightarrow \mathrm{Dif}_p^r \longrightarrow 1 \, , \tag{1.2}$$

donde $\mathrm{H}_p^r = \{\tau \in \mathrm{Dif}_p : j_p^r\tau = j_p^r\mathrm{Id}\}$.

**Definición 1.2.5.** *Dado un entero $r \geq 0$, diremos que un fibrado natural $F \to X$ es* ***de orden (menor o igual que)*** *$r$ si todo elemento de $\mathrm{H}_p^r$ opera por la identidad sobre la fibra $F_p$ de $F$ sobre el punto $p$.*

Esta noción es totalmente independiente del punto $p \in X$ escogido. Además, dado un fibrado natural $F \to X$ de orden $r$, si consideramos el cociente $\mathrm{Dif}_p^r = \mathrm{Dif}_p / \mathrm{H}_p^r$ (de acuerdo con la sucesión exacta 1.2), resulta que la acción de $\mathrm{Dif}_p$ sobre la fibra $F_p$ factoriza a través de una acción de $\mathrm{Dif}_p^r$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}_p^r \times F_p & \longrightarrow & F_p \\ (\bar{\tau}, x) & \longmapsto & \bar{\tau} \cdot x := \tau_*(x) \,. \end{array}$$

En [29] se demuestra que el orden de todo fibrado natural $F \to X$ tiene como cota superior la cantidad $2^{\dim F_p + 1}$ (con $p \in X$). Una mejora en la acotación del orden de un fibrado natural, concretamente a $2 \dim F_p + 1$, puede encontrarse en [10].

Es decir, todo fibrado natural es de orden finito, y la acción natural sobre la fibra $F_p$ es justamente la que se deriva de la definición 1.2.5.

**Ejemplos:**

1. El fibrado natural trivial sobre $X$ de fibra $\Phi$ es un fibrado de orden 0, pues todo el grupo $\mathrm{Dif}_p$ actúa por la identidad sobre la fibra del punto $p \in X$.

2. Cualquier fibrado tensorial es de orden 1.

   Si consideramos un fibrado

   $$T^*X \otimes \overset{\lambda}{\cdots} \otimes T^*X \otimes TX \otimes \overset{\mu}{\cdots} TX \to X$$

   sobre $X$ (cuyas secciones globales son tensores de tipo $(\lambda, \mu)$ sobre $X$), un difeomorfismo local $\tau$ que deje fijo $p \in X$ actúa del siguiente modo:

   $$(\tau \cdot T)(D_1, \ldots, D_\lambda, \omega_1, \ldots, \omega_\mu) = T(\tau_* D_1, \ldots, \tau_* D_\lambda, (\tau_*^t)^{-1}\omega_1, \ldots, (\tau_*^t)^{-1}\omega_\mu) \,,$$

   expresión en la que solo importa conocer el jacobiano de $\tau$, es decir, precisamente hasta el orden 1 en su desarrollo de Taylor.

   En particular, cualquier subfibrado natural de un fibrado tensorial será de orden 1.

3. Si $F \to X$ es un fibrado natural de orden $s$, entonces $J^r F \to X$ es un fibrado natural de orden $r + s$. Veamos por qué:

   Fijado un punto $p \in X$, y dado $\tau \in \mathrm{Dif}_p$, puesto que $F$ es de orden $s$, para determinar $\tau_*(x)$, con $x \in F_p$, solamente necesitamos conocer $j_p^s \tau$.

   La subida de $\tau$ al fibrado de *jets* de secciones de $F$ se define, como ya vimos anteriormente, del siguiente modo:

   $$\begin{array}{ccc} J_p^r F & \xrightarrow{J\tau_*} & J_p^r F \\ j_p^r \sigma & \longmapsto & J\tau_*(j_p^r \sigma) = j_p^r(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1}) \,. \end{array}$$

Ya sabemos que $\tau_*$ solo depende de $j^s_p\tau$ ; como de la sección $\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ solo hemos de quedarnos con el *jet* de orden $r$ , de lo anterior se deduce que, si consideramos otro $\tau' \in \mathrm{Dif}_p$ , tal que $j^{r+s}_p\tau = j^{r+s}_p\tau'$ , entonces $J\tau_*(j^r_p\sigma) = J\tau'_*(j^r_p\sigma)$ , para cualquier $j^r_p\sigma \in J^r_pF$ , lo que demuestra la afirmación con la que iniciamos este ejemplo.

Aunque no lo usaremos en esta memoria, en [15, págs. 30 y ss.] puede verse la demostración del siguiente resultado *à la Galois* (teorema 5.10 *ibidem*), que proporciona una equivalencia categorial entre fibrados naturales de orden $r$ y variedades diferenciables sobre las que actúa un cierto grupo de Lie:

> *Sea $X$ una variedad de dimensión constante $n$ , y sea $\tilde{G}_r$ el grupo estructural de su fibrado de referencias $r-$ésimas. La categoría de fibrados naturales de orden $r$ sobre $X$ es equivalente a la categoría de $\tilde{G}_r-$variedades.*

## 1.3. Espacios de clases de equivalencia de *jets* en un punto

**Definición 1.3.1.** *Sean $F$ un fibrado natural de orden $s$ sobre $X$ , $J^rF \to X$ el fibrado de jets de orden $r$ de secciones de $F$ y $p \in X$ . Diremos que dos $r-$jets $j^r_p\sigma$ , $j^r_p\bar{\sigma} \in J^r_pF$ son* ***equivalentes*** *si existe $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ , tal que:*

$$j^r_p\bar{\sigma} = \tau \cdot j^r_p\sigma = (J\tau_*)(j^r_p\sigma) = j^r_p(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1})\,.$$

Por lo visto anteriormente, y puesto que $J^rF$ es un fibrado natural de orden $r+s$ , ya sabemos que la acción de $\mathrm{Dif}_p$ sobre $J^r_pF$ factoriza a través de una acción de $\mathrm{Dif}^{r+s}_p$ . Por eso —y por la definición 1.1.4 de espacio anillado cociente— tiene pleno sentido la siguiente definición:

**Definición 1.3.2.** *Llamaremos* ***espacio de clases (de equivalencia) de $r-$jets en un punto*** *$p \in X$* ***de secciones del fibrado natural de orden*** *$s$ , $F \to X$ (con $\dim X = n$ ), al siguiente espacio anillado cociente:*

$$\mathsf{F}^r_n := J^r_pF/\mathrm{Dif}_p = J^r_pF/\mathrm{Dif}^{r+s}_p\,.$$

Obsérvese que no es necesario introducir el punto $p \in X$ en la notación del espacio de clases de equivalencia $\mathsf{F}^r_n$ . Esto sucede porque en realidad nuestra definición no depende del punto escogido para darla.

De hecho, si consideramos dos puntos distintos $p, q \in X$ , cualquier difeomorfismo entre sendos entornos abiertos, $\varphi : U_p \to U_q$ , tal que $\varphi(p) = q$ , produce un isomorfismo de espacios anillados entre los espacios de clases respectivos en cada punto:

$$\begin{array}{ccl} J^r_pF/\mathrm{Dif}_p & \xrightarrow{\psi} & J^r_qF/\mathrm{Dif}_q \\ [j^r_p\sigma] & \longmapsto & \psi([j^r_p\sigma]) = [j^r_q(\varphi_* \circ \sigma \circ \varphi^{-1})]\,. \end{array}$$

Es más, ambos espacios de clases se identifican canónicamente, pues el isomorfismo $\psi$ no depende del difeomorfismo $\varphi$ escogido. En efecto, si $\bar{\varphi}$ es otro difeomorfismo local entre entornos abiertos de $p$ y $q$ (que obviamente podemos suponer que son los mismos entornos $U_p$ y $U_q$ de antes), tal que $\bar{\varphi}(p) = q$, entonces $\varphi$ y $\bar{\varphi}$ se diferencian en un difeomorfismo $\tau$ que deja el punto $p$ fijo; concretamente,

$$\bar{\varphi} = \tau \circ \varphi ,$$

con $\tau = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Dif}_q$, de modo que tenemos:

$$j^r_q(\bar{\varphi}_* \circ \sigma \circ \bar{\varphi}^{-1}) = j^r_q(\tau_* \circ \varphi_* \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \tau^{-1}) = \tau \cdot j^r_q(\varphi_* \circ \sigma \circ \varphi^{-1}) ;$$

es decir, $[j^r_q(\bar{\varphi}_* \circ \sigma \circ \bar{\varphi}^{-1})] = [j^r_q(\varphi_* \circ \sigma \circ \varphi^{-1})]$, y por tanto obtenemos el mismo isomorfismo de espacios anillados a partir de $\varphi$ que a partir de $\bar{\varphi}$.

Igualmente, debe observarse que el espacio de clases de equivalencia es el mismo para cualquier variedad diferenciable $X$ de la misma dimensión $n$, puesto que la definición es puramente local.

**Definición 1.3.3.** *Dado un fibrado natural $F \to X$ y dado un entero $r \geq 0$, un* ***invariante diferencial (escalar) de orden menor o igual que*** *$r$ de las secciones de $F$ es una función (real) global diferenciable sobre el espacio de clases $\mathsf{F}^r_n$.*

Dado un fibrado natural $F \to X$ y dado el morfismo canónico de paso al cociente $\pi : J^r_p F \to \mathsf{F}^r_n = J^r_p F/\mathrm{Dif}_p$, recordemos (definición 1.1.4) que cualquier función definida sobre un abierto $U \subseteq \mathsf{F}^r_n$ es «diferenciable» si $f \circ \pi$ es una función diferenciable sobre $\pi^{-1}(U)$, esto es,

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \mathcal{C}^\infty(\pi^{-1}(U))^{\mathrm{Dif}_p} .$$

Debido a esta estructura de espacio anillado cociente de $\mathsf{F}^r_n$, se tiene la siguiente identificación:

$$\{\text{Invariantes diferenciales de orden menor o igual que } r\} = \mathcal{C}^\infty(\mathsf{F}^r_n) = \mathcal{C}^\infty(J^r_p F)^{\mathrm{Dif}_p} .$$

**Ejemplo (Espacios de clases de equivalencia de orden $0$ y de orden $1$ del fibrado trivial):**

Consideremos el fibrado trivial de fibra $\mathbb{R}$ sobre $X$:

$$F = X \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_X} X \ , \ (p, \lambda) \longmapsto p .$$

Las secciones de este fibrado sobre un entorno abierto $U_p$ de $p \in X$ se corresponden biunívocamente con las funciones diferenciables reales sobre dicho abierto:

$$\begin{array}{ccc} U_p & \xrightarrow{\sigma} & U_p \times \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \sigma(q) = (q, f(q)) . \end{array}$$

Ya sabemos que este es un fibrado de orden 0 cuya subida de difeomorfismos es, para cada difeomorfismo local $\tau$ :

$$\tau_*(q, \lambda) = (\tau(q), \lambda)\,.$$

La acción de $\mathrm{Dif}_p$ sobre $J^r_p F$ sigue la definición general: $\tau \cdot j^r_p \sigma = j^r_p(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1})$, para $\tau : U_p \to U_p$ difeomorfismo local, tal que $\tau(p) = p$; en este fibrado concreto, según lo expuesto, la sección $\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ tiene el siguiente aspecto (para $q \in U_p$):

$$(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1})(q) = \tau_*(\tau^{-1}(q), f(\tau^{-1}(q))) = (\tau(\tau^{-1}(q)), f(\tau^{-1}(q))) = (q, f(\tau^{-1}(q))\,.$$

De modo que dos *jets* de secciones locales de $F$, o equivalentemente, dos *jets* de funciones reales diferenciables, $j^r_p f$, $j^r_p f'$, son equivalentes si existe $\tau \in \mathrm{Dif}_p$, tal que

$$j^r_p f' = j^r_p(f \circ \tau^{-1})\,.$$

El espacio de clases de equivalencia de *jets* de orden 0 de secciones de $F$ es, según la definición 1.3.2, $\mathsf{F}^0_n = J^0_p F/\mathrm{Dif}^0_p$, siendo $\mathrm{Dif}^0_p$ el grupo de los $0-$*jets* de difeomorfismos locales que dejan $p$ fijo, es decir, $\mathrm{Dif}^0_p = 1$.

Por tanto, dos *jets* de orden 0 de funciones reales diferenciables son equivalentes si, y solo si, son justamente el mismo. Es decir, tenemos:

$$\mathsf{F}^0_n = J^0_p F/\mathrm{Dif}^0_p \simeq J^0_p F \simeq F_p = \{p\} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}\,.$$

En cuanto al espacio de orden 1, cada elemento $j^1_p \tau \in \mathrm{Dif}^1_p$ viene determinado exclusivamente por el jacobiano de $\tau$, que es invertible, pues $\tau$ es un difeomorfismo local; es decir, $\mathrm{Dif}^1_p$ se identifica con el grupo lineal $\mathrm{Gl}_n$.

Por otra parte, el $1-$*jet* de una sección $\sigma$ de $F$ (recordemos que dar una sección local del fibrado trivial $F$ se corresponde con dar una función real diferenciable $f$) quedará determinado si conocemos el valor de $f$ en $p$ y la diferencial de $f$ en $p$.

Así pues, como $\mathrm{Gl}_n$ opera de modo transitivo sobre los elementos no nulos de $T^*_p X$, se verifica que $\mathsf{F}^1_n$ se identifica con dos copias disjuntas de $\mathbb{R}$:

$$\mathsf{F}^1_n = J^1_p F/\mathrm{Dif}^1_p \simeq (\mathbb{R} \times T^*_p X)/\mathrm{Gl}_n \simeq \mathbb{R} \times (T^*_p X/\mathrm{Gl}_n) \simeq \mathbb{R} \times \{0, 1\}\,.$$

A continuación presentaremos las definiciones de los dos ejemplos de espacios de clases de equivalencia de *jets* a cuyo estudio dedicaremos el resto de esta memoria.

### Espacio de clases de *jets* de conexiones lineales

**Definición 1.3.4.** *Una* ***conexión lineal en un punto*** $p \in X$ *es una aplicación*

$$\begin{array}{ccc} T_p X \times J^1_p TX & \xrightarrow{\nabla_p} & T_p X \\ (D_p, j^1_p \widehat{D}) & \longmapsto & \nabla_p(D_p, j^1_p \widehat{D}) \overset{notación}{=} \nabla_{D_p} \widehat{D}\,, \end{array}$$

*que verifica las siguientes propiedades:*

*(a)* $\nabla_{D_p}(\widehat{D}+\widetilde{D}) = \nabla_{D_p}\widehat{D} + \nabla_{D_p}\widetilde{D}$ *;*

*(b)* $\nabla_{D_p+D'_p}\widehat{D} = \nabla_{D_p}\widehat{D} + \nabla_{D'_p}\widehat{D}$ *;*

*(c)* $\nabla_{\lambda D_p}\widehat{D} = \lambda(\nabla_{D_p}\widehat{D})$ *;*

*(d)* $\nabla_{D_p}(f\widehat{D}) = (D_p f)\widehat{D}_p + f(p)\nabla_{D_p}\widehat{D}$ *.*

Puede darse ahora la siguiente definición de fibrado de conexiones:

**Definición 1.3.5.** *El* ***fibrado de conexiones lineales sobre*** $X$ *es el fibrado* $\mathrm{Con} \to X$ *cuya fibra sobre cualquier* $p \in X$ *es el conjunto de las conexiones en dicho punto.*

(Las secciones diferenciables del fibrado $\mathrm{Con} \to X$ se corresponderán justamente con las conexiones lineales sobre $X$ ).

Dado un abierto coordenado $U; x_1, \ldots, x_n$ en $X$ , sobre $\mathrm{Con}_{|U}$ tenemos las siguientes coordenadas:

$$x_h(\nabla_p) := x_h(p) \qquad (h \in \{1, \ldots, n\}) ,$$

$$\Gamma^k_{ij}(\nabla_p) := dx_k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) \quad (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}) .$$

De la definición 1.3.4 de conexión en un punto, se sigue que el fibrado de conexiones es un fibrado natural de orden $2$ , ya que $TX$ es de orden $1$ y $J^1TX$ , por tanto, de orden $2$ .

Si consideramos $J^r\mathrm{Con} \to X$ el fibrado de *jets* de orden $r$ de conexiones lineales sobre $X$ , tenemos la siguiente acción del grupo $\mathrm{Dif}_p$ sobre la fibra $J^r_p\mathrm{Con}$ : si $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ y $j^r_p\nabla \in J^r_p\mathrm{Con}$ , entonces $\tau \cdot j^r_p\nabla$ es el $r-$*jet* en $p$ de la conexión lineal $\tau \cdot \nabla$ , definida así:

$$(\tau \cdot \nabla)_D\widetilde{D} := \tau_*^{-1}(\nabla_{\tau_* D}(\tau_*\widetilde{D})) .$$

Unas coordenadas locales $x_1, \ldots, x_n$ en un entorno de $p \in X$ inducen a su vez un sistema de coordenadas locales sobre $J^r_p\mathrm{Con}$ :

$$x_h(j^r_p\nabla) := x_h(p) \qquad (h \in \{1, \ldots, n\}) ,$$

$$\Gamma^k_{ij}(j^r_p\nabla) := dx_k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) \quad (i, j, k \in \{1, \ldots, n\}) ,$$

$$\vdots$$

$$\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}(j^r_p\nabla) := \frac{\partial^r\Gamma^k_{ij}}{\partial x_{a_1}\ldots\partial x_{a_r}}(p) \quad (i, j, k, a_1, \ldots, a_r \in \{1, \ldots, n\}) .$$

**Observación:** Dados dos sistemas de coordenadas en un entorno de $p \in X$ , $x_1, \ldots, x_n$ y $x'_1, \ldots, x'_n$ , y dados los respectivos sistemas de coordenadas inducidos en $J^r_p\mathrm{Con}$ ,

$\Gamma_{ij}^k, \ldots, \Gamma_{ij;a_1\ldots a_r}^k$ y ${\Gamma'}_{ij}^k, \ldots, {\Gamma'}_{ij;a_1\ldots a_r}^k$, si $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ es tal que $\tau^* x'_i = x_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces se cumple:

$$\tau^* {\Gamma'}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, \ldots, \tau^* {\Gamma'}_{ij;a_1\ldots a_r}^k = \Gamma_{ij;a_1\ldots a_r}^k .$$

Puesto que $J^r\mathrm{Con}$ es de orden $r+2$, la acción de $\mathrm{Dif}_p$ factoriza a través de una acción de $\mathrm{Dif}_p^{r+2}$, de modo que podemos definir el espacio de clases de *jets* de conexiones lineales en $p$ como sigue:

**Definición 1.3.6.** *Llamamos* ***espacio de clases (de equivalencia) de jets de orden*** $r$ ***en un punto de conexiones lineales*** *a este espacio anillado cociente:*

$$\mathsf{C}_n^r := J_p^r\mathrm{Con}/\mathrm{Dif}_p^{r+2} .$$

De idéntica manera que hemos definido el espacio de clases de *jets* de conexiones lineales, podemos definir el espacio de clases de *jets* del subfibrado de conexiones simétricas, y lo denotaremos $\widetilde{\mathsf{C}}_n^r$:

$$\widetilde{\mathsf{C}}_n^r := J_p^r\widetilde{\mathrm{Con}}/\mathrm{Dif}_p^{r+2} .$$

**Ejemplos (Espacio de clases de *jets* en un punto de conexiones lineales en dimensión 1, y espacio de clases de *jets* en un punto de conexiones lineales simétricas de orden 0):**

1. Cualquier conexión lineal sobre una variedad diferenciable de dimensión $1$ es localmente isomorfa a la conexión estándar plana sobre $\mathbb{R}$.

   En efecto, una conexión lineal $\nabla$ sobre una variedad de dimensión $n$ es localmente euclidiana si, y solo si, se anulan sus tensores de torsión y curvatura. Este es precisamente el caso cuando consideramos una variedad de dimensión $1$, puesto que ambos tensores tienen dos índices hemisimétricos.

   Por tanto, cualquier espacio $\mathsf{C}_1^r$ se reduce a un único punto, para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Si tenemos una conexión simétrica $\nabla$ en un entorno de $p \in X$, siempre existe un sistema de coordenadas[4] en las cuales sus símbolos de Christoffel valorados en el punto se anulen: $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. Por tanto, el espacio de clases de *jets* de orden $0$ de conexiones simétricas, $\widetilde{\mathsf{C}}_n^0$, también se reduce a un solo punto.

## Espacio de clases de *jets* de métricas

**Definición 1.3.7.** *Dado el fibrado de métricas sobre* $X$, $T^*X \otimes T^*X \to X$, *denotaremos por* $M \to X$ *el* ***subfibrado de métricas pseudo-riemannianas*** *de signatura fija* $(s_+, s_-)$ *(con* $s_+ + s_- = n = \dim X$ *) —y, claro está, como caso particular con* $s_+ = n$ *y* $s_- = 0$, *de métricas riemannianas cuando corresponda—.*

[4] Como veremos en la sección 2.1 del capítulo 2, basta tomar un sistema de coordenadas normales para la conexión $\nabla$ en el punto $p$.

Cada fibra $M_p$ del fibrado $M$ es el conjunto de las métricas simétricas con signatura $(s_+, s_-)$ sobre $T_pX$ , y las secciones diferenciables de $M \to X$ se corresponden biunívocamente con las métricas pseudo-riemannianas sobre la variedad $X$ .

El fibrado de métricas pseudo-riemannianas de signatura fija es, por definición, un fibrado tensorial. Por tanto, según dijimos en el segundo ejemplo tras la definición 1.2.5, es un fibrado natural de orden 1 . Dadas unas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ en un cierto abierto $U$ de $X$ , podemos coordenar $M_{|U}$ , del siguiente modo, para cada $g_p \in M_{|U}$ :

$$x_h(g_p) := x_h(p) \qquad (h \in \{1, \dots, n\}) ,$$

$$g_{ij}(g_p) := g((\frac{\partial}{\partial x_i})_p, (\frac{\partial}{\partial x_j})_p) \;\; (i, j \in \{1, \dots, n\}) .$$

Sobre cada fibra del fibrado de *jets* de orden $r$ de métricas pseudo-riemannianas, $J^rM \to X$ , el grupo $\mathrm{Dif}_p$ actúa así: dados $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ y $j^r_p g \in J^r_p M$ ,

$$\tau \cdot j^r_p g := j^r_p(\tau^* g) ,$$

donde $\tau^* g$ es la métrica siguiente: $\tau^* g(D_1, D_2) = g(\tau_* D_1, \tau_* D_2)$ .

Si consideremos un sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$ en un entorno de $p \in X$ , también existe este sistema de coordenadas locales sobre $J^r_p M$ :

$$x_h(j^r_p g) := x_h(p) \qquad (h \in \{1, \dots, n\}) ,$$

$$g_{ij}(j^r_p g) := g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})(p) \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}) ,$$

$$\vdots$$

$$g_{ij;a_1 \dots a_r}(j^r_p g) := \frac{\partial^r g_{ij}}{\partial x_{a_1} \dots \partial x_{a_r}}(p) \quad (i, j, a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}) .$$

**Observación:** Igual que sucedía para conexiones, si consideramos dos sistemas de coordenadas en un entorno de $p \in X$ , $x_1, \dots, x_n$ y $x'_1, \dots, x'_n$ , y los respectivos sistemas de coordenadas inducidos sobre $J^r_p M$ , $g_{ij}, \dots, g_{ij;a_1 \dots a_r}$ y ${g'}_{ij}, \dots, {g'}_{ij;a_1 \dots a_r}$ , entonces, dado $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ , tal que $\tau^* x'_i = x_i$ , para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ , se verifica:

$$\tau^* {g'}_{ij} = g_{ij}, \dots, \tau^* {g'}_{ij;a_1 \dots a_r} = g_{ij;a_1 \dots a_r} .$$

La acción de $\mathrm{Dif}_p$ factoriza a través de una acción de $\mathrm{Dif}^{r+1}_p$ , ya que $J^rM$ es un fibrado de orden $r+1$ . Por eso podemos proponer la siguiente definición:

**Definición 1.3.8.** *El* ***espacio de clases (de equivalencia) de jets de orden*** $r$ ***en un punto de métricas pseudo-riemannianas de signatura fija*** $(s_+, s_-)$ *es el siguiente espacio anillado cociente:*

$$\mathsf{M}^r_{s_+, s_-} := J^r_p M / \mathrm{Dif}^{r+1}_p .$$

**Observación:** Emplearemos la notación $\mathsf{M}_n^r (= J_p^r M/\mathrm{Dif}_p^{r+1})$ para el correspondiente espacio de clases de *jets* de orden $r$ de métricas riemannianas, que, según veremos en el teorema 3.2.2 del capítulo 3, merece realmente el nombre de espacio de *moduli* —además, con una buena estructura geométrica, la de espacio diferenciable (definición 1.1.5)— que da título a esta memoria.

