

Asociación Argentina  
de Mecánica Computacional



Mecánica Computacional Vol XXXIII, págs. 1487-1498  
Graciela Bertolino, Mariano Cantero, Mario Storti y Federico Teruel (Eds.)  
San Carlos de Bariloche, 23-26 Setiembre 2014

## IDENTIFICACIÓN DE FISURAS POR FATIGA EN VIGAS PRECARGADAS MEDIANTE EL ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL

Víctor H. Cortínez<sup>a,b</sup> y Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461, Bahía Blanca, Argentina, [vcortine@frbb.utn.edu.ar](mailto:vcortine@frbb.utn.edu.ar)*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)*

**Palabras Clave:** Fisuras por fatiga, identificación de fisuras, vibraciones no lineales, elementos finitos, recocido simulado.

**Resumen.** En diversas estructuras aparecen fracturas por fatiga generadas por acciones dinámicas que es necesario identificar de manera temprana para evitar una rotura catastrófica como consecuencia de la propagación de las mismas.

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar un método de identificación de fracturas por fatiga a partir de la medición de desplazamientos dinámicos. Tal enfoque se basa en la utilización de un modelo teórico para las vibraciones forzadas no lineales de vigas contemplando efectos de cerramiento parcial de las fisuras, desplazamientos excesivos y solicitaciones iniciales permanentes que alteran el cerramiento parcial de la falla.

El problema de identificación se plantea como uno de optimización que busca minimizar la diferencia entre los valores medidos y calculados. Se utiliza el método de los elementos finitos para obtener la respuesta dinámica ante diferentes escenarios de daño conjuntamente con el método de recocido simulado para obtener los parámetros de daño óptimos.

## 1. INTRODUCCIÓN

La aparición de fisuras por fatiga en diversas estructuras utilizadas en ingeniería civil o mecánica puede traer consecuencias peligrosas sobre la seguridad de las mismas y eventualmente pueden ocasionar una rotura catastrófica si no son detectadas de manera temprana. Existen diferentes técnicas para realizar esta tarea que contemplan la inspección visual y los estudios localizados basados por ejemplo en técnicas de ultrasonido. Sin embargo, diversos aspectos dificultan la aplicación de estas metodologías tal como inaccesibilidad de las localizaciones probables de las fallas. Por dicho motivo se han estudiado varias alternativas y en particular los métodos basados en el análisis de vibraciones estructurales.

Estas técnicas se basan en el hecho de que la aparición de una fisura en una estructura cambia la distribución de su rigidez lo cual se ve reflejado en su dinámica estructural. En consecuencia, efectuando mediciones de la dinámica bajo la acción de diferentes cargas conocidas es posible identificar la magnitud y localización de fisuras de fatiga a partir de la utilización de un modelo matemático estructural. Es decir, el modelo permite ensayar diversas posibilidades referentes a la ubicación y magnitud de la posible falla, siendo la más cercana a la realidad aquella que reproduzca los valores determinados en forma experimental.

Para realizar este tipo de identificación es posible usar diferentes indicadores de falla y también distintos tipos de movimiento. En tal sentido se han utilizado las frecuencias naturales de vibración y/o formas modales correspondientes a las vibraciones libres de pequeña amplitud de las estructuras involucradas (Shen, 1991). También han sido empleadas vibraciones forzadas midiendo indicadores tales como los máximos desplazamientos ante la acción de cargas de tipo sinusoidal (Majkut, 2005). Estas metodologías han mostrado utilidad práctica en el caso de tipologías estructurales esbeltas formadas por vigas y/o placas. Un inconveniente de la utilización de vibraciones estructurales para la detección de fallas es la baja sensibilidad de los indicadores correspondientes cuando se trabaja en el régimen lineal, es decir con pequeños desplazamientos.

En los últimos años ha adquirido gran importancia el estudio de las vibraciones no lineales para su empleo en la predicción de fallas (Chati et al., 1997; Carneiro, 2000). Esto es así porque se han descubierto diversos tipos de indicadores de falla que solo aparecen en el rango no lineal. Ejemplos de ello lo constituyen las resonancias subarmónicas y superarmónicas (Tsyfansky y Beresnevich, 1998b; Giannini et al., 2013). Por otra parte la dinámica no lineal es, en muchas ocasiones, un aspecto inherente a la estructura que se está analizando, tal es el caso de álabes de aerogeneradores u otras estructuras de gran esbeltez que en su estado de operación normal presentan movimientos vibratorios de amplitud moderada. En el caso de vigas esbeltas fracturadas por fatiga se han realizado diversos desarrollos tendientes a analizar la dinámica no lineal debido al efecto de “respiración de la fisura” (Cortínez y Dotti, 2013a). Este término refiere a la apertura y cierre periódico de las superficies que conforman la fisura durante la vibración, lo que modifica la rigidez estructural de acuerdo al sentido del movimiento. Este aspecto ha sido estudiado en relación a las mencionadas resonancias subarmónicas y superarmónicas que aparecen una vez producida la falla.

Sin embargo, los mencionados efectos pueden también aparecer por desplazamientos geoméricamente no lineales aún cuando la estructura adolezca de fallas. Por tal motivo algunos autores han propuesto la aplicación de un modelo estructural que contemple en forma simultánea la no linealidad geométrica y el aspecto de “respiración de la fisura” (Tsyfansky y Beresnevich, 1998a). Este tipo de teorías serían de utilidad en la detección de fallas a partir de la medición de la historia temporal de la vibración no lineal en diversos puntos de la estructura.

Existe además otro aspecto que ha sido escasamente considerado y que corresponde a la

predeformación y a la existencia de tensiones iniciales generadas por un estado de carga estático. Estos efectos alteran la rigidez estructural y consecuentemente la dinámica de la viga sana y con mayor razón de una viga dañada ya que generan un cambio en el momento de apertura o cierre de la fisura.

En este trabajo se propone utilizar un modelo teórico de la dinámica no lineal de vigas contemplando simultáneamente los efectos mencionados: la “respiración de la fisura”, la rigidez geométrica no lineal y la existencia de una carga inicial estática, con miras a su aplicación en la identificación de fisuras por fatiga. Se realiza un estudio numérico a partir de la solución de las ecuaciones pertinentes a través del método de los elementos finitos y se presentan algunos ejemplos que ilustran acerca de la importancia de la consideración de los aspectos incorporados.

Para realizar la identificación