**Ejemplos (Espacios de clases de orden 0 y de orden 1 de *jets* en un punto de métricas pseudo-riemannianas con signatura fija):**

Es bien conocido que en coordenadas normales $x_1, \ldots, x_n$ —véase la sección 3.1 del capítulo 3— cualquier métrica pseudo-riemanniana de signatura $(s_+, s_-)$ coincide hasta el primer orden con la métrica plana $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} dx_i \otimes dx_i$, con $\alpha_{ii} = \pm 1$. Por eso, tanto $\mathsf{M}^0_{s_+,s_-}$ como $\mathsf{M}^1_{s_+,s_-}$ —y, en particular, $\mathsf{M}^0_n$ y $\mathsf{M}^1_n$— se reducen a un único punto.

Presentemos ahora una breve exposición en un lenguaje más clásico del concepto de invariante diferencial de orden (menor o igual que) $r$ de métricas pseudo-riemannianas de signatura prefijada $(s_+, s_-)$.

Cada métrica pseudo-riemanniana $g$, definida sobre un cierto abierto $U$ de $X$, permite definir la siguiente aplicación «diferenciable» (morfismo entre espacios anillados):

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mu_g} & \mathsf{M}^r_{s_+,s_-} \\ p & \longmapsto & [j^r_p g] . \end{array}$$

Un invariante diferencial $h : \mathsf{M}^r_{s_+,s_-} \to \mathbb{R}$ asocia a cada métrica pseudo-riemanniana $g$ sobre $U$ (abierto de $X$) una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{h(g)} & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & h(g)(p) := h([j^r_p g]) . \end{array}$$

Dado cualquier sistema de coordenadas, $h(g)$ es una función que depende diferenciablemente de los coeficientes de la métrica y de sus sucesivas derivadas parciales hasta el orden $r$,

$$h(g)(p) = h\left( g_{ij}(p), \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p), \ldots, \frac{\partial^r g_{ij}}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_r}}(p) \right),$$

y tal que es equivariante respecto a la acción por difeomorfismos locales (cambios de coordenadas):

$$h(\tau^* g) = \tau^*(h(g)) = h(g) \circ \tau .$$

El ejemplo más sencillo de invariante diferencial de métricas pseudo-riemannianas es la curvatura escalar, que es de orden 2; es decir, admite una expresión —en coordenadas normales en $p$— como sigue:

$$r(g)(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g_{ii}}{\partial x_j \partial x_j}(p) \right).$$

### 1.3.1. Espacios de clases de *jets* de orden infinito

Para concluir este capítulo, veamos a continuación que la definición de espacio de clases de *jets* de orden finito de un fibrado natural puede extenderse a los desarrollos formales de las secciones de dicho fibrado en un punto.

Denotaremos como sigue el espacio anillado (como límite proyectivo de espacios anillados, según el ejemplo 6 de la página 3) de *jets* en $p \in X$ de orden infinito de secciones del fibrado natural $F \to X$ de orden $s$:

$$J_p^\infty F := \varprojlim J_p^r F\,.$$

Del mismo modo, consideremos el siguiente grupo —que, al no tener dimensión finita, no es de Lie—, con la estructura de espacio anillado que le corresponde como límite proyectivo de espacios anillados:

$$\mathrm{Dif}_p^\infty := \varprojlim \mathrm{Dif}_p^r\,.$$

Además del grupo $\mathrm{Dif}_p^\infty$, consideremos también el siguiente grupo —tampoco de Lie, por el mismo motivo que el anterior—, con estructura de espacio anillado, también como límite proyectivo de espacios anillados:

$$\mathrm{NDif}_p^\infty := \varprojlim \mathrm{NDif}_p^r\,.$$

Observemos que los cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{NDif}_p^{r+1} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(r \geq 0)"] & \mathrm{Dif}_p^{r+1} \arrow[d] \\
\mathrm{NDif}_p^{r} \arrow[r, hook] & \mathrm{Dif}_p^{r}
\end{tikzcd}$$

inducen un morfismo de espacios anillados entre los respectivos límites proyectivos:

$$\mathrm{NDif}_p^\infty \hookrightarrow \mathrm{Dif}_p^\infty\,,$$

que proporciona la siguiente identificación:

$$\mathrm{NDif}_p^\infty = \{ j_p^\infty \tau \in \mathrm{Dif}_p^\infty : j_p^1 \tau = j_p^1 \mathrm{Id} \}\,.$$

El grupo $\mathrm{Dif}_p^\infty$ —por consiguiente, $\mathrm{NDif}_p^\infty$— actúa en $J_p^\infty F$, pues la acción diferenciable $\mathrm{Dif}_p^{r+s} \times J_p^r F \to J_p^r F$ da lugar a una serie de cuadrados conmutativos de aplicaciones diferenciables,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dif}_p^{r+s+1} \times J_p^{r+1}F & \longrightarrow & J_p^{r+1}F \\ \downarrow & (r \geq 0) & \downarrow \\ \mathrm{Dif}_p^{r+s} \times J_p^{r}F & \longrightarrow & J_p^{r}F\,, \end{array}$$

que inducen a su vez un morfismo de espacios anillados entre los respectivos límites proyectivos:

$$\mathrm{Dif}_p^{\infty} \times J_p^{\infty}F \longrightarrow J_p^{\infty}F\,,$$

precisamente el morfismo que define la acción del grupo $\mathrm{Dif}_p^{\infty}$ sobre el espacio anillado $J_p^{\infty}F$ .

Ahora podemos proponer la siguiente definición, análoga a la 1.3.1 que dimos para *jets* de orden finito:

**Definición 1.3.9.** *Diremos que dos* $\infty-$*jets* $j_p^{\infty}\sigma$ , $j_p^{\infty}\bar{\sigma} \in J_p^{\infty}F$ *son equivalentes si existe* $\tau_{\infty} = j_p^{\infty}\tau \in \mathrm{Dif}_p^{\infty}$ *, tal que:*

$$j_p^{\infty}\bar{\sigma} = \tau_{\infty} \cdot j_p^{\infty}\sigma = j_p^{\infty}(\tau_* \circ \sigma \circ \tau^{-1})\,.$$

Y por último, y de modo análogo en esta ocasión a la definición 1.3.2 de espacio de clases de *jets* de orden finito, podemos enunciar la correspondiente definición para orden infinito:

**Definición 1.3.10.** *El* **espacio de clases (de equivalencia) de** $\infty-$***jets*** **en un punto** $p \in X$ **de secciones del fibrado natural** $F \to X$ *(con* $\dim X = n$ *) es el siguiente espacio anillado cociente:*

$$\mathsf{F}_n^{\infty} := J_p^{\infty}F/\mathrm{Dif}_p^{\infty}\,.$$

Del mismo modo que en el caso de *jets* de orden finito, el espacio de clases $\mathsf{F}_n^{\infty}$ no depende ni de la elección de la variedad diferenciable $n-$dimensional $X$ , ni de la elección del punto $p \in X$ .

# Capítulo 2

# Conexiones lineales

Nos dedicaremos aquí al estudio más pormenorizado de los espacios de clases de equivalencia de *jets* de conexiones lineales en un punto. Veremos que no existen más invariantes diferenciales escalares asociados a las conexiones lineales (simétricas o no) que las funciones constantes.

Algunos de los resultados fundamentales que aparecen en este capítulo pueden encontrarse en [16].

Siempre consideraremos, salvo mención expresa en otro sentido, que $X$ es una variedad diferenciable de dimensión $n$.

## 2.1. Desarrollos normales

Comencemos recordando algunos conceptos y resultados que serán de utilidad a continuación.

**Definición 2.1.1.** *Sea $\nabla$ una conexión lineal sobre $X$, y sea $p \in X$. Diremos que unas coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en un entorno de $p$ constituyen un **sistema de coordenadas normales** (para $\nabla$ en el punto $p$) si verifican las siguientes condiciones:*

*(a) las coordenadas están centradas en $p$: $x_1(p) = \ldots = x_n(p) = 0$;*

*(b) las geodésicas que pasan por $p$ en $t = 0$ son precisamente las «líneas rectas», es decir, las curvas de ecuaciones $\{x_1(t) = \lambda_1 t, \ldots, x_n(t) = \lambda_n t\}$ (para cualquier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$).*

**Observación:** Dado un germen de conexión lineal $\nabla$ en $p$, es un hecho bien conocido que la aplicación exponencial asociada a la conexión $\nabla$, $\exp_\nabla : T_pX \to X$, es un difeomorfismo local entre un entorno del origen y un entorno de $p \in X$ que transforma las rectas que pasan por el origen de $T_pX$ en las geodésicas que pasan por $p$. De modo que las coordenadas normales son los sistemas de coordenadas que se obtienen transformando vía $\exp_\nabla$ los sistemas de coordenadas cartesianas en $T_pX$.

En otras palabras, fijar unas coordenadas normales $x_1, \ldots, x_n$ para $\nabla$ en $p$ es equivalente a fijar unas coordenadas cartesianas (una base) en $T_pX$ —por tanto, equivalente también a fijar una base en $T_p^*X$—.

El siguiente resultado es especialmente útil, pues caracteriza los sistemas de coordenadas normales para una conexión dada.

**Lema 2.1.1.** *Sean $p \in X$, $\nabla$ una conexión sobre $X$, $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de coordenadas locales centradas en $p$, $\Gamma_{ij}^k$ los símbolos de Christoffel de $\nabla$ en ese sistema de coordenadas y $H = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}$ el campo de las homotecias.*

*En estas condiciones son equivalentes las siguientes proposiciones:*

*(a)* $x_1, \ldots, x_n$ *son coordenadas normales para* $\nabla$*;*

*(b)* $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$*;*

*(c)* $\nabla_H H = H$*;*

*Demostración:* Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, consideremos la expresión en las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de la curva

$$\sigma(t) = (a_1 t, \ldots, a_n t)\,,$$

cuyo vector tangente es $T_t = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t)}$.

Téngase en cuenta lo siguiente:

$$(\nabla_T T)_{\sigma(t)} = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\sigma(t)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \Gamma_{ij}^k (a_1 t, \ldots, a_n t) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{\sigma(t)}.$$

<u>*(a)* $\Rightarrow$ *(b)*</u>:

Si las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ son normales para $\nabla$, entonces la curva $\sigma(t)$ es una geodésica, es decir, $(\nabla_T T)_{\sigma(t)} = 0$.

En particular, para $t = 1$, tenemos que, sea cual sea $k \in \{1, \ldots, n\}$, y para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \Gamma_{ij}^k (a_1, \ldots, a_n) = 0\,,$$

de modo que, para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$, la función $\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \Gamma_{ij}^k$ es nula en todo el entorno coordenado fijado.

<u>*(b)* $\Rightarrow$ *(a)*</u>:

Supongamos ahora que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, la función $\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \Gamma_{ij}^k$ es idénticamente nula en todo el entorno donde tenemos definidas las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$.

Consideremos entonces una curva $\sigma$ como la considerada al inicio de esta demostración, de manera que, en cualquier instante $t \neq 0$, se verifica:

$$\begin{aligned}(\nabla_T T)_{\sigma(t)} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Gamma_{ij}^k (a_1 t, \ldots, a_n t) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{\sigma(t)} \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i t)(a_j t) \Gamma_{ij}^k (a_1 t, \ldots, a_n t) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{\sigma(t)} = 0\,.\end{aligned}$$

Se sigue, por tanto, que $\sigma$ es una geodésica que pasa por el origen de coordenadas, esto es, las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ son normales para $\nabla$.

$\underline{(b) \Leftrightarrow (c)}$:

Imponer $\nabla_H H = H$ equivale a imponer $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \Gamma_{ij}^k = 0$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, como puede verse en las siguientes líneas:

$$\begin{aligned}\nabla_H H &= \nabla_{\sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \nabla_{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\partial x_i} (x_j \partial_{x_j}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \partial_{x_j} + x_j \nabla_{\partial x_i} \partial_{x_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \ \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ji} \partial_{x_j} + x_j \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \Gamma_{ij}^k\right) \partial_{x_k} = H + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \Gamma_{ij}^k\right) \partial_{x_k}\,.\end{aligned}$$

$\square$

Considerando la condición (b) del lema 2.1.1, demos ahora la siguiente definición:

**Definición 2.1.2.** *Diremos que un sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en $p$ es un **sistema normal** para $j_p^r \nabla$ si, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se verifica:*

$$j_p^{r+2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \Gamma_{ij}^k\right) = 0\,.$$

Equivalentemente, si para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para cualquier colección de índices $a_1, \ldots, a_{r+2} \in \{1, \ldots, n\}$, se verifica:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r+2} (\Gamma^k_{a_i a_j; a_1 \ldots \cancel{a_i} \ldots \cancel{a_j} \ldots a_{r+2}} + \Gamma^k_{a_j a_i; a_1 \ldots \cancel{a_i} \ldots \cancel{a_j} \ldots a_{r+2}}) = 0\,, \tag{2.1}$$

donde los índices tachados no son tenidos en cuenta y estamos usando la siguiente notación:

$$\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r} := \frac{\partial^r \Gamma^k_{ij}}{\partial x_{a_1}\ldots\partial x_{a_r}}(p)\,.$$

**Observación:** Si $x_1,\ldots,x_n$ son coordenadas normales para una conexión $\nabla$ en un cierto entorno del punto $p$, entonces, de la identidad del apartado *(b)* del lema 2.1.1, se sigue de modo evidente que, para cada entero positivo $r$, $x_1,\ldots,x_n$ es un sistema normal para $j^r_p\nabla$.

## Tensores normales

Sea $\nabla$ un germen de conexión lineal en $p$.

Si consideramos el germen en $p$ de conexión lineal $\overline{\nabla}$ que se corresponde por la aplicación $\exp_\nabla$ con la conexión plana estándar en $T_pX$, entonces, dado cualquier campo tensorial $A$ definido en un entorno de $p$, podemos considerar la sucesión de tensores

$$(\overline{\nabla}^r_p A)_{r\geq 0}\,,$$

que llamamos el *desarrollo normal de* $A$ en $p$.

En particular, el «desarrollo normal de $\nabla$ en $p$» se obtiene al aplicar esta misma idea al *tensor diferencia* entre $\nabla$ y $\overline{\nabla}$:

$$\mathbb{T}(\omega, D_1, D_2) := \omega(\nabla_{D_1}D_2 - \overline{\nabla}_{D_1}D_2)\,,$$

que se expresa, en coordenadas normales $x_1,\ldots,x_n$ para $\nabla$ en torno a $p$, del siguiente modo:

$$\mathbb{T} := \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\otimes dx_i \otimes dx_j\,.$$

**Definición 2.1.3.** *Para cada entero $r\geq 0$, el **tensor normal** $r-$**ésimo** de la conexión $\nabla$ en $p$ es $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$.*

En un sistema de coordenadas normales $x_1,\ldots,x_n$ para $\nabla$ en torno a $p$, el tensor $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ se expresa como sigue:

$$\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T} = \sum_{i,j,k,a_1,\ldots,a_r} \Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \otimes d_px_i\otimes d_px_j\otimes d_px_{a_1}\otimes\ldots\otimes d_px_{a_r}\,, \tag{2.2}$$

donde de nuevo manejamos la notación que ya introdujimos en la definición 2.1.2:

$$\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r} := \frac{\partial^r \Gamma^k_{ij}}{\partial x_{a_1}\ldots\partial x_{a_r}}(p)\,. \tag{2.3}$$

Obsérvese que $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ solamente depende de $j^r_p\nabla$.

**Definición 2.1.4.** *Dado un entero* $r \geq 0$ *,* ***el espacio de tensores normales de orden*** $r$ ***en*** $p$ *, que denotaremos* $N_r$ *, es el espacio vectorial de los tensores* $T$ *de tipo* $(1, r+2)$ *en* $p$ *que presentan las siguientes simetrías:*

*(i) son simétricos en los últimos* $r$ *índices covariantes:*

$$T^l_{ijk_1\ldots k_r} = T^l_{ijk_{\sigma(1)}\ldots k_{\sigma(r)}} \quad , \quad \textit{para cada} \ \ \sigma \in S_r \, ;$$

*(ii) la simetrización de los* $r+2$ *índices covariantes es* $0$ *:*

$$\sum_{\sigma \in S_{r+2}} T^l_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k_1)\ldots\sigma(k_r)} = 0 \, .$$

**Proposición 2.1.1.** *Dado cualquier entero* $r \geq 0$ *, el tensor* $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ *asociado a la conexión* $\nabla$ *en* $p$ *es un elemento de* $N_r$ *.*

*Demostración:* Sea $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de coordenadas normales para $\nabla$ en un entorno de $p$.

En vista de las expresiones 2.2 y 2.3, $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ verifica de modo evidente la condición *(i)* de la definición 2.1.4.

Para comprobar que también cumple *(ii)*, observemos que los coeficientes $\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}$ de $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ en las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ cumplen 2.1. Esto, junto con la simetría de los últimos $r$ índices covariantes, hace que se verifique:

$$\sum_{\sigma \in S_r} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r+2} (\Gamma^k_{a_i a_j; a_{\sigma(1)}\ldots \cancel{a_i} \ldots \cancel{a_j} \ldots a_{\sigma(r+2)}} + \Gamma^k_{a_j a_i; a_{\sigma(1)}\ldots \cancel{a_i} \ldots \cancel{a_j} \ldots a_{\sigma(r+2)}}) = 0 \, ,$$

para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para cualesquiera índices $a_1, \ldots, a_{r+2} \in \{1, \ldots, n\}$ ; esto es, la simetrización en los $r+2$ índices covariantes de $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ es 0.

□

Más adelante se probará (teorema 2.1.3) que cualquier elemento de $N_0 \times \ldots \times N_r$ es la sucesión de tensores normales en $p$ de cierto *jet* en dicho punto de orden $r$ de conexión lineal, lo cual dice que la definición 2.1.4 captura, en efecto, todas las simetrías lineales de los tensores normales.

**Observación:** Si la conexión $\nabla$ de la proposición 2.1.1 la tomamos simétrica, entonces el tensor asociado $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ de orden $r$ es un elemento del subespacio vectorial $\widetilde{N}_r$ de $N_r$ , formado por aquellos tensores $T$ en $p$ de orden $(1, r+2)$ que, además de verificar las dos simetrías propias de la definición 2.1.4, sean simétricos en los dos primeros índices covariantes:

$$T^l_{ijk_1\ldots k_r} = T^l_{jik_1\ldots k_r} \, ;$$

esta simetría adicional nos dice, en particular, que $\widetilde{N}_0 = 0$ .

Hagamos un breve comentario sobre las dimensiones de los espacios de tensores normales asociados a conexiones simétricas.

Si denotamos por $s_{r+2}$ —siendo $r$ cualquier número entero mayor o igual que 0— el operador de simetrización, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$0 \longrightarrow \widetilde{N}_r \xhookrightarrow{i} T_pX \otimes S^2T_p^*X \otimes S^rT_p^*X \xrightarrow{s_{r+2}} T_pX \otimes S^{r+2}T_p^*X \longrightarrow 0 \,. \tag{2.4}$$

Usando la sucesión (2.4) —recordemos de nuevo que la dimensión de la variedad $X$ es $n$—, unas simples cuentas permiten obtener la dimensión de $\widetilde{N}_r$ :

$$\dim \widetilde{N}_r = n\frac{n(n+1)}{2}\binom{n+r-1}{r} - n\binom{n+r+1}{r+2}. \tag{2.5}$$

### 2.1.1. Teorema de reducción

Dado un germen en $p$ de conexión lineal $\nabla$, denotaremos $(\overline{\nabla}^0_p\mathbb{T}, \ldots, \overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}, \ldots)$ la sucesión de todos sus tensores normales en $p$.

Para cada entero $r \geq 0$, atendiendo a la definición 2.1.3 y recordando lo que ya observamos tras aquella en relación a que el tensor $\overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}$ solamente depende de $j^r_p\nabla$, tiene pleno sentido considerar la aplicación

$$\begin{array}{ccc} J^r_p\mathrm{Con} & \xrightarrow{\phi_r} & N_0 \times \ldots \times N_r \\ j^r_p\nabla & \longmapsto & (\overline{\nabla}^0_p\mathbb{T}, \ldots, \overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}) \,. \end{array}$$

Obsérvese que $\phi_r$ es $\mathrm{Dif}^{r+2}_p$−equivariante, puesto que su definición no depende en absoluto de coordenadas.

Dedicaremos las próximas páginas al análisis de la naturaleza de esta aplicación, hasta llegar a demostrar el teorema 2.1.3 —que admite su correspondiente expresión (teorema 2.1.4) para el caso de las conexiones simétricas—.

Recuérdese la definición 1.2.4 para poder entender el siguiente enunciado:

**Proposición 2.1.2.** *Sean $j^r_p\nabla$ y $j^r_p\nabla'$ dos $r$−jets de conexiones lineales en $p$. Se verifica que $j^r_p\nabla$ y $j^r_p\nabla'$ pertenecen a la misma fibra de $\phi_r$ (es decir, tienen los mismos tensores normales hasta el orden $r$ ) si, y solo si, pertenecen a la misma órbita de* $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ .

*Demostración:* Supongamos, en primer lugar, que $j^r_p\nabla$ y $j^r_p\nabla'$ pertenecen a la misma órbita de $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ , es decir, existe algún difeomorfismo local $\tau$ , tal que $j^{r+2}_p\tau \in \mathrm{NDif}^{r+2}_p$ y $j^r_p\nabla' = (j^{r+2}_p\tau) \cdot (j^r_p\nabla)$. Comprobemos que $\phi_r(j^r_p\nabla) = \phi_r(j^r_p\nabla')$ .

Como $\phi_r$ es $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$−equivariante[5], se tiene la siguiente igualdad:

$$\phi_r((j^{r+2}_p\tau) \cdot (j^r_p\nabla)) = (j^{r+2}_p\tau) \cdot \phi_r(j^r_p\nabla) \,.$$

[5] Ya que $\phi_r$ es $\mathrm{Dif}^{r+2}_p$−equivariante, y $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ es subgrupo de $\mathrm{Dif}^{r+2}_p$ .

Téngase en cuenta ahora (ejemplo 2 de la página 13) que $\mathrm{NDif}_p^{r+2}$ actúa por la identidad en $N_0 \times \ldots \times N_r$ . Ello implica:

$$(j_p^{r+2}\tau) \cdot \phi_r(j_p^r\nabla) = \phi_r(j_p^r\nabla)\,,$$

lo que, añadido a la anterior igualdad, concluye.

Si ahora tomamos dos *jets*, $j_p^r\nabla$ y $j_p^r\nabla'$ , en la misma fibra de $\phi_r$ , veamos qué elemento de $\mathrm{NDif}_p^{r+2}$ lleva uno al otro.

Fijemos una base de $T_p^*X$ , y sean $x_1, \ldots, x_n$ , $x'_1, \ldots, x'_n$ las coordenadas normales inducidas por dicha base —es decir, verifican $d_px_i = d_px'_i$ , para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$— para $j_p^r\nabla$ y $j_p^r\nabla'$ , respectivamente.

Sea $j_p^{r+2}\tau$ el *jet* en $p$ del único difeomorfismo local tal que $\tau^*x'_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Este *jet* de difeomorfismos pertenece a $\mathrm{NDif}_p^{r+2}$ , pues, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ , se verifica:

$$\tau^*(d_px'_i) = d_p(\tau^*x'_i) = d_px_i = d_px'_i\,,$$

de donde se sigue que el jacobiano de $\tau$ en $p$ es la identidad, y, por tanto, $j_p^1\tau = j_p^1\mathrm{Id}$ , es decir, $j_p^{r+2}\tau \in \mathrm{NDif}_p^{r+2}$ .

Ahora veamos que $j_p^r\nabla' = \tau_* \cdot j_p^r\nabla = (j_p^{r+2}\tau) \cdot (j_p^r\nabla)$ .

Sean $\overline{\nabla}_p^0\mathbb{T}, \ldots, \overline{\nabla}_p^r\mathbb{T}$ los tensores normales de $j_p^r\nabla$ y $j_p^r\nabla'$ .

En las coordenadas inducidas sobre $J_p^r\mathrm{Con}$ por el sistema $x_1, \ldots, x_n$ , $j_p^r\nabla$ se expresa así:

$$\Gamma_{ij}^k = (T^0)_{ij}^k\,, \;\; \ldots, \;\; \Gamma_{ij;a_1\ldots a_r}^k = (T^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k\,,$$

donde $(T^0)_{ij}^k$ es la coordenada de $\overline{\nabla}_p^0\mathbb{T}$ correspondiente al elemento $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \otimes d_px_i \otimes d_px_j$ de la base de tensores de tipo $(1,2)$ ,..., $(T^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k$ es la coordenada de $\overline{\nabla}_p^r\mathbb{T}$ correspondiente al elemento $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \otimes d_px_i \otimes d_px_j \otimes d_px_{a_1} \otimes \ldots \otimes d_px_{a_r}$ de la base de tensores de tipo $(1, r+2)$ .

De modo análogo, la expresión de $j_p^r\nabla'$ en las coordenadas inducidas sobre $J_p^r\mathrm{Con}$ por el sistema $x'_1, \ldots, x'_n$ se expresa del siguiente modo:

$${\Gamma'}_{ij}^k = ({T'}^0)_{ij}^k\,, \;\; \ldots, \;\; {\Gamma'}_{ij;a_1\ldots a_r}^k = ({T'}^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k\,,$$

donde $({T'}^0)_{ij}^k$ está denotando la coordenada de $\overline{\nabla}_p^0\mathbb{T}$ que se corresponde con el elemento $\left(\frac{\partial}{\partial x'_k}\right)_p \otimes d_px'_i \otimes d_px'_j$ de la base de tensores de tipo $(1,2)$ ,..., $({T'}^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k$ denota la coordenada de $\overline{\nabla}_p^r\mathbb{T}$ correspondiente al elemento $\left(\frac{\partial}{\partial x'_k}\right)_p \otimes d_px'_i \otimes d_px'_j \otimes d_px'_{a_1} \otimes \ldots \otimes d_px'_{a_r}$ de la base de tensores de tipo $(1, r+2)$ .

Como $d_px_i = d_px'_i$ y $(\partial_{x_i})_p = (\partial_{x'_i})_p$ (para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ ), se siguen las siguientes igualdades:

$$(T^0)_{ij}^k = ({T'}^0)_{ij}^k\,, \ldots, \; (T^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k = ({T'}^r)_{ij;a_1\ldots a_r}^k\,,$$

y, por tanto, las coordenadas $\Gamma_{ij}^k, \ldots, \Gamma_{ij;a_1,\ldots,a_r}^k$ de $j_p^r\nabla$ coinciden, respectivamente, con las coordenadas ${\Gamma'}_{ij}^k, \ldots, {\Gamma'}_{ij;a_1,\ldots,a_r}^k$ de $j_p^r\nabla'$ .

Aplicamos la observación de la página 17 para garantizar la segunda igualdad en la siguiente línea:

$$\Gamma'^{\,k}_{ij;a_1\ldots a_r}(j^r_p\nabla') = \Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}(j^r_p\nabla) = (\tau^*\Gamma'^{\,k}_{ij;a_1\ldots a_r})(j^r_p\nabla) = \Gamma'^{\,k}_{ij;a_1\ldots a_r}(\tau_*\cdot j^r_p\nabla)\,,$$

y, como sus coordenadas en $J^r_p\mathrm{Con}$ son las mismas, podemos afirmar que $j^r_p\nabla' = \tau_*\cdot j^r_p\nabla$ .

□

**Lema 2.1.2.** *Dado un entero $r \geq 0$ , cada sistema local de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ en torno de $p$ define una sección diferenciable (global) de $\phi_r$ —la aplicación definida en la página 28— cuya imagen son todos los jets $j^r_p\nabla$ para los que estas coordenadas son normales.*

*Demostración:* Recordemos que unas coordenadas locales $x_1,\ldots,x_n$ alrededor de $p$ inducen coordenadas $\Gamma^k_{ij}\,,\ldots,\,\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}$ sobre $J^r_p\mathrm{Con}$ .

La sección del enunciado es:

$$\begin{array}{ccc} N_0\times\ldots\times N_r & \xrightarrow{\sigma} & J^r_p\mathrm{Con} \\ (T_0,\ldots,T_r) & \longmapsto & j^r_p\nabla\,, \end{array}$$

donde $j^r_p\nabla$ es el *jet* que tiene las siguientes coordenadas:

$$\Gamma^k_{ij} := (T_0)^k_{ij}\,,\ldots,\,\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r} := (T_r)^k_{ij;a_1\ldots a_r}\,.$$

Que $\sigma$ es diferenciable es evidente a partir de su definición en coordenadas.

En cuanto a que, en efecto, se trate de una sección de $\phi_r$ , obsérvese que las coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ son normales para el *jet* $\sigma(T_0,\ldots,T_r)$ , pues $\Gamma^k_{ij;a_1\ldots a_r}$ verifican las simetrías de la ecuación 2.1, ya que vienen definidas a partir de los tensores $T_0\,,\ldots,\,T_r$ , que, según la definición 2.1.4 de tensores normales en $p$ , verifican dichas simetrías.

Por lo tanto, la imagen por $\phi_r$ de $j^r_p\nabla$ (esto es, la sucesión de los tensores normales en $p$ hasta el orden $r$ de $j^r_p\nabla = \sigma(T_0,\ldots,T_r)$ ) es precisamente $(T_0,\ldots,T_r)$ .

□

**Observación:** Fijado un cierto sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ en un entorno de $p$ , si $\mathcal{N}^r_p \subset J^r_p\mathrm{Con}$ es la subvariedad formada por aquellos *jets* en $p$ de conexiones lineales para los cuales $x_1,\ldots,x_n$ son coordenadas normales, el lema recién demostrado afirma que $\mathcal{N}^r_p$ es precisamente la subvariedad imagen de la sección $\sigma$ de $\phi_r$ que hemos definido en su demostración, y es un *slice*[6] de la acción de $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ sobre $J^r_p\mathrm{Con}$ .

[6] Cuando decimos que $\mathcal{N}^r_p$ es un *slice* de la acción de $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ en $J^r_p\mathrm{Con}$ , queremos decir que verifica estas dos condiciones:

(a) si aplicamos dicha acción a $\mathcal{N}^r_p$ , recuperamos todo $J^r_p\mathrm{Con}$ , es decir, $\mathrm{NDif}^{r+2}_p\cdot\mathcal{N}^r_p = J^r_p\mathrm{Con}$ ;

(b) $\mathcal{N}^r_p$ corta transversalmente en cada punto a las órbitas de $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$ .

**Teorema 2.1.3** (**Reducción**). *Para cada entero $r \geq 0$, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} J^r_p\mathrm{Con} & \xrightarrow{\phi_r} & N_0 \times \ldots \times N_r \\ j^r_p\nabla & \longmapsto & (\overline{\nabla}^0_p\mathbb{T}, \ldots, \overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}) \end{array}$$

*es una proyección regular epiyectiva, cuyas fibras son las órbitas de* $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$.

*Así pues, $\phi_r$ induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}_n$-variedades diferenciables:*

$$(J^r_p\mathrm{Con}) \,/\, \mathrm{NDif}^{r+2}_p \;=\!=\!=\; N_0 \times \ldots \times N_r \,.$$

*Demostración:* Para comprobar que $\phi_r$ es una proyección regular, basta con construir, para cada *jet* $j^r_p\nabla$, una sección de $\phi_r$ que pase por él.

Por el lema 2.1.2 anterior, sabemos que cada sistema de coordenadas locales en torno a $p$ permite definir una sección de $\phi_r$; si además dichas coordenadas son normales para $j^r_p\nabla$, entonces dicho lema nos garantiza también que la sección construida pasa por el *jet* fijado. En particular, la sección es global, y $\phi_r$ es, por tanto, epiyectiva.

La proposición 2.1.2 asegura que las fibras de la proyección regular $\phi_r$ son las órbitas de $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$.

Ya comentamos anteriormente que $\phi_r$ es $\mathrm{Dif}^{r+2}_p$−equivariante, puesto que su definición no depende en absoluto de coordenadas. Como observamos en la demostración de la proposición 1.1.2, y ya que (1.1) de la página 12 es una sucesión exacta, $\mathrm{Gl}_n$ actúa sobre $(J^r_p\mathrm{Con}) \,/\, \mathrm{NDif}^{r+2}_p$.

Por último, que $\phi_r$ induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}_n$-variedades diferenciables se sigue directamente del corolario 1.1.1.

□

Razonando de modo similar, es posible probar un enunciado análogo del teorema 2.1.3, correspondiente en este caso a conexiones simétricas; en este enunciado, $\widetilde{\mathrm{Con}}$ sigue denotando el fibrado de conexiones simétricas sobre $X$, y $\widetilde{N}_i$ denota el espacio de los tensores normales de orden $i$ en $p$, para $i \in \{1, \ldots, r\}$, como en la observación justo siguiente a la proposición 2.1.1:

**Teorema 2.1.4.** *Para cada entero $r \geq 0$, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} J^r_p\widetilde{\mathrm{Con}} & \xrightarrow{\phi_r} & \widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r \\ j^r_p\nabla & \longmapsto & (\overline{\nabla}^1_p\mathbb{T}, \ldots, \overline{\nabla}^r_p\mathbb{T}) \end{array}$$

*es una proyección regular epiyectiva, cuyas fibras son precisamente las órbitas de* $\mathrm{NDif}^{r+2}_p$.

*Por consiguiente, $\phi_r$ induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}_n$-variedades diferenciables:*

$$(J^r_p\widetilde{\mathrm{Con}}) \,/\, \mathrm{NDif}^{r+2}_p \;=\!=\!=\; \widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r \,.$$

## 2.2. Espacios de clases de *jets* de orden finito de conexiones lineales

Una consecuencia inmediata de los teoremas 2.1.3 y 2.1.4 y de la sucesión exacta de grupos de Lie,

$$1 \longrightarrow \mathrm{NDif}_p^{r+2} \longrightarrow \mathrm{Dif}_p^{r+2} \longrightarrow \mathrm{Gl}_n \longrightarrow 1\,, \tag{2.6}$$

que es la misma sucesión (1.1 ), con $k = r+2$ , y en la que ya hemos identificado $\mathrm{Dif}_p^1$ con $\mathrm{Gl}_n$ , junto con la proposición 1.1.2, es este teorema:

**Teorema 2.2.1.** *El espacio de clases de jets de conexiones lineales en un punto es isomorfo, como espacio anillado, al espacio cociente de una representación lineal de* $\mathrm{Gl}_n$ *:*

$$\mathsf{C}_n^r = J_p^r\mathrm{Con}/\mathrm{Dif}_p^{r+2} \simeq (N_0 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{Gl}_n\,.$$

*Del mismo modo, tenemos también el isomorfismo correspondiente en el caso de conexiones simétricas:*

$$\widetilde{\mathsf{C}}_n^r = J_p^r\widetilde{\mathrm{Con}}/\mathrm{Dif}_p^{r+2} \simeq (\widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r)/\mathrm{Gl}_n\,.$$

Por otra parte, aplicando las definiciones 1.3.3 y 1.3.6 al caso concreto de las conexiones lineales, podemos dar la siguiente definición:

**Definición 2.2.1.** *Un* ***invariante diferencial (escalar) de orden (menor o igual que)*** $r$ *de conexiones lineales es una función real diferenciable definida (globalmente) sobre el espacio de clases* $\mathsf{C}_n^r$ *.*

Recordemos que, por la estructura de espacio anillado cociente de $\mathsf{C}_n^r$ , podemos escribir:

$$\{\text{Invariantes diferenciales de orden menor o igual que } r\} =$$

$$= \mathcal{C}^\infty(\mathsf{C}_n^r) = \mathcal{C}^\infty(J_p^r\mathrm{Con})^{\mathrm{Dif}_p^{r+2}}\,.$$

El lema que enunciamos a continuación nos permitirá afirmar posteriormente que no hay invariantes diferenciales de ningún orden de las conexiones lineales —simétricas o no— sobre la variedad $X$ , salvo las funciones constantes.

**Lema 2.2.2.** *Para cada entero* $r \geq 0$ *, el álgebra de funciones polinómicas* $\mathrm{Gl}_n$*-invariantes*

$$N_0 \times \ldots \times N_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

*es trivial, es decir, solamente está formada por las funciones constantes.*

*Demostración:* Puesto que, si una función polinómica es $\mathrm{Gl}_n$-invariante, también lo son sus componentes homogéneas, basta con demostrar el resultado para polinomios homogéneos.

El espacio vectorial de funciones $N_0 \times \ldots \times N_r \to \mathbb{R}$ polinómicas, homogéneas de grado $k$, y $\mathrm{Gl}_n$-invariantes, es isomorfo a

$$\bigoplus_{d_0+\ldots+d_r=k} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gl}_n}(S^{d_0}N_0 \otimes \ldots \otimes S^{d_r}N_r, \mathbb{R}) \,. \tag{2.7}$$

Por la proposición A.1, toda aplicación lineal $\mathrm{Gl}_n$-invariante $S^{d_0}N_0 \otimes \ldots S^{d_r}N_r \to \mathbb{R}$ es la restricción de alguna aplicación lineal $\mathrm{Gl}_n$-invariante

$$T_p^*X \otimes \overset{a}{\ldots} \otimes T_p^*X \otimes T_pX \otimes \overset{b}{\ldots} \otimes T_pX \longrightarrow \mathbb{R} \,,$$

con $a = 2d_0 + \ldots + (r+2)d_r$, y $b = d_0 + \ldots + d_r$.

Si $k > 0$, entonces $a \neq b$ y el teorema A.2 establece que no existen tales aplicaciones lineales. Es decir, si $k > 0$, entonces el espacio vectorial que presentamos en (2.7) es cero, y hemos acabado.

□

**Teorema 2.2.3.** *Los únicos invariantes diferenciales (escalares) asociados a las conexiones lineales, sean estas simétricas o no, son las funciones constantes:*

$$\mathcal{C}^\infty(\mathsf{C}_n^r) = \mathbb{R} \ , \ \mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathsf{C}}_n^r) = \mathbb{R} \,.$$

*Demostración:* En primer lugar, por el teorema 2.2.1 y la propiedad universal de los espacios anillados cocientes:

$$\mathcal{C}^\infty(\mathsf{C}_n^r) = \mathcal{C}^\infty((N_0 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{Gl}_n) = \mathcal{C}^\infty(N_0 \times \ldots \times N_r)^{\mathrm{Gl}_n} \,.$$

El teorema A.1 permite describir esa álgebra de funciones diferenciables Gl-invariantes en términos de un sistema de generadores del álgebra de funciones $N_0 \times \ldots \times N_r \to \mathbb{R}$, polinómicas y $\mathrm{Gl}_n$-invariantes.

Por otra parte, el lema 2.2.2 nos dice que cualquier función polinómica de esas es forzosamente constante, de donde se sigue que el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{C}_n^r)$ es trivial: $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{C}_n^r) = \mathbb{R}$.

(Un razonamiento totalmente análogo al expuesto sirve para demostrar lo mismo en el caso de conexiones simétricas: $\mathcal{C}^\infty(\widetilde{\mathsf{C}}_n^r) = \mathbb{R}$).

□

### 2.2.1. Breve discusión sobre la «dimensión genérica»

Haremos aquí algunos comentarios informales, que nos permitirán recuperar, mediante argumentos de índole geométrica, las fórmulas relativas a la «dimensión genérica» del espacio de clases $\widetilde{\mathsf{C}}_n^r$, que fueron obtenidas en [8] mediante una serie de elaborados cálculos.

Recordemos que el teorema 2.2.1 establece el siguiente isomorfismo de espacios anillados:

$$\widetilde{\mathsf{C}}_n^r = (\widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r)/\mathrm{Gl}_n \,.$$

En este espacio de órbitas, por «dimensión genérica» se entiende habitualmente la siguiente cantidad:

$$\dim(\widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r) - \dim(\text{Órbita de un punto con isotropía mínima}),$$

que es igual a esta otra:

$$\sum_{m=1}^{r} \dim \widetilde{N}_m - (\dim \mathrm{Gl}_n - i), \tag{2.8}$$

donde estamos denotando por $i$ la dimensión mínima de los grupos de isotropía de la acción de $\mathrm{Gl}_n$ sobre $\widetilde{N}_1 \times \ldots \times \widetilde{N}_r$.

Si $n > 2$ o $k > 1$, se puede comprobar (véase en [8]) que la isotropía de un *jet* «genérico» es trivial, luego, en tales casos, $i = 0$.

Veamos a continuación que, en el caso de $1-$*jets* de conexiones simétricas sobre dimensión 2, el grupo de isotropía de cualquier elemento tiene al menos dimensión 1, de modo que en este caso se tiene $i = 1$.

**Definición 2.2.2.** *El espacio vectorial de los* ***tensores de tipo curvatura (asociados a las conexiones simétricas)*** *es el subespacio* $\mathcal{R} \subseteq \Lambda^2 T_p^* X \otimes T_p X$ *definido por la identidad lineal de Bianchi:*

$$R_{ijl}^k + R_{lij}^k + R_{jli}^k = 0. \tag{2.9}$$

Estos tensores de tipo curvatura están íntimamente relacionados con los tensores normales de las conexiones simétricas. No hay más que comprobar que la aplicación lineal

$$R_{ijl}^k := \Gamma_{jli}^k - \Gamma_{ilj}^k$$

establece un isomorfismo de representaciones lineales de $\mathrm{Gl}_n$:

$$\widetilde{N}_1 \simeq \mathcal{R},$$

cuya inversa es:

$$\Gamma_{ijl}^k := \frac{1}{3}(R_{lij}^k + R_{lji}^k).$$

Denotemos el operador de simetrización, el de hemisimetrización y el operador Ricci, respectivamente, como sigue:

$$s : \otimes^2 T_p^* X \longrightarrow S^2 T_p^* X \ , \ a : \otimes^2 T_p^* X \longrightarrow \Lambda^2 T_p^* X \ , \ \rho : \mathcal{R} \longrightarrow \otimes^2 T_p^* X,$$

donde $\rho(R)_{ij} := \sum_{k=1}^n R_{ikj}^k$.

**Lema 2.2.4.** *Si la variedad $X$ tiene dimensión $2$, entonces el operador Ricci establece un isomorfismo $\mathrm{Gl}_2-$equivariante:*

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\rho_s \oplus \rho_a} S^2(T_p^* X) \oplus \Lambda^2(T_p^* X),$$

*donde $\rho_s := s \circ \rho$ y $\rho_a := a \circ \rho$.*

*Demostración:* Puede verse en [4, Lemma 4.4.1]).

□

Este lema implica que, si $X$ tiene dimensión $2$, el subgrupo de isotropía de cualquier *jet* de orden $1$, $j_p^1\nabla$, por la acción de $\mathrm{Dif}_p$, es, como mínimo, de dimensión $1$. Veámoslo:

Debido a los isomorfismos

$$\widetilde{\mathsf{C}_2^1} = \widetilde{N}_1/\mathrm{Gl}_2 = \mathcal{R}/\mathrm{Gl}_2 = (S^2T_p^*X \oplus \Lambda^2 T_p^*X)/\mathrm{Gl}_2\,,$$

basta comprobar que cualquier pareja $(T_2, \omega_2)$ formada por un $2-$tensor simétrico y una $2-$forma sobre un espacio vectorial bidimensional tiene, al menos, un grupo de isotropía de dimensión $1$ bajo la acción de $\mathrm{Gl}_2$.

Si la métrica $T_2$ es no singular, entonces sus automorfismos tienen determinante igual a $\pm 1$. Entre ellos, puesto que estamos considerando el caso en que la variedad $X$ es bidimensional, preservarán la $2-$forma $\omega_2$ los que tengan determinante $1$. En este caso, por tanto, el grupo de isotropía del par $(T_2, \omega_2)$ es isomorfo bien al grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_2$, bien a $\mathrm{SO}_{1,1}$, según la signatura de $T_2$.

El resto de casos, en los que $T_2$ sea singular, se analizan de un modo análogo, y se obtienen grupos de isotropía de dimensión mayor.

Las fórmulas 2.5 y 2.8, junto con los argumentos anteriormente expuestos sobre los grupos de isotropía de $1-$*jets* de conexiones simétricas en dimensión 2 —y teniendo en cuenta que $\dim \mathrm{Gl}_n = n^2$—, permiten recuperar[7], para $n \geq 2$, la siguiente expresión de la «dimensión genérica» de $\widetilde{\mathsf{C}}_n^r$ que puede encontrarse, como dijimos antes, en [8]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{r} \dim \widetilde{N}_m - (\dim \mathrm{Gl}_n - i) \\
&\qquad = n\frac{n(n+1)}{2}\sum_{m=0}^{r}\binom{n+m-1}{m} - n\sum_{m=0}^{r}\binom{n+m+1}{m+2} - (n^2 - \delta_2^n\delta_1^r) \\
&\qquad = n\frac{n(n+1)}{2}\sum_{m=0}^{r}\binom{n+m-1}{n-1} - n\sum_{m=1}^{r+2}\binom{n+m-1}{n-1} + \delta_2^n\delta_1^r\,.
\end{aligned}$$

## 2.3. Espacios de clases de *jets* de orden infinito de conexiones lineales

El propósito de esta sección es extender el teorema 2.1.3 a los desarrollos formales de conexiones lineales en un punto.

Para ello, en primer lugar, consideremos

$$J_p^\infty \mathrm{Con} := \lim_{\leftarrow} J_p^r \mathrm{Con}\,,$$

[7] El caso trivial $n = 1$ ya fue comentado, de modo más general para conexiones lineales no necesariamente simétricas, en el primer ejemplo en la página 18 del Capítulo 1.

con su estructura de espacio anillado, según vimos en el capítulo 1, para el caso general $J_p^\infty F$. Igualmente, denotaremos el siguiente límite proyectivo de espacios anillados —por tanto, espacio anillado (ej. 6, pág. 3)— como sigue:

$$\prod_{i=0}^{\infty} N_i := \lim_{\leftarrow} \prod_{i=0}^{r} N_i \,.$$

Recordemos que en el apartado 1.3.1 introdujimos los siguientes grupos, ambos con estructura de espacios anillados, por ser límites de espacios anillados: $\mathrm{Dif}_p^\infty := \lim\limits_{\leftarrow} \mathrm{Dif}_p^r$ y $\mathrm{NDif}_p^\infty := \lim\limits_{\leftarrow} \mathrm{NDif}_p^r$.

Ya vimos de modo más general en aquel mismo apartado del capítulo 1 que el grupo $\mathrm{Dif}_p^\infty$ —y, por consiguiente, también $\mathrm{NDif}_p^\infty$— actúa en $J_p^\infty\mathrm{Con}$. Razonando de modo análogo a lo que se hizo allí, se obtiene un morfismo de espacios anillados,

$$\mathrm{Dif}_p^\infty \times \prod_{i=0}^{\infty} N_i \longrightarrow \prod_{i=0}^{\infty} N_i \,,$$

que de nuevo cumple las propiedades de «acción», de modo que el grupo $\mathrm{Dif}_p^\infty$ —por tanto, $\mathrm{NDif}_p^\infty$— actúa también en $\prod\limits_{i=0}^{\infty} N_i$.

**Observación:** Un elemento cualquiera $\tau_\infty \in \mathrm{Dif}_p^\infty$ actúa en $\prod\limits_{i=0}^{\infty} N_i$ por su «jacobiano»[8]. En particular, los elementos de $\mathrm{NDif}_p^\infty$ actúan por la identidad.

Por otra parte, las correspondientes aplicaciones $\phi_r$ (definidas en la página 28) también conmutan con los morfismos de ambos sistemas proyectivos de espacios anillados:

$$\begin{tikzcd}
J_p^{r+1}\mathrm{Con} \arrow[r, "\phi_{r+1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(r \geq 0)"] & \prod\limits_{i=0}^{r+1} N_i \arrow[d] \\
J_p^{r}\mathrm{Con} \arrow[r, "\phi_{r}"] & \prod\limits_{i=0}^{r} N_i \;,
\end{tikzcd}$$

motivo por el cual la siguiente colección constituye un sistema proyectivo de morfismos de espacios anillados:

$$J_p^\infty\mathrm{Con} \xrightarrow{\pi_r} J_p^r\mathrm{Con} \xrightarrow{\phi_r} N_0 \times \ldots \times N_r \quad (r \geq 0)\,, \tag{2.10}$$

[8] El «jacobiano» de $\tau_\infty = j_p^\infty \tau$ del que hablamos es $j_p^1\tau$, es decir, el elemento obtenido al aplicar a $\tau_\infty$ la proyección natural al factor correspondiente: $\mathrm{Dif}_p^\infty \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Dif}_p^1$.

donde $\pi_r$ es la proyección canónica del límite proyectivo en el espacio correspondiente.

La propiedad universal del límite proyectivo (ej. 6, pág. 3) sirve entonces para garantizar la existencia del siguiente morfismo inducido de espacios anillados:

$$J_p^\infty \mathrm{Con} \xrightarrow{\ \phi_\infty\ } \prod_{i=0}^{\infty} N_i\,.$$

El teorema fundamental de reducción cuyo enunciado puede leerse a continuación dice cuál es la naturaleza de esta aplicación $\phi_\infty$, y es la versión correspondiente para *jets* de orden infinito del teorema de reducción 2.1.3.

**Teorema 2.3.1 (Reducción para *jets* infinitos).** *El morfismo de espacios anillados*

$$J_p^\infty \mathrm{Con} \xrightarrow{\ \phi_\infty\ } \prod_{i=0}^{\infty} N_i\,.$$

*es* $\mathrm{Dif}_p^\infty$*−equivariante, epiyectivo y sus fibras son las órbitas de* $\mathrm{NDif}_p^\infty$*.*

*Además, para cada punto de* $J_p^\infty\mathrm{Con}$*, existe alguna sección* [9] *de* $\phi_\infty$ *que pasa por dicho punto.*

*Demostración:* Según puede verse en 2.10, como todas las aplicaciones $\phi_r \circ \pi_r$ (para cada $r \geq 0$) son epiyectivas, también lo es $\phi_\infty$.

Del mismo modo, puesto que todas esas aplicaciones $\phi_r \circ \pi_r$ (para cada $r \geq 0$) son $\mathrm{Dif}_p^\infty$−equivariantes, $\phi_\infty$ es $\mathrm{Dif}_p^\infty$−equivariante.

Comprobemos ahora que las fibras de $\phi_\infty$ son justamente las órbitas de $\mathrm{NDif}_p^\infty$:

- Sean $j_p^\infty\nabla$, $j_p^\infty\nabla' \in J_p^\infty\mathrm{Con}$, tales que $\phi_\infty(j_p^\infty\nabla) = \phi_\infty(j_p^\infty\nabla')$. Por definición de $\phi_\infty$, se verifica:

$$\begin{array}{ccc} (\phi_r\circ\pi_r)(j_p^\infty\nabla) & = & (\phi_r\circ\pi_r)(j_p^\infty\nabla') \\ \| & & \| \qquad\qquad (\forall\, r\geq 0) \\ \phi_r(j_p^r\nabla) & & \phi_r(j_p^r\nabla')\,. \end{array}$$

  En cada $r \geq 0$, usando el teorema 2.1.3 de reducción para *jets* de orden finito, esta condición dice que existe $\tau_r \in \mathrm{NDif}_p^{r+2}$, tal que $j_p^r\nabla' = \tau_r \cdot j_p^r\nabla$.

[9] Por sección de $\phi_\infty$ entenderemos un morfismo de espacios anillados

$$\sigma : \prod_{i=0}^{\infty} N_i \longrightarrow J_p^\infty\mathrm{Con}\,,$$

tal que $\phi_\infty \circ \sigma = \mathrm{Id}$.

Aprovechando que las proyecciones $J^r_p\mathrm{Con} \to J^{r-1}_p\mathrm{Con}$ son $\mathrm{Dif}_p-$equivariantes, es posible escoger una sucesión $(\tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$, que defina un elemento $\tau_\infty := (\tau_r)_{r\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{NDif}^\infty_p$. Este elemento verifica:

$$j^\infty_p\nabla = \tau_\infty \cdot j^\infty_p\nabla' \, ,$$

luego concluimos que $j^\infty_p\nabla$ y $j^\infty_p\nabla'$ pertenecen a la misma órbita de $\mathrm{NDif}^\infty_p$.

- Si tomamos $j^\infty_p\nabla\, ,\ j^\infty_p\nabla' \in J^\infty_p\mathrm{Con}$ que estén en la misma órbita de $\mathrm{NDif}^\infty_p$, es porque existe algún $\tau^\infty \in \mathrm{NDif}^\infty_p$, tal que $j^\infty_p\nabla' = \tau^\infty \cdot j^\infty_p\nabla$.

  Como $\phi_\infty$ es $\mathrm{Dif}^\infty_p$-equivariante, también es $\mathrm{NDif}^\infty_p$-equivariante, y, por tanto, se verifica:

$$\phi_\infty(j^\infty_p\nabla') = \phi_\infty(\tau^\infty \cdot j^\infty_p\nabla) = \tau^\infty \cdot \phi_\infty(j^\infty_p\nabla) = \phi_\infty(j^\infty_p\nabla)\, ,$$

  donde la última igualdad se debe a la observación de la página 36.

Veamos para acabar que, dado un elemento $j^\infty_p\nabla \in J^\infty_p\mathrm{Con}$, existe una sección de $\phi_\infty$ que pasa por él.

Obsérvese que la sección construida en el teorema 2.1.3, que ahora denotaremos $\sigma_r$ para cada $r \geq 0$, puede escogerse de modo que se tenga el siguiente cuadrado de aplicaciones diferenciables:

$$\begin{array}{ccc} J^{r+1}_p\mathrm{Con} & \xleftarrow{\sigma_{r+1}} & N_0 \times \ldots \times N_{r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J^r_p\mathrm{Con} & \xleftarrow{\sigma_r} & N_0 \times \ldots \times N_r \end{array} \, ,$$

y además de modo que $\sigma_r$ pase por $j^r_p\nabla$, para cada $r \geq 0$.

Por tanto, de nuevo por la propiedad universal del límite proyectivo, toda esa colección de secciones $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{N}}$ define un morfismo de espacios anillados,

$$J^\infty_p\mathrm{Con} \xleftarrow{\sigma} \prod_{i=0}^{\infty} N_i \, ,$$

que es precisamente la sección que queríamos definir.

□

El teorema final buscado es el siguiente:

**Teorema 2.3.2.** *Hay un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\mathsf{C}^\infty_n = \left(\prod_{i=0}^{\infty} N_i\right) / \, \mathrm{Gl}_n \, ,$$

*siendo* $\mathsf{C}^\infty_n := (J^\infty_p\mathrm{Con}) \, / \, \mathrm{Dif}^\infty_p$.

*Demostración:* El teorema anterior y la proposición 1.1.1 garantizan que existe un isomorfismo $\mathrm{Gl}_n-$equivariante de espacios anillados:

$$(J_p^\infty \mathrm{Con}) \,/\, \mathrm{NDif}_p^\infty \simeq \prod_{i=0}^{\infty} N_i \,.$$

Ahora basta observar que la existencia de la sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathrm{NDif}_p^\infty \longrightarrow \mathrm{Dif}_p^\infty \longrightarrow \mathrm{Gl}_n \longrightarrow 1 \tag{2.11}$$

permite hacer uso de la proposición 1.1.2 para concluir:

$$\mathsf{C}_n^\infty = (J_p^\infty \mathrm{Con})/\,\mathrm{Dif}_p^\infty \simeq \left[(J_p^\infty \mathrm{Con})/\,\mathrm{NDif}_p^\infty\right] / \,\mathrm{Gl}_n \simeq \left(\prod_{i=0}^{\infty} N_i\right) / \,\mathrm{Gl}_n \,.$$

□

Todo lo hecho en esta sección puede redactarse análogamente para conexiones simétricas; por consiguiente, tanto el teorema 2.3.1, como el 2.3.2, admiten su correspondiente expresión, que enunciaremos conjuntamente en el siguiente resultado:

**Teorema 2.3.3.** *El morfismo de espacios anillados*

$$J_p^\infty \widetilde{\mathrm{Con}} \xrightarrow{\quad \phi_\infty \quad} \prod_{i=1}^{\infty} \widetilde{N}_i \,.$$

*es* $\mathrm{Dif}_p^\infty-$*equivariante, epiyectivo y sus fibras son las órbitas de* $\mathrm{NDif}_p^\infty$ *.*

*Para cada punto de* $J_p^\infty \widetilde{\mathrm{Con}}$ *, existe alguna sección de* $\phi_\infty$ *que pasa por dicho punto.*

*Además, hay un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\widetilde{\mathsf{C}}_n^\infty = \!=\!= \left(\prod_{i=1}^{\infty} \widetilde{N}_i\right) / \,\mathrm{Gl}_n \,,$$

*siendo* $\widetilde{\mathsf{C}}_n^\infty := (J_p^\infty \widetilde{\mathrm{Con}}) \,/\, \mathrm{Dif}_p^\infty$ *.*

# Capítulo 3

# Métricas

Este capítulo estará dedicado al estudio de la clasificación de *jets* en un punto de métricas pseudo-riemannianas.

Concretamente, demostraremos que los invariantes diferenciales sirven para clasificar *jets* de métricas riemannianas, mientras que no bastan para clasificar *jets* de métricas pseudo-riemannianas.

Probaremos también que el espacio de clases (en el caso riemanniano) tiene estructura de espacio diferenciable, y que estratifica en variedades diferenciables, lo que motiva que decidamos referirnos a él como espacio de *moduli*. Describiremos de modo exhaustivo la naturaleza de dicho espacio de *moduli* en dimensión $2$ para órdenes bajos de *jets*.

Algunos de los resultados fundamentales de este capítulo pueden leerse también en [17].

Seguimos considerando que la variedad diferenciable $X$, salvo mención expresa diferente, tiene dimensión $n$.

## 3.1. Desarrollos normales

Consideremos sobre $X$ una métrica pseudo-riemanniana $g$ de signatura $(s_+, s_-)$, con $n = s_+ + s_-$, y sea $\nabla$ su conexión de Levi-Civita.

**Definición 3.1.1.** *Dada la métrica $g$ y dado $p \in X$, diremos que unas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ en un entorno de $p$ constituyen un* ***sistema de coordenadas normales*** *para $g$ en $p$ si verifican las siguientes condiciones:*

*(a) son normales para $\nabla$ en $p$ (véase la definición 2.1.1);*

*(b) la base de parciales $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ es una base ortonormal para la métrica en el punto, $g_p$; es decir,*

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} d_p x_i \otimes d_p x_i \,,$$

*con $\alpha_{ii} = \pm 1$.*

**Observación:** Dada la métrica $g$, un sistema de coordenadas centradas en $p$ es normal para $g$ en $p$ si, por la aplicación exponencial asociada a $\nabla$ (véase la observación de la página 23), se corresponde con un sistema lineal ortonormal de coordenadas en $T_pX$.

**Lema 3.1.1 (Gauss).** *Sea $x_1, \dots, x_n$ un sistema de coordenadas locales centradas en $p \in X$, de modo que la base de parciales $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p\}$ sea ortonormal para la métrica $g$ en $p$:*

$$g_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} d_p x_i \otimes d_p x_i \,,$$

*con $\alpha_{ii} = \pm 1$.*

*En el entorno donde dichas coordenadas estén definidas, sean $H = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i}$ el campo de las homotecias, y $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} dx_i \otimes dx_i$ la métrica plana.*

*El sistema $x_1, \dots, x_n$ es normal para $g$ en $p$ si, y solo si,*

$$i_H g = i_H \tilde{g} \,,$$

*es decir, si se satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i g_{ij} = \alpha_{jj} x_j \qquad (j = 1, \dots, n)\,. \tag{3.1}$$

*Demostración:* De modo similar al inicio de la demostración del lema 2.1.1, consideremos la expresión en las coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de la curva $\sigma(t) = (\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t)$, que tiene como vector tangente $T_t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\sigma(t)}$.

$\underline{(\Rightarrow)}$:

Supongamos que las coordenadas $x_1, \dots, x_n$ son normales para $g$; es decir, la curva $\sigma(t)$ es una geodésica. Como el producto $g(T_t, T_t)$ es constante a lo largo de una geodésica y en $p$ dicho producto vale $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \lambda_i^2$, entonces se tiene $g(T_t, T_t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \lambda_i^2$ en cualquier punto $\sigma(t)$.

Sobre esta geodésica, se verifica $H_{\sigma(t)} = t T_t$; por tanto, puesto que cualquier punto $p$ del entorno donde están definidas las coordenadas $x_1, \dots, x_n$ se puede escribir de la forma $p = \sigma(t) = (\lambda_1 t, \dots, \lambda_n t)$ (para ciertos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), obtenemos:

$$g(H_p, H_p) = g(H_{\sigma(t)}, H_{\sigma(t)}) = t^2 g(T_t, T_t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \lambda_i^2 t^2 = \tilde{g}(H_p, H_p)\,. \tag{3.2}$$

Por otra parte, si ahora usamos la ecuación 3.2 y que $\nabla_H H = H$ —esta última igualdad viene garantizada por el lema 2.1.1—, junto con que $[\partial_{x_k}, H] = \partial_{x_k}$, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} H(g(H, \partial_{x_k})) &= g(\nabla_H H, \partial_{x_k}) + g(H, \nabla_H \partial_{x_k}) = g(H, \partial_{x_k}) + g(H, [H, \partial_{x_k}] + \nabla_{\partial_{x_k}} H) \\ &= g(H, \partial_{x_k}) - g(H, \partial_{x_k}) + g(H, \nabla_{\partial_{x_k}} H) = \frac{1}{2}\frac{\partial g(H,H)}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2\right) \\ &= \alpha_{kk} x_k\,. \end{aligned}$$

Es decir, $H(g(H,\partial_{x_k}) - \alpha_{kk}x_k) = 0$, luego la función $g(H,\partial_{x_k}) - \alpha_{kk}x_k$ es constante a lo largo de las trayectorias de $H$ —las rectas que pasan por el origen de coordenadas, reparametrizadas—. Como tal función se anula además en el punto $p$, podemos concluir que $g(H,\partial_{x_k}) - \alpha_{kk}x_k$ es la función constantemente nula, o sea:

$$g(H,\partial_{x_k}) = \alpha_{kk}x_k = \tilde{g}(H,\partial_{x_k}) .$$

$\underline{(\Leftarrow)}$ :
Suponiendo cierto que $i_H g = i_H \tilde{g}$, comprobemos que $\nabla_H H = H$.
Por un lado, para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned} g(\nabla_H H,\partial_{x_k}) &= H(g(H,\partial_{x_k})) - g(H,\nabla_H \partial_{x_k}) \\ &= H(\alpha_{kk}x_k) - g(H,\nabla_H \partial_{x_k}) \\ &= \alpha_{kk}x_k - g(H,\nabla_H \partial_{x_k}) . \qquad (\diamond) \end{aligned}$$

Ahora bien, puede verse a continuación, sin más que usar la igualdad $[\partial_{x_k}, H] = \partial_{x_k}$ que ya empleamos en la demostración de la implicación directa, que el sustraendo del último miembro de las igualdades anteriores es igual a:

$$\begin{aligned} g(H,\nabla_H \partial_{x_k}) &= g(H,[H,\partial_{x_k}] + \nabla_{\partial_{x_k}} H) = -g(H,\partial_{x_k}) + g(H,\nabla_{\partial_{x_k}} H) \\ &= -g(H,\partial_{x_k}) + \frac{1}{2}\partial_{x_k}(g(H,H)) = -g(H,\partial_{x_k}) + \alpha_{kk}x_k , \end{aligned}$$

de donde se sigue, sustituyendo en ($\diamond$):

$$g(\nabla_H H,\partial_{x_k}) = g(H,\partial_{x_k}) , \quad \forall k \in \{1,\ldots,n\} ,$$

lo que sirve para concluir.

□

De modo análogo a aquello que hicimos en el capítulo 2 cuando enunciamos la definición 2.1.2, ahora también es posible, atendiendo a las ecuaciones 3.1 del lema 3.1.1, proponer la siguiente definición:

**Definición 3.1.2.** *Diremos que un sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ centradas en $p$ es un **sistema normal** para $j^r_p g$ si, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, se verifica:*

$$j^{r+1}_p \left( \sum_{i=1}^n x_i g_{ij} \right) = j^{r+1}_p \left( \alpha_{jj} x_j \right) .$$

De modo equivalente, un sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ centradas en $p$ será normal para $j^r_p g$ si, para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$, y para cualesquiera índices $k_1,\ldots,k_{r+1} \in \{1,\ldots,n\}$, se verifica que esta suma cíclica en los últimos $r+1$ índices es nula:

$$g_{jk_1;k_2\ldots k_{r+1}} + g_{jk_2;k_3\ldots k_{r+1}k_1} + \ldots + g_{jk_{r+1};k_1k_2\ldots k_r} = 0 , \qquad (3.3)$$

en la que se emplea la siguiente notación —con $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ cualquier colección de índices en $\{1, \ldots, n\}$—:

$$g_{ij;\alpha_1,\ldots,\alpha_r} := \frac{\partial^r g_{ij}}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_r}}(p)\,.$$

**Observación:** Si $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de coordenadas normales para una métrica $g$ en un entorno de $p$, entonces la identidad 3.1 del lema de Gauss da lugar a que $x_1, \ldots, x_n$ sean también normales para $j^r_p g$.

## Tensores normales

Dada la conexión de Levi-Civita $\nabla$ de $g$, sea $\overline{\nabla}$ el germen en $p \in X$ de la conexión lineal plana[10] que se corresponde vía la aplicación exponencial $\exp_\nabla$ con la conexión plana estándar sobre $T_pX$.

A continuación, definiremos los tensores normales de una métrica en un punto; esta próxima definición captura la información que se obtendría a partir de la definición 2.1.3 de tensores normales en un punto aplicada a la conexión de Levi-Civita de la métrica $g$, aunque con un acercamiento diferente, si bien similar, a la cuestión.

**Definición 3.1.3.** *Para cada entero $m \geq 1$, el* ***tensor normal*** *$r-$**ésimo** de la métrica $g$ en $p$ es $\overline{\nabla}^r_p g$.*

Si tomamos un sistema de coordenadas normales $x_1, \ldots, x_n$ para $g$ en torno a $p$, el tensor $\overline{\nabla}^r_p g$ tiene la siguiente expresión:

$$\overline{\nabla}^r_p g := \sum_{i,j,k_1,\ldots,k_r} g_{ij,k_1\ldots k_r}\, d_px_i \otimes d_px_j \otimes d_px_{k_1} \otimes \ldots \otimes d_px_{k_r}\,,$$

donde estamos usando esta notación:

$$g_{ij,k_1\ldots k_r} := \frac{\partial^r g_{ij}}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_r}}(p)\,. \tag{3.4}$$

**Definición 3.1.4.** *Sea $p \in X$. Para cada entero $r \geq 1$,* ***el espacio de tensores normales de orden*** *$r$* ***en*** *$p$, que denotaremos $N_r$, es el espacio vectorial de los tensores $(r+2)-$covariantes $T$ que verifican las siguientes simetrías:*

*(i) $T$ es simétrico en los dos primeros y en los $r$ últimos índices:*

$$T_{ijk_1\ldots k_r} = T_{jik_1\ldots k_r}\,,\ \ T_{ijk_1\ldots k_r} = T_{ijk_{\sigma(1)}\ldots k_{\sigma(r)}}\,,\ \ \textit{para cada } \sigma \in S_r\,;$$

*(ii) la suma cíclica sobre los últimos $r+1$ índices es $0$:*

$$T_{ijk_1\ldots k_r} + T_{ik_rjk_1\ldots k_{r-1}} + \ldots + T_{ik_1\ldots k_rj} = 0\,.$$

[10] En la página 26 ya hicimos uso de esta conexión auxiliar, clave para la definición del tensor normal asociado a una conexión $\nabla$ en $p \in X$.

Para $r = 0$, denotaremos por $N_0$ el conjunto de las métricas pseudo-riemannianas en $p$ de signatura $(s_+, s_-)$ —que, como es sabido, es un abierto de $S^2T_p^*X$, pero no un subespacio vectorial—.

Por otra parte, una cuenta sencilla muestra que $N_1 = 0$.

**Proposición 3.1.1.** *Dado cualquier entero* $r \geq 1$, *el tensor* $\overline{\nabla}_p^r g$ *asociado a la métrica* $g$ *en* $p$ *es un elemento de* $N_r$.

*Demostración:* Basta tomar un sistema de coordenadas normales $x_1, \ldots, x_n$ para $g$ en un cierto entorno de $p$. La expresión 3.4 del tensor $\overline{\nabla}_p^r g$ en dichas coordenadas sirve para verificar la simetría del tensor en sus dos primeros índices, así como en los $r$ últimos.

Para comprobar también que la suma cíclica sobre sus últimos $r+1$ índices es $0$, basta con derivar $r+1$ veces en la identidad del lema 3.1.1, y valorar en $p$.

$\square$

En particular, y en relación con el comentario que antecede a esta última proposición, el tensor normal de orden 1 de cualquier métrica es 0: $\overline{\nabla}_p^1 g = 0$.

**Observación:** Si, para cualquier entero $r$ mayor o igual que 1, denotamos por $s_{r+1}$ el operador de simetrización en los últimos $r+1$ índices, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow N_r \xhookrightarrow{\ i\ } S^2T_p^*X \otimes S^rT_p^*X \xrightarrow{s_{r+1}} T_p^*X \otimes S^{r+1}T_p^*X \longrightarrow 0\,. \tag{3.5}$$

El estudio de las dimensiones de los espacios presentes en la sucesión 3.5, junto con el hecho de que la dimensión de $X$ es $n$, nos da este resultado sobre la dimensión del espacio de tensores normales:

$$\dim N_r = \binom{n+1}{2}\binom{n+r-1}{r} - n\binom{n+r}{r+1}\,. \tag{3.6}$$

### 3.1.1. Teorema de reducción

De modo análogo al planteamiento seguido en el capítulo 2, para cualquier métrica pseudo-riemanniana $g$ de signatura $(s_+, s_-)$, denotaremos la sucesión de todos sus tensores normales en $p$ —excluyendo el de orden 1, por ser este siempre nulo, y asumiendo el valor de la métrica en el punto como su correspondiente «tensor normal de orden 0»— mediante $(g_p, \overline{\nabla}_p^2 g, \ldots, \overline{\nabla}_p^r g, \ldots)$.

Como la definición del tensor normal $\overline{\nabla}_p^r g$ solamente depende de $j_p^r g$, la siguiente aplicación, dado cualquier entero $r \geq 2$, está perfectamente definida:

$$\begin{array}{ccc} J_p^r M & \xrightarrow{\phi_r} & N_0 \times N_2 \times \ldots \times N_r \\ j_p^r g & \longmapsto & (g_p, \overline{\nabla}_p^2 g, \ldots, \overline{\nabla}_p^r g)\,. \end{array}$$

Puesto que su definición es absolutamente independiente de coordenadas, la aplicación $\phi_r$ es $\mathrm{Dif}_p^{r+1}$−equivariante.

En lo que sigue, estudiaremos el carácter de esta aplicación, de modo similar al análisis llevado a cabo en el apartado 2.1.1 del capítulo 2. Omitiremos las demostraciones de los próximos resultados técnicos, necesarios para la demostración del teorema de reducción 3.1.3, puesto que aquellas son enteramente análogas a las de los resultados correspondientes de aquel capítulo.

En primer lugar, recordemos la definición 1.2.4 para poder enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.2.** *Sean $j^r_p g$ y $j^r_p g'$ dos jets de orden $r$ de métricas pseudo-riemannianas en $p$. Ambos jets pertenecen a la misma fibra de $\phi_r$ si, y solo si, pertenecen a la misma órbita de $\mathrm{NDif}^{r+1}_p$.*

**Lema 3.1.2.** *Dado un entero $r \geq 0$, cada sistema local de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ alrededor de $p$ define una sección diferenciable (global) de $\phi_r$, cuya imagen son aquellos jets $j^r_p g$ para los que dichas coordenadas son normales.*

**Observación:** Una vez más, análogamente a lo que sucedía en el capítulo 2, para un cierto sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ en un entorno de $p$, si denotamos por $\mathcal{N}^r_p \subset J^r_p M$ la subvariedad formada por aquellos *jets* en $p$ de métricas pseudo-riemannianas, para los cuales $x_1, \ldots, x_n$ son coordenadas normales, la sección de $\phi_r$ de la que nos habla este último lema tiene como imagen justamente a $\mathcal{N}^r_p$, que es, como sucedía entonces, un *slice* —véase la nota al pie de la página 30— de la acción de $\mathrm{NDif}^{r+1}_p$ sobre $J^r_p M$.

**Teorema 3.1.3 (Reducción).** *Para cada entero $r \geq 0$, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} J^r_p M & \xrightarrow{\phi_r} & N_0 \times N_2 \times \ldots \times N_r \\ j^r_p g & \longmapsto & (g_p, \overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^r_p g)\,. \end{array}$$

*es una proyección regular epiyectiva, cuyas fibras son las órbitas de $\mathrm{NDif}^{r+1}_p$.*

*Por tanto, $\phi_r$ induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}_n-$variedades diferenciables:*

$$(J^r_p M)\,/\,\mathrm{NDif}^{r+1}_p \;=\!=\!=\; N_0 \times N_2 \ldots \times N_r\,.$$

*Demostración:* Dado un *jet* $j^r_p g$, construyamos una sección de $\phi_r$ que pase por él.

Cualquier sistema de coordenadas locales en torno a $p$ define una sección de $\phi_r$, según el lema 3.1.2. Para que dicha sección pase por $j^r_p g$ basta con escoger ese sistema de coordenadas de modo que sean normales para el *jet* en cuestión. Con esto tendremos una sección global de $\phi_r$ como la que buscábamos, con lo que queda probado que $\phi_r$ es una proyección regular epiyectiva.

Que las fibras de la proyección regular $\phi_r$ son las órbitas de $\mathrm{NDif}^{r+1}_p$ es justamente lo que afirma la proposición 3.1.2. Además, la aplicación $\phi_r$ es $\mathrm{Dif}^{r+1}_p$-equivariante, como ya fue observado anteriormente, y, puesto que (1.1) en la página 12 es una sucesión exacta de grupos de Lie, la proposición 1.1.2 y el corolario 1.1.1 sirven para concluir que $\mathrm{Gl}_n$

actúa sobre $(J^r_pM)\,/\,\mathrm{NDif}^{r+1}_p$ y que $\phi_r$ induce un isomorfismo de $\mathrm{Gl}_n$-variedades como el del enunciado.

$\square$

Damos ahora un par de resultados que nos permitirán identificar finalmente el espacio de clases $\mathsf{M}^r_{s_+,s_-} = (J^r_pM)/\mathrm{Dif}^{r+1}_p$ con el cociente de una representación lineal de un grupo de Lie clásico.

**Proposición 3.1.3.** *Existen isomorfismos de espacios anillados:*

$$\mathsf{M}^r_{s_+,s_-} =\!=\!=\!= ((J^r_pM)\,/\,\mathrm{NDif}^{r+1}_p)/\mathrm{Gl}_n =\!=\!=\!= (N_0 \times N_2 \ldots \times N_r)/\mathrm{Gl}_n\,.$$

*Demostración:* En realidad, el segundo isomorfismo es obvio, a partir del teorema 3.1.3, en cuanto demostremos el primero de los isomorfismos del enunciado.

Para ello, no hay más que aplicar la proposición 1.1.2, pues la siguiente es una sucesión exacta de grupos de Lie:

$$1 \longrightarrow \mathrm{NDif}^{r+1}_p \longrightarrow \mathrm{Dif}^{r+1}_p \longrightarrow \mathrm{Gl}_n \longrightarrow 1\,, \tag{3.7}$$

recordando de nuevo la identificación entre $\mathrm{Gl}_n$ y $\mathrm{Dif}^1_p$.

$\square$

**Teorema 3.1.4.** *Para cualquier entero $r \geq 2$, existe un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\mathsf{M}^r_{s_+,s_-} =\!=\!=\!= (N_2 \ldots \times N_r)/\mathrm{O}_{s_+,s_-}\,.$$

*Demostración:* Dada una métrica $g_p$ de signatura $(s_+, s_-)$ sobre $T_pX$, su subgrupo de isotropía por la acción de $\mathrm{Gl}_n$ es el grupo ortogonal $\mathrm{O}(g_p) \simeq \mathrm{O}_{s_+,s_-}$.

Basta ahora usar la proposición 3.1.3 junto con la proposición 1.1.3 para obtener el isomorfismo del enunciado.

$\square$

## 3.2. Espacios de *moduli* de *jets* de orden finito de métricas riemannianas

Aplicando las definiciones 1.3.3 y 1.3.8, podemos enunciar la siguiente definición:

**Definición 3.2.1.** *Un* ***invariante diferencial (escalar) de orden (menor o igual que)*** *$r$ de métricas pseudo-riemannianas de signatura $(s_+, s_-)$ es una función real diferenciable definida (globalmente) sobre $\mathsf{M}^r_{s_+,s_-} = J^r_pM/\mathrm{Dif}^{r+1}_p$.*

Debido a la estructura de espacio anillado cociente de $\mathsf{M}^r_{s_+,s_-}$, se tiene:

$$\{\text{Invariantes diferenciales de orden menor o igual que } r\} =$$

$$= \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}^r_{s_+,s_-}) = \mathcal{C}^\infty(J^r_pM)^{\mathrm{Dif}^{r+1}_p}\,.$$

**Teorema 3.2.1.** *Existe un número finito* $q_1, \dots, q_s \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}^r_{s_+,s_-})$ *de invariantes diferenciales escalares de orden menor o igual que* $r$ *, tales que cualquier otro invariante diferencial* $f$ *de orden menor o igual que* $r$ *es una función diferenciable de los primeros; es decir,* $f = F(q_1, \dots, q_s)$ *, para alguna función* $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^s)$ *.*

*Demostración:* Como consecuencia del teorema 3.1.4,

$$\mathcal{C}^\infty(\mathsf{M}^r_{s_+,s_-}) = \mathcal{C}^\infty(N_2 \times \dots \times N_r)^{\mathrm{O}_{s_+,s_-}} .$$

Basta aplicar el resultado de Luna A.1 a la representación lineal $N_2 \times \dots \times N_r$ del grupo ortogonal $\mathrm{O}_{s_+,s_-}$ , lo cual asegura la existencia de una colección finita de funciones $\mathrm{O}_{s_+,s_-}-$invariantes, $q_1, \dots, q_s$ , que generan el álgebra $\mathcal{C}^\infty(N_2 \times \dots \times N_r)^{\mathrm{O}_{s_+,s_-}}$ , de modo que toda función $\mathrm{O}_{s_+,s_-}-$invariante diferenciable sobre $N_2 \times \dots \times N_r$ puede escribirse de la siguiente forma: $f = F(q_1, \dots, q_s)$ , para alguna función diferenciable $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^s)$ .

□

La versión de este mismo teorema para métricas riemannianas puede encontrarse en [26].

**Observación:** La sucesión de tensores normales $\{\overline{\nabla}^2_p g, \dots, \overline{\nabla}^r_p g\}$ es equivalente (véase [20]) a la sucesión $\{R_p, \nabla_p R, \dots, \nabla^{r-2}_p R\}$ —donde estamos escribiendo el tensor de curvatura $R$ de la métrica $g$ y sus sucesivas derivadas covariantes con su conexión de Levi-Civita—; se puede probar que los generadores $q_1, \dots, q_s$ del teorema 3.2.1 pueden escogerse como *invariantes de Weyl*, esto es, según la teoría de invariantes del grupo ortogonal (teorema A.4), cantidades escalares construidas a partir de la sucesión $\{R_p, \nabla_p R, \dots, \nabla^{r-2}_p R\}$ mediante combinación reiterada de las siguientes operaciones: productos tensoriales, subir y bajar índices, contracciones y combinaciones $\mathbb{R}-$lineales.

## El espacio de *moduli* de *jets* de métricas riemannianas

El resultado que sigue justifica que nos refiramos al espacio de clases de equivalencia de *jets* de métricas riemannianas $\mathsf{M}^r_n$ como espacio de *moduli*.

**Teorema 3.2.2.** *Los invariantes diferenciales de orden menor o igual que* $r$ *separan puntos en el espacio de* moduli $\mathsf{M}^r_n$ *.*

*Por consiguiente, los invariantes diferenciales escalares de orden menor o igual que* $r$ *clasifican los* $r-$*jets de métricas riemannianas en un punto.*

*Demostración:*

Para cualquier métrica definida positiva $g_p$ sobre $T_pX$ , su grupo ortogonal $\mathrm{O}(g_p) \simeq \mathrm{O}_n$ es compacto.

Es un resultado clásico que, si $V$ es una representación lineal de un grupo de Lie compacto $G$ , entonces las funciones $G-$invariantes diferenciables sobre $V$ separan las órbitas de la acción de $G$ . Esbocemos aquí el argumento:

Para cualquier función diferenciable $f$ sobre $V$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(V) \\ g & \longmapsto & g\cdot f\,, \end{array}$$

donde $(g\cdot f)(v) = f(g^{-1}\cdot v)$, es continua. (Véase [28, Lema 11.7, pág. 134]). De modo que, promediando sobre $G$,

$$\bar{f} := \int_G (g\cdot f)\,dg\,,$$

siendo $dg$ la única medida invariante por la izquierda sobre $G$, tal que $\int_G dg = 1$, conseguimos una función diferenciable $G-$invariante $\bar{f}$ sobre $V$.

Las órbitas de $G$, puesto que este es compacto, son cerradas. Por ello, dadas dos órbitas distintas (disjuntas), digamos $\{g\cdot v_1\}_{g\in G}$, $\{g\cdot v_2\}_{g\in G}$, existe alguna función diferenciable $f$ sobre $V$ que las separa; es decir, digamos $f(g\cdot v_1) = 1$, para todo $g\in G$, y $f(g\cdot v_2) = 0$, para todo $g\in G$.

Promediando dicha función sobre $G$, como hemos indicado anteriormente, obtenemos una función diferenciable y $G-$invariante, $\bar{f}$, que vale 1 y 0, respectivamente, sobre cada una de las dos órbitas.

En otras palabras, el álgebra $\mathcal{C}^\infty(V/G)$ separa puntos de $V/G$.

Para concluir la demostración del teorema, basta aplicar lo dicho a la representación lineal $N_2\times\ldots\times N_r$ de $O_n$ cuyo cociente es isomorfo como espacio anillado a $\mathsf{M}_n^r$, según afirma el teorema 3.1.4.

□

Para métricas pseudo-riemannianas, el teorema 3.2.2 no es cierto. En la página 59, detallamos un contraejemplo, y en la sección 3.4 estudiaremos con más atención el espacio de clases de *jets* de órdenes bajos de métricas de signatura $(1,1)$ en dimensión 2. En general, los espacios de clases $\mathsf{M}_{s_+,s_-}^r$ son patólogicos en un sentido topológico, puesto que no son espacios $\mathrm{T}_1$ —esto es, tienen puntos que no son cerrados—.

En todo lo que queda de esta sección, nos centraremos exclusivamente en el estudio de los espacios de *moduli* de *jets* de métricas riemannianas.

Podemos enunciar, en primer lugar, el siguiente resultado sobre la estructura de los espacios de *moduli*:

**Teorema 3.2.3.** *Los espacios de* moduli $\mathsf{M}_n^r$ *son espacios diferenciables.*

*Demostración:* El teorema 3.1.4 y el teorema 1.1.2 de Schwarz nos sirven directamente para probar el enunciado.

□

Precisemos algo más cuál es la estructura de espacio diferenciable del espacio $\mathsf{M}_n^r$.

Si tomamos un sistema de generadores $q_1,\ldots,q_s$ de los invariantes diferenciales de orden menor o igual que $r$ —cuya existencia nos garantiza el teorema 3.2.1—, estos generadores invariantes definen un isomorfismo de espacios diferenciables:

$$(q_1,\ldots,q_s) : \mathsf{M}_n^r \;=\!=\!=\; Z \subseteq \mathbb{R}^s\,,$$

siendo $Z$ un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^s$ .

En general, el espacio diferenciable $\mathsf{M}_n^r$ no es una variedad diferenciable. Sin embargo, a pesar de lo que pudiera parecer, no tiene una estructura demasiado pobre, pues vamos a comprobar a continuación que admite una estratificación finita en subvariedades diferenciables.

Consideremos $V_n = \mathbb{R}^n$ dotado de su producto escalar estándar $\delta$ , y su correspondiente grupo ortogonal, $\mathrm{O}_n := \mathrm{O}\,(V_n, \delta)$ . Denotaremos por $\mathcal{T}$ el conjunto de clases de conjugación de subgrupos cerrados de $\mathrm{O}_n$ .

Dado cualquier otro espacio vectorial $n-$dimensional $V_n'$ con un producto interior $\delta'$ , podemos considerar también el conjunto $\mathcal{T}'$ de clases de conjugación de subgrupos cerrados de $\mathrm{O}\,(V_n', \delta')$ .

Cualquier isometría $\varphi : (V_n, \delta) \to (V_n', \delta')$ permite establecer la siguiente identificación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}' \\ [H] & \longmapsto & [\varphi \circ H \circ \varphi^{-1}] \ . \end{array}$$

La identificación es canónica, pues no depende de la isometría escogida $\varphi$ .

Por tanto, en lo sucesivo siempre consideraremos el conjunto $\mathcal{T}$ como el mismo para cualquier pareja $(V_n', \delta')$ .

En $\mathcal{T}$ existe una relación de orden parcial; a saber:

$$[H] \leq [H'] \,,$$

si existen representantes $H$ y $H'$ (de $[H]$ y $[H']$ , respectivamente), tales que $H \subseteq H'$ .

**Definición 3.2.2.** *Dado un jet de métricas riemannianas $j_p^r g$ , su* ***grupo de automorfismos*** *es el subgrupo estabilizador $\mathrm{Aut}\,(j_p^r g) \subseteq \mathrm{Dif}_p^{r+1}$ de $j_p^r g$ :*

$$\mathrm{Aut}\,(j_p^r g) := \{ j_p^{r+1}\tau \in \mathrm{Dif}_p^{r+1} : j_p^r(\tau^* g) = j_p^r g \} \,.$$

**Lema 3.2.4.** *El siguiente morfismo de grupos es inyectivo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}\,(j_p^r g) & \longrightarrow & \mathrm{O}\,(T_pX, g_p) \simeq \mathrm{O}_n \\ j_p^{r+1}\tau & \longmapsto & \tau_{*,p} \ , \end{array}$$

*donde mediante $\tau_{*,p}$ estamos denotando la aplicación lineal tangente $\tau_{*,p} : T_pX \to T_pX$ del difeomorfismo $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ en $p$ .*

*Demostración:*

Para cualquier $\tau \in \mathrm{Dif}_p$ y cualquier métrica $g$ sobre $X$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo de difeomorfismos locales:

$$\begin{tikzcd} T_pX \arrow[r, "\exp_{\tau^* g}"] \arrow[d, "\tau_*"'] & X \arrow[d, "\tau"] \\ T_pX \arrow[r, "\exp_g"'] & X \,. \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Si $j_p^{r+1}\tau \in \mathrm{Aut}\,(j_p^r g)$ , es decir, si $j_p^r(\tau^* g) = j_p^r g$ , entonces $j_0^{r+1}(\exp_{\tau^* g}) = j_0^{r+1}(\exp_g)$ .

Si ahora tomamos *jets* de orden $r+1$ en el diagrama conmutativo 3.8, entonces se obtiene:

$$j_p^{r+1}\tau = j_0^{r+1}(\exp_g) \circ j_0^{r+1}\tau_* \circ j_p^{r+1}(\exp_g^{-1})\,,$$

de donde se sigue que $j_p^{r+1}\tau$ está determinado exclusivamente por su parte lineal $\tau_*$ .

$\square$

Gracias al lema 3.2.4, podemos entender el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}\,(j_p^r g)$ como un subgrupo —determinado salvo conjugación— del grupo ortogonal $\mathrm{O}_n$ .

**Definición 3.2.3.** *La **aplicación de tipo** es como sigue:*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_n^r & \stackrel{t}{\longrightarrow} & \mathcal{T} \\ \left[j_p^r g\right] & \longmapsto & \left[\mathrm{Aut}\,(j_p^r g)\right] \end{array}.$$

*Para cada clase de conjugación $[H] \in \mathcal{T}$ —en adelante, para cada tipo—, el **estrato de tipo** $[H]$ es el subconjunto $S_{[H]} \subseteq \mathsf{M}_n^r$ formado por todos aquellos puntos cuyo tipo es $[H]$ .*

El teorema que enunciamos a continuación describe cuál es la estructura del espacio diferenciable $\mathsf{M}_n^r$ , y cómo este espacio se «estratifica» en subvariedades diferenciables.

**Teorema 3.2.5.** *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *La aplicación de tipo $t : \mathsf{M}_n^r \to \mathcal{T}$ toma un número finito de valores $[H_0] \ldots, [H_k]$ ; además, uno de ellos, digamos $[H_0]$ , es mínimo.*

2. *La aplicación $t$ es semicontinua: para cada tipo $[H] \in \mathcal{T}$ , el conjunto de puntos de $\mathsf{M}_n^r$ de tipo menor o igual que $[H]$ es un subconjunto abierto de $\mathsf{M}_n^r$ . En particular, todo estrato $S_{[H_i]}$ (con $i \in \{0, \ldots, k\}$ ) es un subespacio localmente cerrado de $\mathsf{M}_n^r$ .*

3. *Todo estrato $S_{[H_i]}$ (para $i \in \{0, \ldots, k\}$ ) es una subvariedad diferenciable de $\mathsf{M}_n^r$ .*

4. *El **estrato genérico** $S_{[H_0]}$ de tipo mínimo es un subconjunto abierto, denso y conexo de $\mathsf{M}_n^r$ .*

*Demostración:*

Fijemos una métrica definida positiva $\delta_p$ sobre $T_pX$ , y denotemos mediante $\mathrm{O}_n$ su grupo ortogonal. Por el teorema 3.1.4, escrito para métricas riemannianas, sabemos que existe un isomorfismo

$$\mathsf{M}_n^r =\!=\!=\!= (N_2 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{O}_n\,.$$

Este isomorfismo lleva cada elemento del espacio de *moduli*, $[j_p^r g] \in \mathsf{M}_n^r$ , siendo $g_p = \delta_p$ , a la clase de equivalencia, módulo la acción del grupo ortogonal de la correspondiente sucesión de tensores normales, $[(\overline{\nabla}_p^2 g, \ldots, \overline{\nabla}_p^r g)] \in (N_2 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{O}_n$ .

Comprobemos que el subgrupo

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}\,(j^r_p g) &\hookrightarrow \mathrm{O}_n \\ j^{r+1}_p \tau &\longmapsto \tau_* \,, \end{aligned}$$

donde de nuevo estamos usando $\tau_*$ para designar a la aplicación lineal tangente del difeomorfismo local $\tau$ , coincide con el subgrupo

$$\mathrm{Aut}\,(\overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^r_p g) := \{\sigma \in \mathrm{O}_n : \sigma^*(\overline{\nabla}^k_p g) = \overline{\nabla}^k_p g \,, \forall k \leq r\} \,.$$

Obviamente, si un automorfismo $j^{r+1}_p \tau$ deja $j^r_p g$ fijo, entonces su sucesión de tensores normales también debe permanecer fija por el automorfismo: $\tau^*(\overline{\nabla}^k_p g) = \overline{\nabla}^k_p g$ .

Recíprocamente, dado un automorfismo $\sigma : T_pX \to T_pX$ de la sucesión de tensores normales $(\overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^r_p g)$ , consideremos un sistema de coordenadas normales $x_1, \ldots, x_n$ para $g$ en $p$ .

Por la identificación definida por la aplicación exponencial $\exp_g : T_pX \to X$ , la aplicación $\sigma$ puede verse como un difeomorfismo de $X$ (una transformación lineal de sistemas normales de coordenadas).

En coordenadas normales, la expresión del tensor normal $\overline{\nabla}^k_p g$ se corresponde con la expresión de la parte homogénea de grado $k$ del *jet* $j^r_p g$ . Por tanto, se sigue inmediatamente que la aplicación lineal $\sigma$ deja $j^r_p g$ fijo; es decir, $j^{r+1}_p g \in \mathrm{Aut}\,(j^r_p g)$ .

La identificación entre los subgrupos $\mathrm{Aut}\,(j^r_p g)$ y $\mathrm{Aut}\,(\overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^2_p g)$ que acabamos de comprobar hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{M}^r_n \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & \mathcal{T} \arrow[d, equal] \\ (N_2 \times \ldots \times N_r)/\mathrm{O}_n \arrow[r, "t"] & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

$$[(\overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^r_p g)] \longmapsto [\mathrm{Aut}\,(\overline{\nabla}^2_p g, \ldots, \overline{\nabla}^r_p g)] \,.$$

Así pues, la demostración del teorema ha quedado reducida al estudio de una representación lineal $V(= N_2 \times \ldots \times N_r)$ de un grupo de Lie compacto $G(= \mathrm{O}_n)$ y su correspondiente aplicación de tipo:

$$\begin{aligned} V/G &\xrightarrow{t} \mathcal{T} = \{\text{clases de conjugación de subgrupos cerrados de } G\} \\ [v] &\longmapsto [\text{Subgrupo estabilizador de } v] \,. \end{aligned}$$

Para esta aplicación de tipo, las propiedades análogas a las del enunciado del teorema (de *1* a *4*) son bien conocidas en la literatura. (Véanse, por ejemplo, en [3], el teorema 2 y el ejercicio 9 de la sección 9 del capítulo IX).

□

**Observaciones:**

1. Salvo para casos triviales, el estrato genérico tiene como tipo (la clase de conjugación de) el grupo trivial: $H_0 = \{\mathrm{Id}\}$ .

2. A partir del teorema 3.1.4 y de la fórmula 3.6 sobre la dimensión de los espacios $N_r$ de tensores normales, se puede calcular de modo muy sencillo la dimensión del estrato genérico de los espacios de *moduli* $\mathsf{M}_n^r$ . Recuperamos así, mediante otras herramientas y expresándolo en otro lenguaje, el resultado siguiente, que puede leerse en [25]:
$$\dim \mathsf{M}_n^0 = \dim \mathsf{M}_n^1 = 0\,, \quad \forall n \geq 1\,,$$
$$\dim \mathsf{M}_1^r = 0\,, \quad \forall r \geq 0\,,$$
$$\dim \mathsf{M}_2^2 = 1\,, \quad \dim \mathsf{M}_2^r = \frac{1}{2}(r+1)(r-2)\,, \quad \forall r \geq 3\,,$$
$$\dim \mathsf{M}_n^r = n + \frac{(r-1)n^2 - (r+1)n}{2(r+1)} \binom{n+r}{r}\,, \quad \forall n \geq 3\,,\ r \geq 2\,.$$

3. El teorema 3.2.5 no es cierto para métricas pseudo-riemannianas. Veremos posteriormente, cuando en la sección 3.4 expongamos con más detalle el caso pseudo--riemanniano en dimensión $2$ , que suceden los siguientes hechos:

   - La aplicación de tipo no es semicontinua.
   - Algunos estratos no son variedades diferenciables, ni siquiera espacios topológicos separados.
   - Si, a pesar de lo dicho en el punto anterior, seguimos llamándolos «estratos», el estrato de tipo mínimo no es ni abierto ni denso.

   Es decir, en el caso de las métricas pseudo-riemannianas, fijar el tipo no basta para obtener una estratificación diferenciable, como la que nos garantiza el teorema 3.2.5 para el caso riemanniano.

## 3.3. Cálculos en dimensión 2

Determinemos la estratificación de los espacios de *moduli* $\mathsf{M}_2^r$ de *jets* de orden $r$ de métricas riemannianas en dimensión 2.

Fijemos algunas notaciones. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , dotado de la métrica euclídea estándar, y sea $\mathrm{O}_2$ su correspondiente grupo ortogonal. Denotaremos mediante $x\,, y$ las coordenadas cartesianas reales y mediante $z = x + iy$ la coordenada compleja.

Sea $\sigma_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el giro con centro en $0$ de ángulo $\frac{2\pi}{m}$ —por tanto, $\sigma_m(z) = \varepsilon_m z$ , donde $\varepsilon_m = \cos(\frac{2\pi}{m}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{m})$ es una raíz primitiva $m-$ésima de la unidad—, y denotemos por
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \tau(z) = \bar{z}\,, \end{array}$$

la conjugación compleja.

Los únicos subgrupos cerrados de $\mathrm{O}_2$ (salvo conjugación) son los siguientes:

- el grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}_2 := \{\varphi \in \mathrm{O}_2 : \det \varphi = 1\}$ ;
- el grupo de giros de orden $m$ , con $m \geq 1$ : $K_m := \langle \sigma_m \rangle$ ;
- el grupo diédrico de orden $2m$ , con $m \geq 1$ : $D_m := \langle \sigma_m, \tau \rangle$ ;
- y, por supuesto, el propio $\mathrm{O}_2$ .

Todos ellos son normales en $\mathrm{O}_2$ , excepto el grupo diédrico $D_m$ .

El subgrupo $\mathrm{SO}_2$ se identifica con el grupo multiplicativo $S_1 \subset \mathbb{C}$ de números complejos de módulo 1:

$$\begin{array}{ccc} S_1 & = & \mathrm{SO}_2 \\ \alpha & \longmapsto & \rho_\alpha \, , \end{array}$$

donde $\rho_\alpha(z) := \alpha z$ .

Obsérvese que cualquier elemento de $\mathrm{O}_2$ es, bien de la forma $\rho_\alpha$ , bien de la forma $\tau\rho_\alpha$ , para algún $\alpha \in S_1$ .

La acción natural de $\mathrm{O}_2$ sobre $\mathbb{R}^2$ induce una acción sobre el álgebra de polinomios $\mathbb{R}[x,y]$ ; concretamente:

$$\varphi \cdot P(x,y) := P(\varphi^{-1}(x,y)) \, ,$$

con $\varphi \in \mathrm{O}_2$ .

En el siguiente resultado enunciaremos la lista de todos los polinomios invariantes con respecto a cada uno de los subgrupos de $\mathrm{O}_2$ que hemos mencionado anteriormente:

**Lema 3.3.1.** *Se verifican las siguientes identidades, en las que* $p_m(x,y) = \mathrm{Re}(z^m)$ *y* $q_m(x,y) = \mathrm{Im}(z^m)$ *:*

1. $\mathbb{R}[x,y]^{K_m} = \mathbb{R}[x^2+y^2, p_m(x,y), q_m(x,y)]$ .
2. $\mathbb{R}[x,y]^{D_m} = \mathbb{R}[x^2+y^2, p_m(x,y)]$ .
3. $\mathbb{R}[x,y]^{\mathrm{O}_2} = \mathbb{R}[x,y]^{\mathrm{SO}_2} = \mathbb{R}[x^2+y^2]$ .

*Demostración:*

1. En primer lugar, consideremos el álgebra de polinomios sobre $\mathbb{R}^2$ con coeficientes complejos:

$$\mathbb{C}[x,y] = \mathbb{C}[z,\bar{z}] = \bigoplus_{a,b} \mathbb{C} z^a \bar{z}^b \, .$$

Cada sumando de esa suma directa es estable por la acción de $K_m$ , pues tenemos:

$$\sigma_m \cdot (z^a \bar{z}^b) = \frac{1}{\varepsilon_m^a \bar{\varepsilon}_m^b} z^a \bar{z}^b = \varepsilon_m^{b-a} z^a \bar{z}^b \, .$$

De esta fórmula se sigue que el monomio $z^a\bar{z}^b$ es invariante por $K_m$ si, y solo si, $b-a\equiv 0 \text{ mód } m$, es decir, si $b-a=\pm km$, para algún $k\in\mathbb{N}$. Por tanto, los monomios invariantes son todos de la forma siguiente:

$$z^a\bar{z}^b=(z\bar{z})^a\bar{z}^{km}\,,\ \text{ o bien }\ z^a\bar{z}^b=(z\bar{z})^b z^{km}\,,$$

de donde podemos escribir:

$$\mathbb{C}[x,y]^{K_m}=\mathbb{C}[z\bar{z},z^m,\bar{z}^m]\,.$$

Ahora bien, puesto que $z\bar{z}=x^2+y^2$, $z^m+\bar{z}^m=2p_m(x,y)$ y $z^m-\bar{z}^m=2iq_m(x,y)$, entonces conseguimos la siguiente identidad:

$$\mathbb{C}[x,y]^{K_m}=\mathbb{C}[x^2+y^2,p_m(x,y),q_m(x,y)]\,,$$

y, en particular:

$$\mathbb{R}[x,y]^{K_m}=\mathbb{R}[x^2+y^2,p_m(x,y),q_m(x,y)]\,.$$

2. Como el grupo diédrico $D_m=\langle K_m,\tau\rangle$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x,y]^{D_m}&=(\mathbb{C}[x,y]^{K_m})^{\langle\tau\rangle}=\mathbb{C}[z\bar{z},z^m,\bar{z}^m]^{\langle\tau\rangle}\\&=\left[\left(\bigoplus_k\mathbb{C}[z\bar{z}]z^{km}\right)\oplus\left(\bigoplus_k\mathbb{C}[z\bar{z}]\bar{z}^{km}\right)\right]^{\langle\tau\rangle}\overset{11}{=}\bigoplus_k\mathbb{C}[z\bar{z}](z^{km}+\bar{z}^{km})\\&=\mathbb{C}[z\bar{z},z^m+\bar{z}^m]=\mathbb{C}[x^2+y^2,p_m(x,y)]\,,\end{aligned}$$

lo que nos da en particular:

$$\mathbb{R}[x,y]^{D_m}=\mathbb{R}[x^2+y^2,p_m(x,y)]\,.$$

3. Cada sumando de la descomposición

$$\mathbb{C}[z,\bar{z}]=\bigoplus_{a,b}\mathbb{C}z^a\bar{z}^b$$

es estable por la acción de $SO_2$, puesto que, para cada $\rho_\alpha\in SO_2$, se verifica la siguiente igualdad:

$$\rho_\alpha\cdot(z^a\bar{z}^b)=\frac{1}{\alpha^a\bar{\alpha}^b}z^a\bar{z}^b\,.$$

Esta fórmula sirve también para garantizar que los únicos monomios $z^a\bar{z}^b$ que son $SO_2-$invariantes son precisamente aquellos que verifican $a=b$. Por tanto, se tienen estas identidades:

$$\mathbb{C}[x,y]^{SO_2}=\mathbb{C}[z,\bar{z}]^{SO_2}=\mathbb{C}[z\bar{z}]=\mathbb{C}[x^2+y^2]\,,$$

[11] Obsérvese que $\tau\cdot z=\bar{z}$ y $\tau\cdot\bar{z}=z$.

que producen, en particular:

$$\mathbb{R}[x,y]^{\mathrm{SO}_2} = \mathbb{R}[x^2+y^2]\,.$$

Esta última identidad muestra que los polinomios $\mathrm{SO}_2-$invariantes son también $\mathrm{O}_2-$invariantes, y, por tanto, la inclusión obvia $\mathbb{R}[x,y]^{\mathrm{O}_2} \subseteq \mathbb{R}[x,y]^{\mathrm{SO}_2}$ es realmente una igualdad.

$\square$

**Corolario 3.3.2.** *Usando las mismas notaciones del lema 3.3.1, se verifican las siguientes proposiciones:*

1. $D_m$ *es el subgrupo estabilizador del polinomio* $p_m(x,y)$ *, y no existe ningún polinomio en* $\mathbb{R}[x,y]$ *de grado menor que* $m$ *cuyo subgrupo estabilizador sea* $D_m$ *.*
2. $K_m$ *es el subgrupo estabilizador del polinomio* $p_m(x,y) + (x^2+y^2)q_m(x,y)$ *(para* $m \geq 2$ *), y no hay polinomios en* $\mathbb{R}[x,y]$ *de grado menor que* $m+2$ *cuyo subgrupo estabilizador sea* $K_m$ *.*
3. $K_1 = \{\mathrm{Id}\}$ *es el subgrupo estabilizador del polinomio* $x+xy$ *, y no existe ningún polinomio en* $\mathbb{R}[x,y]$ *de grado menor que 2 cuyo subgrupo estabilizador sea* $K_1$ *.*

*Demostración:*

1. Usando que todo elemento de $\mathrm{O}_2$ es, bien de la forma $\rho_\alpha$ , bien de la forma $\rho_\alpha \circ \tau$ , es rutinario comprobar que el subgrupo estabilizador del polinomio $p_m(x,y) = \mathrm{Re}(z^m)$ es $D_m$ .

   Si hubiera otro polinomio $\tilde{p}(x,y)$ de grado menor que $m$ con la misma propiedad, $\tilde{p}(x,y)$ debería ser una potencia de $x^2+y^2$ , por el segundo apartado del lema 3.3.1, y en ese caso su subgrupo estabilizador sería todo $\mathrm{O}_2$ , lo que contradiría nuestras hipótesis.

2. Según el primer apartado del lema 3.3.1, todo polinomio $K_m-$invariante de grado menor o igual que $m$ es de la forma $\lambda p_m(x,y) + \mu q_m(x,y)$ (salvo suma de alguna potencia de $x^2+y^2$ ).

   No obstante, el subgrupo estabilizador de un polinomio así no es $K_m$ , sino un grupo diédrico mayor. De hecho, sin más que multiplicar por algún escalar, podemos suponer que $\lambda^2+\mu^2=1$ ; si tomamos $\alpha = \lambda - i\mu$ , entonces el polinomio

   $$\begin{aligned} \lambda p_m(x,y) + \mu q_m(x,y) &= \mathrm{Re}(\alpha z^m) = \mathrm{Re}((\beta z)^m) \qquad (\text{donde } \beta^m = \alpha) \\ &= \rho_{\beta^{-1}} \cdot \mathrm{Re}(z^m) = \rho_{\beta^{-1}} \cdot p_m(x,y) \end{aligned}$$

   tiene como estabilizador el grupo diédrico $\rho_{\beta^{-1}} \cdot D_m \cdot \rho_\beta$ , conjugado del subgrupo estabilizador $D_m$ de $p_m(x,y)$ .

(Si tomamos $\lambda = 0$, $\mu = -1$, obtenemos que el estabilizador de $q_m(x,y)$ es el diédrico $\rho_{\beta^{-1}} \cdot D_m \cdot \rho_\beta$, para $\beta^m = i$).

Como ningún polinomio de grado menor o igual que $m$ tiene como estabilizador el subgrupo $K_m$, y no hay polinomios $K_m-$invariantes de grado $m+1$ —salvo una potencia de $x^2+y^2$—, el siguiente grado que debemos considerar es $m+2$.

El subgrupo estabilizador del polinomio $p_m(x,y)+(x^2+y^2)q_m(x,y)$ es la intersección de los subgrupos estabilizadores respectivos de sus dos componentes homogéneas, $p_m(x,y)$ y $(x^2+y^2)q_m(x,y)$, es decir (con $\beta$ tal que $\beta^m = i$):

$$D_m \cap (\rho_{\beta^{-1}} \cdot D_m \cdot \rho_\beta) = K_m .$$

3. Este caso es trivial.

□

**Teorema 3.3.3.** *Los estratos del espacio de moduli $\mathsf{M}_2^r$ se corresponden justamente con los siguientes tipos:*

$$[\mathrm{O}_2]\,,[D_1]\,,...,[D_{r-2}]\,,[K_1]\,,...,[K_{r-4}]\,.$$

*(También $[K_1]$, si $r=4$).*

*Demostración:* Es un resultado clásico de Geometría Diferencial (véase, por ejemplo, en [9]) que en dimensión 2 toda métrica riemanniana $g$ puede escribirse en coordenadas normales $x,y$ —de modo único, salvo transformaciones ortogonales— del siguiente modo:

$$g = dx^2 + dy^2 + h(x,y)(ydx - xdy)^2\,,$$

para alguna función diferenciable $h(x,y)$.

Obsérvese que el subgrupo de $\mathrm{O}_2$ estabilizador para el *jet* $j_0^k h$ es el mismo que para $j_0^{k+2} g$.

Si tomamos $h(x,y)=0$, obtenemos una métrica —la euclídea, es decir, $g = dx^2+dy^2$— cuyo grupo de automorfismos (para cualquier orden de *jet*) es $\mathrm{O}_2$.

Haciendo $h(x,y) = p_m(x,y)$, tendremos un $r-$*jet* de métricas (con $r \geq m+2$) cuyo subgrupo estabilizador es $D_m$, debido al primer apartado del corolario 3.3.2.

Tomando $h(x,y) = p_m(x,y) + (x^2+y^2)q_m(x,y)$, obtenemos un $r-$*jet* de métricas (con $r \geq m+4$), cuyo subgrupo estabilizador es $K_m$, por el segundo apartado del corolario 3.3.2.

Si escogemos $h(x,y) = x + xy$, entonces conseguimos un $r-$*jet* de métricas (con $r \geq 4$) cuyo estabilizador es $K_1$, según el tercer apartado del corolario 3.3.2.

Por último, téngase en cuenta que ningún $r-$*jet* de métricas puede tener como subgrupo estabilizador $\mathrm{SO}_2$, puesto que tal métrica correspondería forzosamente a un *jet* $j_0^{r-2}h$ cuyo estabilizador debería ser $\mathrm{SO}_2$, ya que, por el tercer apartado del lema 3.3.1, todo polinomio $\mathrm{SO}_2-$invariante es también $\mathrm{O}_2-$invariante.

□

**Corolario 3.3.4.** *Todo subgrupo cerrado de* $\mathrm{O}_2$ , *salvo* $\mathrm{SO}_2$ , *es el grupo de automorfismos de un jet de métricas* $j_0^r g$ *en* $\mathbb{R}^2$ *para algún orden* $r$ .

**Corolario 3.3.5.** *El número de estratos de* $\mathsf{M}_2^r$ *es:*

$$\textit{Número de estratos de } \mathsf{M}_2^r = \begin{cases} 1 & \textit{para } r = 0, 1, 2\,, \\ 2 & \textit{para } r = 3\,, \\ 4 & \textit{para } r = 4\,, \\ 2r - 5 & \textit{para } r \geq 5\,. \end{cases}$$

Describimos a continuación los *jets* de orden bajo en dimensión $n = 2$ .

Para orden $r = 0, 1$ , en cualquier dimensión $n$ , los espacios de *moduli* $\mathsf{M}_n^r$ se reducen a un único punto.

- Caso $r = 2$ :

  El espacio de *moduli* es una recta:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_2^2 & = & \mathbb{R} \\ [j_{x_0}^2 g] & \longmapsto & K_g(x_0)\,. \end{array}$$

  Esto es, la curvatura clasifica los *jets* de orden 2 de métricas riemannianas en dimensión $n = 2$ .

  En este caso, solamente existe un estrato, el genérico, cuyo tipo es $[\mathrm{O}_2]$ .

- Caso $r = 3$ :

  El espacio de *moduli* es un semiplano:

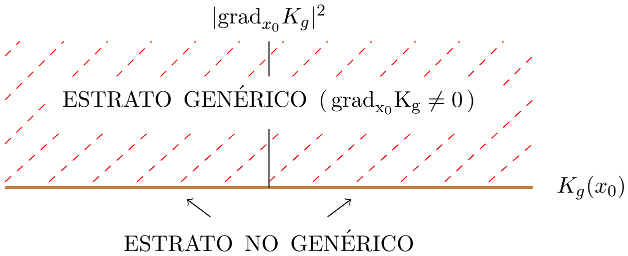
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_2^3 & = & \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ [j_{x_0}^3 g] & \longmapsto & (K_g(x_0), |\mathrm{grad}_{x_0} K_g|^2)\,. \end{array}$$

  Es decir, la curvatura y el cuadrado del módulo del gradiente de la curvatura clasifican los *jets* de orden 3 de métricas en dimensión $n = 2$ .

  Tenemos dos estratos diferentes:

  El estrato genérico $S_{[D_1]} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , que tiene tipo $[D_1]$ , y está formado por todas las clases de *jets* $j_{x_0}^3 g$ para los cuales $\mathrm{grad}_{x_0} K_g \neq 0$ . El grupo de automorfismos es el grupo de orden 2 generado por la simetría respecto al vector $\mathrm{grad}_{x_0} K_g$ .

  $S_{[\mathrm{O}_2]} = \mathbb{R} \times \{0\}$ es el estrato no genérico, de tipo $[\mathrm{O}_2]$ , y es el conjunto de todas las clases de *jets* $j_{x_0}^3 g$ que verifican $\mathrm{grad}_{x_0} K_g = 0$ —que son invariantes respecto a cualquier transformación ortogonal de coordenadas normales—.




Estratos en caso $r = 3$

Si consideramos métricas de signatura $(+,-)$ (o $(1,1)$ ), en lugar de métricas riemannianas, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}^3_{1,1} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times[0,+\infty) \\ [j^3_{x_0}g] & \longmapsto & (K_g(x_0), |\mathrm{grad}_{x_0}K_g|^2) \end{array}$$

no es inyectiva; es decir, los invariantes diferenciales no clasifican los $3-$*jets* de métricas de signatura $(+,-)$ .

Sirva como ejemplo el siguiente: sean dos métricas, $g$ , $\bar{g}$ , de signatura $(+,-)$ , tales que $K_g(x_0) = K_{\bar{g}}(x_0)$ y $\mathrm{grad}_{x_0}K_g = 0$ y $\mathrm{grad}_{x_0}K_{\bar{g}}$ es un vector no nulo isótropo con respecto a $\bar{g}_{x_0}$ .

Entonces los *jets* $j^3_{x_0}g$ y $j^3_{x_0}\bar{g}$ no pueden ser equivalentes —pues el gradiente de la curvatura en $x_0$ es cero para $g$ , mientras que no es nulo para $\bar{g}$—, y, sin embargo, sus invariantes diferenciales coinciden:

$$K_g(x_0) = K_{\bar{g}}(x_0)\,, \quad \text{y} \quad |\mathrm{grad}_{x_0}K_g|^2 = |\mathrm{grad}_{x_0}K_{\bar{g}}|^2 = 0\,.$$

En la próxima sección, discutiremos más ejemplos sobre lo que sucede cuando las métricas no son riemannianas.

- Caso $r = 4$ :

  Las siguientes funciones constituyen un conjunto de generadores de los invariantes diferenciales de orden 4:

$$\begin{aligned} p_1([j^4_{x_0}g]) &= K_g(x_0)\,, \\ p_2([j^4_{x_0}g]) &= |\mathrm{grad}_{x_0}K_g|^2\,, \\ p_3([j^4_{x_0}g]) &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_{x_0}K_g)\,, \\ p_4([j^4_{x_0}g]) &= \det(\mathrm{Hess}_{x_0}K_g)\,, \\ p_5([j^4_{x_0}g]) &= \mathrm{Hess}_{x_0}K_g(\mathrm{grad}_{x_0}K_g, \mathrm{grad}_{x_0}K_g)\,, \end{aligned}$$

  donde $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g := (\nabla dK_g)_{x_0}$ denota el hessiano de la curvatura en $x_0$ .

  Estas funciones satisfacen las siguientes desigualdades:

$$p_2 \geq 0\,, \quad p_3^2 - 4p_4 \geq 0\,, \quad (2p_5 - p_2p_3)^2 \leq p_2^2(p_3^2 - 4p_4)\,.$$

  En otras palabras, estos cinco invariantes diferenciales definen un isomorfismo de espacios diferenciables:

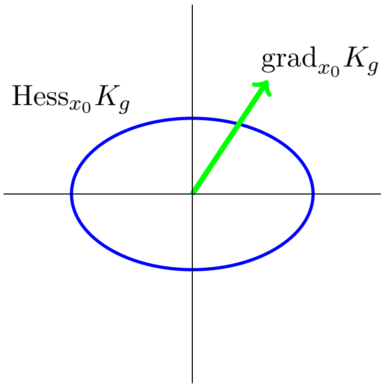
$$\mathsf{M}^4_2 \xlongequal{(p_1,\ldots,p_5)} Y \subset \mathbb{R}^5\,,$$

  siendo $Y$ el subespacio cerrado de $\mathbb{R}^5$ definido por las desigualdades siguientes:

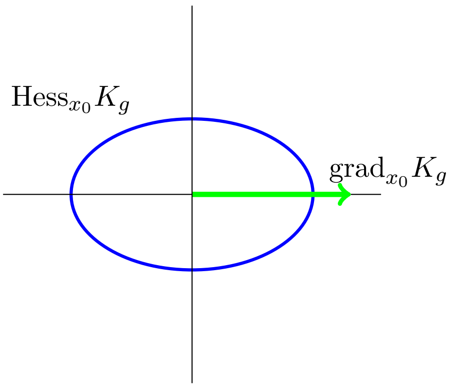
$$x_2 \geq 0\,, \quad x_3^2 - 4x_4 \geq 0\,, \quad (2x_5 - x_2x_3)^2 \leq x_2^2(x_3^2 - 4x_4)\,.$$

  En este caso, el espacio de *moduli* $\mathsf{M}^4_2$ tiene los siguientes cuatro estratos:

1. El estrato genérico de todas las clases de *jets* $j^4_{x_0}g$ que verifican que $\mathrm{grad}_{x_0}K_g$ no es un vector propio de $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g$ —por lo tanto, los valores propios de $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g$ son distintos—.
Este estrato tiene como tipo $[K_1 = \{\mathrm{Id}\}]$ .



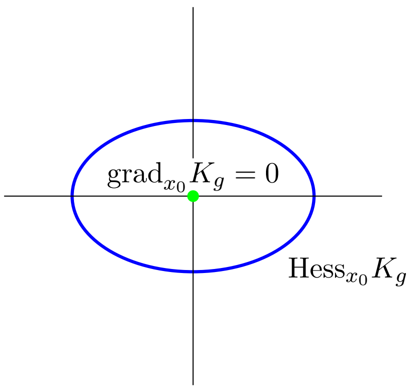

Estrato genérico



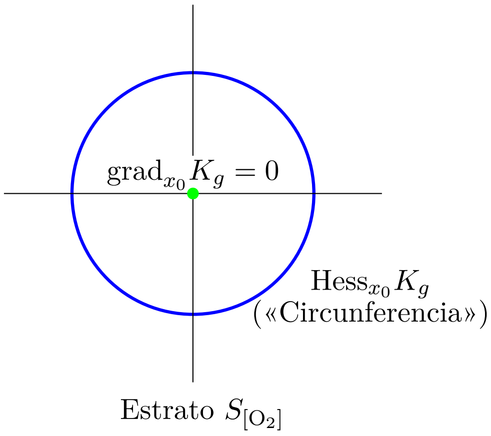

Estrato $S_{[D_1]}$

2. El estrato formado por aquellas clases de *jets* $j^4_{x_0}g$ que verifican que $\mathrm{grad}_{x_0}K_g$ es un vector propio no nulo de $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g$ .
Su tipo es $[D_1]$ , y el grupo de automorfismos de cada *jet* de métricas está generado por la simetría respecto al vector $\mathrm{grad}_{x_0}K_g$ .

3. El estrato que se compone de las clases de *jets* $j^4_{x_0}g$ para los que $\mathrm{grad}_{x_0}K_g = 0$ y que verifican que los vectores propios de $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g$ son diferentes.
El tipo de este estrato es $[D_2]$ , y el grupo de automorfismos de cada *jet* está generado por las simetrías respecto a cada vector propio de $\mathrm{Hess}_{x_0}K_g$ .




Estrato $S_{[D_2]}$




4. Por último, el estrato de las clases de *jets* $j^4_{x_0} g$ para los cuales $\mathrm{grad}_{x_0} K_g = 0$ y que verifican que los vectores propios de $\mathrm{Hess}_{x_0} K_g$ son iguales.
Su tipo es $[\mathrm{O}_2]$.

## 3.4. Patologías pseudo-riemannianas

Ya comentamos en la sección anterior que el teorema 3.2.2 no es válido para métricas pseudo-riemannianas.

Vamos a estudiar aquí qué sucede con métricas de signatura $(+,-)$ en dimensión 2.

Para ello, primero haremos una breve excursión por el Álgebra Lineal, para estudiar la clasificación de pares de métricas simétricas —siendo la primera de ellas de signatura $(+,-)$ y no singular—.

### 3.4.1. Clasificación de pares de métricas simétricas en dimensión 2

Sea $E$ un espacio vectorial real de dimensión 2, y sea $(g,h)$ un par de métricas simétricas sobre $E$, de modo que $g$ sea no singular y de signatura $(+,-)$. Denotaremos por $T$ el endomorfismo de $E$ asociado al par de métricas; es decir:

$$h(e,v) = g(Te,v)\,,\ \forall e,v \in E\,.$$

Tomemos un par hiperbólico $\{e_1,e_2\}$ para $g$ como base de $E$. En esta base, la expresión matricial de $g$, $h$ y $T$ es como sigue:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,\ h = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}\,,\ T = \begin{pmatrix} z & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

con $x,y,z$ ciertos números reales.

Para la clasificación tendremos en cuenta la acción natural del grupo $\mathrm{O}_{1,1}$ sobre el espacio —isomorfo a $\mathbb{R}^3$— de las matrices simétricas de orden 2 de coeficientes reales:

$$A \cdot h := A^t h A\,,$$

para $A \in \mathrm{O}_{1,1}$ y $h = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ matriz simétrica.

Hay tres estratos distintos, que ordenaremos, según su tipo, de mayor a menor:

- Estrato de tipo (máximo) $O_{1,1}$, de ecuaciones $x = y = 0$.
- Estrato de tipo $D_2$ —grupo diédrico de orden 4, o Klein—, entendido como subgrupo de $\mathrm{O}_{1,1}$ que tiene por elementos la identidad, la simetría respecto del origen, y las simetrías —entendidas en relación a la ortogonalidad definida por la métrica $g$— respecto de un par de rectas vectoriales. Este estrato es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que verifica $xy > 0$.

  *Tenemos, pues, un estrato abierto, que no es de tipo mínimo.*
- Estrato (genérico) de tipo mínimo $D_1$ —grupo diédrico de orden 2—, entendido como subgrupo de $\mathrm{O}_{1,1}$ generado por la simetría respecto del origen. Sus ecuaciones son $xy \leq 0$, con $(x, y) \neq (0, 0)$.

  *Se trata de un estrato genérico que no es abierto, ni denso, ni siquiera conexo, pues rompe en dos componentes conexas. Además, es una variedad con borde, pero no separada, pues su borde aparece repetido dos veces:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \supset U_{D_1} & \longrightarrow & \mathsf{M}_{D_1} = (-\infty, 0^2] \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & (xy, z)\,. \end{array}$$

  El 0 aparece doble, pues se obtiene a partir del par de semirrectas

$$\{x > 0, y = 0, z = \text{cte.}\} \cup \{x = 0, y > 0, z = \text{cte.}\}$$

  y también del par de semirrectas

$$\{x < 0, y = 0, z = \text{cte}'.\} \cup \{x = 0, y < 0, z = \text{cte}'.\}\,.$$

Que ese par de semirrectas producen distintos puntos del espacio de clases se debe a que representan órbitas distintas de la acción de $\mathrm{O}_{1,1}$. A continuación enunciamos las órbitas de la acción de este grupo:

1. Las hipérbolas $xy = \text{cte.} < 0$, $z = \text{cte.}'$, que se corresponden con matrices simétricas del tipo $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -b \end{pmatrix}$, o bien $h = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, con $b > 0$.
2. Los pares de semirrectas
$$\{x > 0, y = 0, z = \text{cte.}\} \cup \{x = 0, y > 0, z = \text{cte.}\}\,,$$
   que se corresponden con matrices del tipo $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, o bien $h = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.
3. Los pares de semirrectas
$$\{x < 0, y = 0, z = \text{cte.}\} \cup \{x = 0, y < 0, z = \text{cte.}\}\,,$$
   que se corresponden con matrices del tipo $h = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, o bien $h = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$.

4. Las ramas de hipérbolas $xy =$ cte. $> 0$, $x > 0$, $z =$ cte.$'$, correspondientes con matrices como $h = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}$, o bien $h = \begin{pmatrix} b & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, con $b > 0$.
5. Las ramas de hipérbolas $xy =$ cte., $x > 0$, $z =$ cte.$'$, que se corresponden con matrices del tipo $h = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -b \end{pmatrix}$, o bien $h = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$, con $b > 0$.
6. Cada punto del eje $x = y = 0$ es una órbita en sí mismo. Dicho de otra manera, una matriz de la forma $h = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ siempre queda estable por todas las matrices del grupo $\mathrm{O}_{1,1}$.

### 3.4.2. Espacio de clases de *jets* de órdenes bajos de métricas pseudo-riemannianas de signatura $(+,-)$ en una variedad bidimensional

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, dotado de la métrica no singular de tipo $(+,-)$ que tiene a la base usual por par hiperbólico. Sea $\mathrm{O}_{1,1}$ el correspondiente grupo ortogonal de dicha métrica y, sean $(x,y)$ las coordenadas cartesianas.

Obviando los espacios $\mathsf{M}^0_{1,1}$ y $\mathsf{M}^1_{1,1}$, que se reducen a sendos puntos, y de los que no hay más que decir, analicemos el espacio de clases de equivalencia de *jets* de orden 2, 3 y 4:

- $\mathsf{M}^2_{1,1}$ **:**

El espacio de clases se identifica, en este caso, del mismo modo que sucedía en el *moduli* de métricas riemannianas —véase el análisis del caso $r = 2$ en la página 58—, con $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}^2_{1,1} & = & \mathbb{R} \\ [j^2_0 h] & \longmapsto & K_h(0)\,. \end{array}$$

E, igualmente, el espacio de clases tiene un único estrato, de tipo $[\mathrm{O}_{1,1}]$.

- $\mathsf{M}^3_{1,1}$ **:**

Dada cualquier métrica $h$ pseudo-riemanniana de signatura $(+,-)$, podemos calcular su curvatura escalar en $0$,

$$K_h(0)\,,$$

y el producto, con la métrica $h$, del gradiente de $K_h$ en $0$ consigo mismo,

$$h(\mathrm{grad}_0 K_h, \mathrm{grad}_0 K_h)\,.$$

La curvatura escalar y $|h(\mathrm{grad}_0 K_h, \mathrm{grad}_0 K_h)|$ generan el álgebra de invariantes diferenciales de orden menor o igual que 3 de métricas pseudo-riemannianas de signatura $(+,-)$.

En este caso, el tipo nos permite distinguir tres estratos:

1. Subconjunto de tipo $[\mathrm{O}_{1,1}]$. Está formado por aquellos elementos $[j_0^3 h]$, tales que $\mathrm{grad}_0 K_h = 0$.

2. Subconjunto de tipo $[D_1]$, que está compuesto por aquellas clases de *jets*, tales que el vector $\mathrm{grad}_0 K_h \neq 0$ y además **no** es un vector isótropo para $h$. Entendemos $D_1$ como el subgrupo de $\mathrm{O}_{1,1}$ generado por la simetría respecto de la recta vectorial engendrada por $\mathrm{grad}_0 K_h$.

3. Subconjunto de tipo $[\mathrm{Id}]$. Se trata, por tanto, del estrato de tipo mínimo. Pertenecen a él aquellas clases de *jets* $[j_0^3 h]$, tales que $\mathrm{grad}_0 K_h$ es un vector no nulo isótropo para $h$.

Podemos dar la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_{1,1}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \times [0, +\infty) \\ [j_0^3 h] & \longmapsto & (K_h(0), |h(\mathrm{grad}_0 K_h, \mathrm{grad}_0 K_h)|)\,, \end{array}$$

de modo que el primer estrato que hemos enunciado se correspondería por $\varphi$ con los puntos de ecuación $x_2 = 0$, el segundo con los de ecuación $x_2 > 0$, y el tercer estrato también tendría la ecuación $x_2 = 0$.

Pueden observarse entonces los siguientes hechos:

- Los estratos no están ordenados por el tipo. El estrato (abierto) al que correspondería la denominación de «estrato genérico» es el segundo entre los enunciados, pero no es el de tipo mínimo.

- Además, los invariantes no separan puntos, según puede comprobarse si se comparan los estratos 1 y 3: la curvatura y el gradiente de la curvatura no nos permiten distinguir entre una métrica $h$ con $\mathrm{grad}_0 K_h = 0$ y otra $\bar{h}$ para la que $\mathrm{grad}_0 K_{\bar{h}}$ sea un vector isótropo no nulo.

  Es decir, los estratos 1 y 3 se corresponden por $\varphi$ con una recta (de ecuación $x_2 = 0$) de puntos dobles.

- **$\mathsf{M}_{1,1}^4$:**

Del mismo modo que para el orden 3 de *jets*, los invariantes diferenciales escalares que servían para clasificar los *jets* de orden 4 de métricas riemannianas valen como generadores del álgebra de invariantes diferenciales de orden menor o igual que 4 de las métricas pseudo--riemannianas.

Concretamente, los invariantes son:

$$p_1([j_0^4 h]) = K_h(0)\,,$$

$$p_2([j_0^4 h]) = |h(\mathrm{grad}_0 K_h, \mathrm{grad}_0 K_h)|\,,$$

$$p_3([j_0^4 h]) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_0 K_h)\,,$$

$$p_4([j_0^4 h]) = \det(\mathrm{Hess}_0 K_h)\,,$$
$$p_5([j_0^4 h]) = \mathrm{Hess}_0 K_h(\mathrm{grad}_0 K_h, \mathrm{grad}_0 K_h)\,,$$

donde seguimos denotando por $\mathrm{Hess}_0 K_h := (\nabla dK_h)_0$ el hessiano de la curvatura de $h$ en $0$, y donde tanto en $p_3$ como en $p_4$ estamos considerando traza y determinante del endomorfismo asociado al par de métricas $h$ y $\mathrm{Hess}_0 K_h$.

El tipo permite distinguir en este caso los siguientes estratos:

1. Estrato de tipo $[O_{1,1}]$, al que pertenecen todas las clases de *jets* de métricas $h$ tales que $\mathrm{grad}_0 K_h = 0$, y para las que el hessiano de la curvatura tiene la siguiente expresión matricial —en algún par hiperbólico para la métrica $h$—:
$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Estrato de tipo $[D_2]$. Está formado por todas aquellas clases de *jets*, tales que el gradiente de la curvatura es un vector nulo y el hessiano se expresa como una matriz de una de estas clases:
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -b \end{pmatrix},$$
con $b > 0$.

   Entendemos aquí $D_2$ realizado geométricamente como el grupo que tiene como elementos la identidad, la simetría respecto del origen, y las simetrías respecto de dos rectas vectoriales (concretamente, $<\sqrt{b}e_1 + e_2>$ y $<-\sqrt{b}e_1 + e_2>$, con $e_1$ y $e_2$ par hiperbólico para la métrica $h$).

3. El estrato de tipo $[D_1]$ lo constituyen tres subconjuntos de clases $[j_0^4 h]$ que quedan determinados por distintas condiciones, en términos de los invariantes diferenciales:

   - El subconjunto de aquellas clases $[j_0^4 h]$, tales que $\mathrm{grad}_0 K_h = 0$, y $\mathrm{Hess}_0 K_h$ se escribe como alguna de estas matrices simétricas:
   $$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -b \end{pmatrix} \text{ con } b > 0, \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$
   En este caso, $D_1$ se realiza como el subgrupo de $O_{1,1}$ generado por la simetría respecto del origen.
   - Las clases $[j_0^4 h]$, tales que $\mathrm{grad}_0 K_h$ es un vector no nulo y el hessiano de la curvatura se expresa matricialmente así:
   $$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$
   $D_1$ se realiza geométricamente como el subgrupo de $O_{1,1}$ generado por la simetría respecto de la recta engendrada por el vector gradiente.

- Las clases $[j_0^4 h]$, tales que el hessiano de la curvatura se escribe como alguna de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -b \end{pmatrix}$$

(con $b > 0$), y el gradiente es un vector no nulo en la dirección de alguna de las rectas vectoriales citadas en el estrato 2. Es decir, es uno de los ejes del hessiano respecto de la métrica $h$, entendiéndose precisamente $D_1$ como el subgrupo de $O_{1,1}$ generado por la simetría respecto de dicho eje.

4. Estrato de tipo [Id], que está constituido por dos subconjuntos, determinados por condiciones diferentes en términos de los invariantes diferenciales. A saber:

- Las clases $[j_0^4 h]$, tales que $\mathrm{grad}_0 K_h \neq 0$, y el hessiano de la curvatura se escribe como una matriz de cualquiera de las dos clases siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -b \end{pmatrix} \text{ con } b > 0, \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

- Las clases $[j_0^4 h]$, para los cuales el hessiano de la curvatura tiene una expresión matricial de este tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -b \end{pmatrix}$$

(con $b > 0$), siendo el gradiente de la curvatura un vector no nulo que no pertenece a ninguna de aquellas dos rectas vectoriales mencionadas anteriormente en el estrato 2.

Obsérvese que en el tercer estrato el grupo $D_1$, cuya clase de conjugación dentro de $O_{1,1}$ es el tipo, se realiza geométricamente de diferentes modos.

## 3.5. Clasificación de *jets* de orden infinito

En el capítulo 2, en la sección 2.3, hicimos una extensión del teorema de reducción 2.1.3 para el caso de *jets* de orden infinito de conexiones lineales en un punto. Ahora, análogamente, extenderemos el teorema 3.1.3, de modo que podamos enunciarlo para *jets* de orden infinito de métricas.

Añadiremos además, al final de esta sección, un resultado diferente, aplicable, por lo que nosotros sabemos, exclusivamente a métricas riemannianas, y que extenderá el teorema 3.2.2 a desarrollos formales de métricas en un punto.

Como en lo ya expuesto para conexiones, se pueden considerar para empezar los siguientes espacios anillados —como límites proyectivos de espacios anillados (ejemplo 6 de la página 3)—:

$$J_p^\infty M := \lim_{\leftarrow} J_p^r \mathrm{M} \quad \text{y} \quad \prod_{i=0}^{\infty} N_i := \lim_{\leftarrow} \prod_{i=0}^{r} N_i \,.$$

(Recordemos que $N_1 = 0$ y que por $N_0$ estamos denotando el conjunto de las métricas pseudo-riemannianas en $p$ de signatura $(s_+, s_-)$ ).

Como ya dijimos en el apartado 1.3.1 del capítulo 1, los siguientes grupos son espacios anillados:

$$\mathrm{Dif}_p^\infty := \lim_{\leftarrow} \mathrm{Dif}_p^r \quad , \quad \mathrm{NDif}_p^\infty := \lim_{\leftarrow} \mathrm{NDif}_p^r \,.$$

Y puede verse allí mismo que existe la siguiente identificación:

$$\mathrm{NDif}_p^\infty = \{ j_p^\infty \tau \in \mathrm{Dif}_p^\infty : j_p^1 \tau = j_p^1 \mathrm{Id} \} \,,$$

y que, análogamente, existe una acción (como morfismo de espacios anillados) del grupo $\mathrm{Dif}_p^\infty$ —por tanto, de $\mathrm{NDif}_p^\infty$— sobre $J_p^\infty M$ y, como vimos en la sección 2.3 del capítulo 2, también sobre $\prod_{i=0}^{\infty} N_i$ .

Las aplicaciones $\phi_r$ (definidas en la página 45) conmutan con los morfismos de los dos sistemas proyectivos de espacios anillados que estamos considerando:

$$\begin{tikzcd}
J_p^{r+1} M \arrow[r, "\phi_{r+1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(r \geq 0)"] & \prod_{i=0}^{r+1} N_i \arrow[d] \\
J_p^r M \arrow[r, "\phi_r"] & \prod_{i=0}^{r} N_i
\end{tikzcd} ,$$

y por tanto tenemos un sistema proyectivo de morfismos de espacios anillados:

$$J_p^\infty M \xrightarrow{\pi_r} J_p^r M \xrightarrow{\phi_r} N_0 \times \ldots \times N_r \quad (r \geq 0) \,, \tag{3.9}$$

con $\pi_r$ la proyección canónica del límite proyectivo en el factor correspondiente.

La propiedad universal del límite proyectivo (ej. 6, pág. 3) proporciona entonces el siguiente morfismo de espacios anillados:

$$J_p^\infty M \xrightarrow{\phi_\infty} \prod_{i=0}^{\infty} N_i \,.$$

Enunciamos sin demostración —totalmente análoga a la de sus correspondientes versiones para conexiones, en el capítulo 2— los siguientes teoremas, que generalizan el teorema de reducción 3.1.3 y el teorema 3.1.4, respectivamente:

**Teorema 3.5.1 (Reducción para *jets* infinitos).** *El morfismo de espacios anillados*

$$J_p^\infty M \xrightarrow{\quad \phi_\infty \quad} \prod_{i=0}^{\infty} N_i \, .$$

*es* $\mathrm{Dif}_p^\infty-$*equivariante, epiyectivo y sus fibras son las órbitas de* $\mathrm{NDif}_p^\infty$ *.*

*Además, para cada punto de* $J_p^\infty M$ *, existe alguna sección* [12] *de* $\phi_\infty$ *que pasa por dicho punto.*

**Teorema 3.5.2.** *Existe un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\mathsf{M}_{s_+,s_-}^\infty \;=\!=\!=\; \left( \prod_{i=0}^{\infty} N_i \right) / \, \mathrm{Gl}_n \, ,$$

*siendo* $\mathsf{M}_{s_+,s_-}^\infty := (J_p^\infty M) \, / \, \mathrm{Dif}_p^\infty$ *.*

Como en el caso de orden finito, podemos pasar del último teorema al siguiente:

**Teorema 3.5.3.** *Hay un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\mathsf{M}_{s_+,s_-}^\infty \;=\!=\!=\; \left( \prod_{i=2}^{\infty} N_i \right) / \, \mathrm{O}_{s_+,s_-} \, .$$

*Demostración:* Consideremos una métrica $g_p$ de signatura $(s_+, s_-)$ sobre $T_pX$ y su subgrupo de isotropía por la acción de $\mathrm{Gl}_n$ ; es decir, $\mathrm{O}(g_p) \simeq \mathrm{O}_{s_+,s_-}$ .

Nótese que dicho subgrupo actúa, para cada entero $r \geq 2$ , sobre $N_2 \times \ldots \times N_r$ .

La proposición 1.1.3 afirma entonces que existe un isomorfismo de espacios anillados cocientes:

$$\left( \prod_{i=0}^{\infty} N_i \right) / \, \mathrm{Gl}_n \;=\!=\!=\; \left( \prod_{i=2}^{\infty} N_i \right) / \, \mathrm{O}_{s_+,s_-} \, .$$

Esto, junto con el teorema 3.5.3, concluye la demostración.

□

[12] De modo análogo a lo expresado en la nota al pie de la página 37, entiéndase como sección de $\phi_\infty$ un morfismo de espacios anillados

$$\sigma : \prod_{i=0}^{\infty} N_i \longrightarrow J_p^\infty M \, ,$$

tal que $\phi_\infty \circ \sigma = \mathrm{Id}$ .

### Espacios de *moduli* de *jets* de orden infinito de métricas riemannianas

En la sección 3.2 hemos comprobado (en el teorema 3.2.2) que los invariantes diferenciales de orden menor o igual que $r$ clasifican *jets* de orden $r$ de métricas riemannianas en un punto. Generalicemos ahora este resultado para *jets* de orden infinito.

**Lema 3.5.4.** *Sea $G$ un grupo de Lie compacto. Toda sucesión decreciente de subgrupos cerrados $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3 \supseteq \cdots$ se estabiliza; es decir, existe un entero positivo $s$, tal que $H_s = H_{s+1} = H_{s+2} = \cdots$.*

*Demostración:* Consúltese el lema 6 de la sección 9 del capítulo IX de [3]. □

**Proposición 3.5.1.** *Sea $G$ un grupo de Lie compacto, y sea*

$$\cdots \longrightarrow X_{r+1} \longrightarrow X_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1$$

*un sistema proyectivo de aplicaciones $G-$equivariantes diferenciables entre variedades diferenciables dotadas de una acción diferenciable de $G$. En estas condiciones, existe un isomorfismo de espacios anillados:*

$$\begin{array}{ccc} (\varprojlim X_r)/G & ===== & \varprojlim (X_r/G) \\ [(\ldots, x_2, x_1)] & \longmapsto & (\ldots, [x_2], [x_1])\,. \end{array}$$

*Demostración:*
Consideremos las composiciones de morfismos siguientes:

$$\begin{array}{c} \varprojlim X_r \quad \longrightarrow X_r \longrightarrow X_r/G \\ (\ldots, x_2, x_1) \longmapsto x_r \longmapsto [x_r]\ . \end{array}$$

Por la propiedad universal del cociente (en la página 4), esas composiciones inducen morfismos de espacios anillados:

$$\begin{array}{ccc} (\varprojlim X_r)/G & \longrightarrow & X_r/G \\ [(\ldots, x_2, x_1)] & \longmapsto & [x_r]\ , \end{array}$$

que, debido a la propiedad universal del límite proyectivo (véase el ejemplo 6 de la página 3), definen a su vez un morfismo de espacios anillados:

$$\begin{array}{ccc} (\varprojlim X_r)/G & \xrightarrow{\varphi} & \varprojlim (X_r/G) \\ [(\ldots, x_2, x_1)] & \longmapsto & (\ldots, [x_2], [x_1])\,. \end{array}$$

Que $\varphi$ es epiyectivo es algo trivial. Veamos que también es inyectivo.
Dado un punto $(\ldots, x_2, x_1) \in \varprojlim X_r$, consideremos la sucesión decreciente

$$H_{x_1} \supseteq H_{x_2} \supseteq H_{x_3} \supseteq \cdots$$

de subgrupos cerrados de $G$, donde $H_{x_k}$ denota el subgrupo estabilizador de $x_k$. Esta cadena se estabiliza, puesto que $G$ es compacto (según el lema 3.5.4), luego para un cierto $s$ se verifica:

$$H_{x_s} = H_{x_{s+1}} = H_{x_{s+2}} = \cdots \, .$$

Consideremos ahora dos puntos, $[(\ldots, x_2, x_1)]$, $[(\ldots, x'_2, x'_1)]$, de $(\varprojlim X_r)/G$ que tengan la misma imagen por $\varphi$, es decir, tales que $[x_k] = [x'_k]$, para cada $k \geq 0$. Sea $g \in G$, de modo que $x'_s = g \cdot x_s$. Como los morfismos $X_s \to X_k$ (con $s \geq k$) son $G-$equivariantes, se verifica que $x'_k = g \cdot x_k$, para todo $k \leq s$.

Probemos que eso mismo sucede cuando $k > s$. Como $[x_k] = [x'_k]$, existe un cierto $g_k \in G$, tal que $x'_k = g_k \cdot x_k$. Puesto que $X_k \to X_s$ es equivariante $x'_s = g_k \cdot x_s$, y entonces —sin más que comparar con $x'_s = g \cdot x_s$— $g^{-1} g_k \in H_{x_s}$; como $H_{x_s} = H_{x_k}$, se sigue que $g^{-1} g_k \in H_{x_k}$, y entonces la condición $x'_k = g_k \cdot x_k$ equivale a la condición $x'_k = g \cdot x_k$.

Es decir, $x'_k = g \cdot x_k$, para todo $k > 0$, y por tanto $[(\ldots, x_2, x_1)]$ y $[(\ldots, x'_2, x'_1)]$ son el mismo elemento en $(\varprojlim X_r)/G$.

Una vez hemos comprobado que $\varphi$ es biyectiva, es una cuenta rutinaria comprobar que es un isomorfismo de espacios anillados.

□

Consideremos el espacio de *moduli*[13] de *jets* de orden infinito de métricas riemannianas en dimensión $n$:

$$\mathsf{M}_n^\infty := J_p^\infty M / \mathrm{Dif}_p^\infty \, .$$

Para cada entero $r \geq 0$, existe un evidente morfismo de espacios anillados:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_n^\infty & \longrightarrow & \mathsf{M}_n^r \\ \left[ j_p^\infty g \right] & \longmapsto & \left[ j_p^r g \right] \end{array} .$$

Estos morfismos permiten definir a su vez otro morfismo de espacios anillados:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_n^\infty & \longrightarrow & \varprojlim \mathsf{M}_n^r \\ \left[ j_p^\infty g \right] & \longmapsto & (\ldots, \left[ j_p^r g \right], \ldots) \end{array} .$$

**Teorema 3.5.5.** *La siguiente aplicación es un isomorfismo canónico de espacios anillados:*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}_n^\infty & =\!=\!= & \varprojlim \mathsf{M}_n^r \\ \left[ j_p^\infty g \right] & \longmapsto & (\ldots, \left[ j_p^r g \right], \ldots) \end{array} .$$

*Demostración:* Observemos que, fijando una métrica definida positiva $g_p$ en $p$, se tiene que, para cada entero $r \geq 0$, el grupo ortogonal de $g_p$, $\mathrm{O}(g_p) \simeq \mathrm{O}_n$, actúa sobre $N_2 \times \ldots \times N_r$.

[13] Lo llamamos así, debido al corolario 3.5.6 que demostraremos después.

Por el teorema 3.5.3, aplicado al caso de métricas riemannianas que nos ocupa, tenemos el siguiente isomorfismo de espacios anillados:

$$\mathsf{M}_n^\infty \;=\!=\!=\; \left(\prod_{i=2}^{\infty} N_i\right) / \, \mathrm{O}_n = \left(\varprojlim \prod_{i=2}^{r} N_i\right) / \, \mathrm{O}_n \, .$$

Por otra parte, recordemos que el teorema 3.1.4 afirma que, para cada entero positivo $r$ —con los casos triviales de $r = 0$ y $r = 1$, en los que ya sabemos que el espacio de *moduli* se reduce a un único punto—, existen isomorfismos de espacios anillados:

$$\mathsf{M}_n^r \;=\!=\!=\; (N_2 \ldots \times N_r)/\mathrm{O}_n \, .$$

A partir de ese sistema de isomorfismos de espacios anillados, podemos garantizar que también existe un isomorfismo de espacios anillados, si pasamos al límite proyectivo:

$$\varprojlim \mathsf{M}_n^r \;=\!=\!=\; \varprojlim \left[ \left(\prod_{i=2}^{r} N_i\right) / \, \mathrm{O}_n \right] .$$

Para acabar, es suficiente usar la proposición 3.5.1, que garantiza un isomorfismo de espacios anillados

$$\left(\varprojlim \prod_{i=2}^{r} N_i\right) / \, \mathrm{O}_n \;=\!=\!=\; \varprojlim \left[ \left(\prod_{i=2}^{r} N_i\right) / \, \mathrm{O}_n \right] .$$

□

**Observación:** Desconocemos si este teorema sigue siendo válido para el caso de métricas pseudo-riemannianas.

**Corolario 3.5.6.** *Los invariantes diferenciales escalares de orden finito clasifican los jets de orden infinito de métricas riemannianas. En efecto, dos jets $j_p^\infty g$ y $j_p^\infty g'$ son equivalentes si, y solo si, para todo entero $r \geq 0$, y para todo invariante diferencial $h$ de orden menor o igual que $r$, se satisface $h(g)(p) = h(g')(p)$.*

*Demostración:*

Según el teorema 3.5.5, tenemos:

$$j_p^\infty g \equiv j_p^\infty g' \iff j_p^r g \equiv j_p^r g' \, ,$$

para todo entero $r \geq 0$.

Para acabar la demostración, basta tener en cuenta que los invariantes diferenciales de orden menor o igual que $r$ clasifican $r-$*jets* de métricas riemannianas, como se vio en el teorema 3.2.2.

□

# Apéndice:

# Teoría de invariantes de los grupos de Lie clásicos

En este apéndice enunciaremos sin demostración algunos resultados que son utilizados en la memoria.

**Definición A.1.** *Sea $E$ un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita $n$.*

*Por* **«grupo de Lie clásico»**, *entenderemos cualquiera de los siguientes grupos de Lie:*

$\mathrm{Gl}(E)$ : *grupo de automorfismos lineales de $E$.*

$\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)$ : *grupo de isometrías lineales de una métrica simétrica no singular de signatura $(s_+, s_-)$ en $E$.*

$\mathrm{O}_n(E)$ : *grupo de isometrías lineales de una métrica simétrica definida positiva en $E$.*

(Lo que hagamos a continuación es perfectamente generalizable para otros grupos de Lie clásicos —usando notación estándar: $\mathrm{Sl}_n$, $\mathrm{SO}_n$, $\mathrm{Sp}_{2n}$, $\mathrm{U}_n$, $\mathrm{SU}_n$, $\ldots$—, pero nos centraremos exclusivamente en los tres enunciados en la definición, pues son los que tienen aplicación en esta memoria).

Estos grupos tienen estructura algebraica: poseen un subhaz canónico $\mathcal{A}$ de *funciones algebraicas* dentro de su haz de funciones diferenciables.

**Definición A.2.** *Dado un espacio vectorial real $V$ de dimensión finita, una* **representación lineal algebraica** *de un grupo de Lie clásico $G$ en $V$ es un morfismo de grupos de Lie*

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{Gl}(V),$$

*tal que, para todo $g \in G$, los coeficientes de la matriz de $V \xrightarrow{\rho(g)} V$ en cualquier base son funciones algebraicas de $g$.*

Seguiremos la costumbre extendida de abusar del lenguaje por la cual nos referiremos a un espacio vectorial real $V$ como a una representación lineal algebraica de un grupo de Lie clásico $G$, suponiendo conocido el morfismo de grupos de Lie $\rho$.

Dada una representación lineal algebraica $V$ de un grupo de Lie clásico $G$, existe de modo natural una acción algebraica de $G$ sobre $V$:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ (g, v) & \longmapsto & g \cdot v := \rho(g)(v)\,. \end{array}$$

**Definición A.3.** *Sea $V$ una representación lineal algebraica de un grupo de Lie clásico $G$. Un vector $v \in V$ es* **invariante** *por la acción de $G$ si*

$$g \cdot v = v\,,\ \ \forall g \in G\,.$$

*El* **subespacio vectorial de vectores invariantes** *se denota $V^G$.*

Dadas dos representaciones lineales (algebraicas) $V_1$, $V_2$ de un grupo de Lie clásico $G$, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ es también una representación lineal (algebraica), del siguiente modo: dados $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2)$ y $g \in G$, $g \cdot f$ es la aplicación $\mathbb{R}-$lineal entre $V_1$ y $V_2$ definida como

$$(g \cdot f)(v) := g \cdot f(g^{-1} \cdot v)\,.$$

**Definición A.4.** *En las condiciones del párrafo anterior, una* **aplicación lineal equivariante** $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ *es un elemento de* $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2))^G$.

*Equivalentemente, es una aplicación lineal que cumple:*

$$f(g \cdot v) = g \cdot f(v)\,,\ \ \forall g \in G\,, v \in V_1\,.$$

De modo análogo, es posible hablar de aplicaciones polinómicas equivariantes y de aplicaciones diferenciables equivariantes entre $V_1$ y $V_2$, siendo $V_1$ y $V_2$ dos representaciones lineales de un grupo de Lie clásico $G$.

Enunciamos ahora un caso particular de un resultado más general que puede encontrarse en [23]; este teorema nos garantiza que siempre podemos encontrar un sistema de generadores del álgebra de funciones diferenciables invariantes sobre una representación lineal algebraica de un grupo de Lie clásico, que esté formado por funciones polinómicas invariantes:

**Teorema A.1.** *Sea $E$ una representación lineal algebraica de un grupo de Lie clásico $G$, y sea $\mathcal{A}^G$ el álgebra finito-generada de funciones $E \to \mathbb{R}$, polinómicas y $G$-invariantes. Sea $p_1, \ldots, p_k$ un sistema de generadores de $\mathcal{A}^G$ y denotemos*[14] $p = (p_1, \ldots, p_k) : E \to \mathbb{R}^k$. *Entonces se verifica:*

$$\mathcal{C}^\infty(E)^G = p^* \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)\,.$$

[14] Téngase en cuenta que $p : E \to \mathbb{R}^k$ no tiene por qué ser epiyectiva; su imagen, en general, vendrá definida por ciertas relaciones o «sicigias» entre los generadores $p_1, \ldots, p_k$.

Hemos preferido escribir el término «sicigia», con respeto a las habituales normas ortográficas del español, y como viene recogido en el *Diccionario de uso del español* de María Moliner, en lugar de «sizigia», con grafía etimológicamente más sugerente, que es como se encuentra en el *Diccionario de la lengua española* de la Real Academia Española.

La naturaleza de los resultados que enunciamos a continuación es algebraica, y su demostración dentro de la teoría de grupos algebraicos es bien conocida. (Puede verse en [30]).

En el ámbito de los grupos de Lie, es habitual que sean demostrados para el caso de grupos de Lie complejos. (Consúltense [14, Teorema 4.3.1, pág. 191] para el teorema A.2, y el teorema 4.3.3, pág. 193, *ibidem*, para el A.3).

Otros autores ([6] y [13]) han dado demostraciones *ad hoc* para el teorema A.4.

Para leer un argumento que permite reducir la demostración de los siguientes enunciados al caso de los grupos algebraicos, véase [27].

**Teorema A.2** (**Invariantes de** $\mathrm{Gl}(E)$ )**.** *Sea* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gl}(E)}(E^*\otimes \overset{a}{\ldots} \otimes E^* \otimes E\otimes \overset{b}{\ldots} \otimes E, \mathbb{R})$ *el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de aplicaciones lineales* $\mathrm{Gl}(E)$*-invariantes*

$$E^*\otimes \overset{a}{\ldots} \otimes E^* \otimes E\otimes \overset{b}{\ldots} \otimes E \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

*Se verifica:*

- *Si* $a = b$ *, entonces dicho espacio vectorial está generado por todas las contracciones totales posibles:*

$$\phi_\sigma(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_a \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_a) := \omega_1(e_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \omega_a(e_{\sigma(a)}) \ \ , \ \text{donde} \ \sigma \in S_a\,.$$

- *Si* $a \neq b$ *, entonces dicho espacio vectorial es trivial.*

**Teorema A.3** (**Invariantes de** $\mathrm{O}_n(E)$ )**.** *Sea* $g$ *una métrica simétrica no singular definida positiva sobre el espacio vectorial real* $E$ *de dimensión finita* $n$ *, y sea* $\mathrm{O}_n(E)$ *el grupo de isometrías lineales de* $(E, g)$ *. Sea* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_n(E)}(E\otimes \overset{k}{\ldots} \otimes E, \mathbb{R})$ *el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de aplicaciones lineales* $\mathrm{O}_n(E)$*-invariantes*

$$E\otimes \overset{k}{\ldots} \otimes E \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

*Se verifica:*

- *Si* $k$ *es par, entonces dicho espacio vectorial está generado por contracciones del siguiente tipo:*

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_k \longmapsto g(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}) \cdot \ldots \cdot g(e_{\sigma(k-1)}, e_{\sigma(k)}) \ \ , \ \text{con} \ \sigma \in S_k\,.$$

- *Si* $k$ *es impar, entonces dicho espacio vectorial es trivial.*

Si consideramos sobre el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita $E$ una métrica simétrica $g$, no singular y de signatura $(s_+, s_-)$, el grupo $\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)$ de isometrías lineales de $g$ no es compacto, a diferencia de lo que sucede con el grupo $\mathrm{O}_n(E)$, citado en el teorema anterior. A pesar de ello, el resultado sigue siendo cierto, como puede comprobarse en este enunciado análogo:

**Teorema A.4** (**Invariantes de** $\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)$ **).** *Sea* $g$ *una métrica simétrica no singular de signatura* $(s_+, s_-)$ *sobre el espacio vectorial real* $E$ *de dimensión finita, y sea* $\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)$ *el grupo de isometrías lineales de* $(E, g)$ *. Sea* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)}(E\otimes \overset{k}{\ldots} \otimes E, \mathbb{R})$ *el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de aplicaciones lineales* $\mathrm{O}_{s_+,s_-}(E)$*-invariantes*

$$E\otimes \overset{k}{\ldots} \otimes E \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

*Se verifica:*

- *Si* $k$ *es par, entonces dicho espacio vectorial está generado por contracciones del siguiente tipo:*

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_k \longmapsto g(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}) \cdot \ldots \cdot g(e_{\sigma(k-1)}, e_{\sigma(k)}) \;\;,\;\; \text{con} \;\; \sigma \in S_k\,.$$

- *Si* $k$ *es impar, entonces dicho espacio vectorial es trivial.*

**Definición A.5.** *Dada una representación lineal algebraica* $V$ *de un grupo de Lie clásico* $G$ *, diremos que un subespacio vectorial* $V'$ *de* $V$ *es una* **subrepresentación lineal (algebraica) de** $G$ *si* $G \cdot V' \subset V'$ *.*

**Proposición A.1.** *Dadas dos representaciones lineales algebraicas,* $E$ *y* $F$ *, de un grupo de Lie clásico* $G$ *, y dada una subrepresentación lineal* $E' \subset E$ *, cualquier aplicación lineal equivariante* $E' \to F$ *es la restricción de una aplicación lineal equivariante* $E \to F$ *.*

El siguiente ejemplo sirve para mostrar la importancia del adjetivo «algebraicas» en la proposición anterior; se trata, en efecto, de una representación lineal *no* algebraica de $\mathrm{Gl}_1 := \mathrm{Gl}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ (grupo multiplicativo de todos los números reales salvo el cero), en la que no cualquier aplicación lineal equivariante definida sobre una subrepresentación suya extiende al espacio total.

**Ejemplo:** Consideremos la siguiente representación lineal de $\mathrm{Gl}_1$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gl}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Gl}\,(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}) \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \ln|\lambda| \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \;;$$

es decir, la acción definida por $\mathrm{Gl}_1$ sobre $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ es así:

$$\lambda \cdot (e_1, e_2) := (e_1, e_2 + (\ln|\lambda|)e_1)\,,$$

(Obsérvese que esta representación lineal no es algebraica, pues la acción definida depende del logaritmo neperiano del valor absoluto de $\lambda$ ).

Consideremos también $\mathbb{R}$ como representación lineal trivial de $\mathrm{Gl}_1$ , de modo que este grupo actúe por la identidad:

$$\lambda \cdot e_2 := e_2\,,$$

para cada $\lambda \in \mathrm{Gl}_1$ y cada $e_2 \in \mathbb{R}$.

Con estas condiciones,

$$\begin{array}{ccc} 0 \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \\ (0, e_2) & \longmapsto & e_2 \end{array}$$

es una aplicación lineal $\mathrm{Gl}_1-$equivariante sobre el subespacio $0 \oplus \mathbb{R}$ de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, que no puede extenderse a ninguna aplicación $\mathrm{Gl}_1-$equivariante $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}$.

Efectivamente, una tal extensión debería cumplir, por un lado,

$$\Psi(\lambda \cdot (e_1, e_2)) = \lambda \cdot \Psi(e_1, e_2) = \Psi(e_1, e_2)\,,$$

y, por otro, puesto que $\Psi$ extiende a $\psi$,

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda \cdot (e_1, e_2)) &= \Psi(e_1, e_2 + (\ln|\lambda|)e_1) \\ &= \Psi(e_1, e_2) + (\ln|\lambda|)\,\Psi(0, e_1) = \Psi(e_1, e_2) + (\ln|\lambda|)\, e_1\,. \end{aligned}$$

Es decir, para todo $\lambda \in \mathrm{Gl}_1$, y para todo $(e_1, e_2) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, se debería verificar:

$$\Psi(e_1, e_2) = \Psi(e_1, e_2) + (\ln|\lambda|)\, e_1\,,$$

lo cual es obviamente imposible, pues el miembro izquierdo de esta última igualdad no depende de $\lambda$, mientras que el derecho sí.

# Bibliografía


[1] Alekseevskij, D.V., Vinogradov, A.M. y Lychagin, V.V.: *Geometry I: Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry* (Ed.: R.V. Gamkrelidze). Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 28. Springer-Verlag, Berlín (1991).

[2] Arnol'd, V.I.: *Mathematical Problems in Classical Physics*, pp. 1–20, en Trends and Perspectives in Applied Mathematics (Ed.: L. Sirovich). Applied Mathematical Sciences, vol. 100. Springer, Nueva York (1994).

[3] Bourbaki, N.: *Groupes et algèbres de Lie*. Masson, París (1982).

[4] Brozos-Vázquez, M., Gilkey, P.B. y Nikcevic, S.: *Geometric realizations of curvature*. ICP Advanced Texts in Mathematics, vol. 6. Imperial College Press, Londres (2012).

[5] Brozos-Vázquez, M., García-Río, E. y Gilkey, P.B.: *Homogeneous affine surfaces: Moduli spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **444** (2): 1155–1184 (2016).

[6] Castrillón, M. y Muñoz, J.: *Gauge-invariant characterization of Yang-Mills-Higgs equations*, Annales Henri Poincaré **8** (1): 203–217 (2007).

[7] Dubrovskiy, S.: *Moduli space of Fedosov structures*, Annals of Global Analysis and Geometry **27** (3): 273–297 (2005).

[8] Dubrovskiy, S.: *Moduli space of symmetric connections*, Journal of Mathematical Sciences **126** (2): 1053–1063 (2005).

[9] Epstein, D.B.A.: *Natural tensors on Riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **10**: 631-645 (1975).

[10] Epstein, D.B.A. y Thurston, W.P.: *Transformation groups and natural bundles*, Proceedings of the London Mathematical Society **38** (2): 219-236 (1979).

[11] Gilkey, P.B.: *Moduli spaces of type $\mathcal{B}$ surfaces with torsion*, Journal of Geometry **108** (2): 637–653 (2017).

[12] Gilkey, P.B. y Park, J.H.: *Moduli spaces of oriented Type $\mathcal{A}$ manifolds of dimension at least 3*, Journal of the Korean Mathematical Society: `https://doi.org/10.4134/JKMS.j160647`.

[13] Gilkey, P.B., Park, J.H. y Sekigawa, K.: *Universal curvature identities II*, Journal of Geometry and Physics **62** (4): 814–825 (2012).

[14] Goodman, R. y Wallach, N.R.: *Representations and invariants of the classical groups.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 68. Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[15] Gordillo, A.: *Operadores diferenciales naturales.* Trabajo de investigación — Cursos de doctorado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura (2000).

[16] Gordillo, A. y Navarro, J.: *On moduli spaces for finite-order jets of linear connections*, Filomat **31** (7): 2035–2044 (2017).

[17] Gordillo, A., Navarro, J. y Sancho, J.B.: *Moduli spaces for jets of Riemannian metrics at a point*, Differential Geometry and its Applications **28** (6): 672–688 (2010).

[18] Grothendieck, A. y Dieudonné, J.: *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (en francés), vol. 166. Springer-Verlag, Berlín (1971).

[19] Helgason, S.: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, vol. 80. Academic Press, Inc., Nueva York (1978).

[20] Jentsch, T.: *The Jet Isomorphism Theorem of pseudo-Riemannian geometry*, ArXiv e-prints: 1509.08269v1 (2015)

[21] Kolář, I., Michor, P.W. y Slovák, J.: *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer-Verlag, Berlín (1993).

[22] Lang, S.: *Fundamentals of differential geometry.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 191. Springer-Verlag, Nueva York (1999).

[23] Luna, D.: *Fonctions différentiables invariantes sous l'opération d'un groupe réductif*, Annales de l'Institut Fourier **26** (1): 33–49 (1976).

[24] Martínez, C., Muñoz, J. y Valdés, A.: *On the structure of the moduli of jets of G-structures with a linear connection*, Differential Geometry and its Applications **18** (3): 271–283 (2003).

[25] Muñoz, J. y Valdés, A.: *The number of functionally independent invariants of a pseudo-Riemannian metric*, Journal of Physics A: Mathematical and General **27** (23): 7843–7855 (1994).

[26] Muñoz, J. y Valdés, A.: *Génération des anneaux d'invariants différentiels des métriques riemanniennes*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique **323** (6): 643–646 (1996).

[27] Navarro, J.: *Divergence-free tensors associated to a metric.* Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura (2013).

[28] Navarro, J.A. y Sancho, J.B.: *$\mathcal{C}^\infty$-Differentiable spaces*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1824. Springer-Verlag, Berlín (2003).

[29] Palais, R.S. y Terng, C.L.: *Natural bundles have finite order*, Topology **16** (3): 271–277.

[30] Sancho, C.: *Grupos algebraicos y teoría de invariantes*. Aportaciones matemáticas: Textos, vol. 16. Sociedad Matemática Mexicana, Ciudad de México (2001).

[31] Saunders, D.J.: *The Geometry of Jet Bundles*. Lecture Notes Series, vol. 142. London Mathematical Society, Cambridge (1989).

[32] Veblen, O. y Thomas, T.Y.: *The geometry of paths*, Transactions of the American Mathematical Society **25** (4): 551–608 (1923).

[33] Vinogradov, A.M.: *Scalar differential invariants, diffieties and characteristic classes*, pp. 379–416, en Mechanics, Analysis and Geometry: 200 years after Lagrange (Ed.: M. Francaviglia). Elsevier, Ámsterdam (1991).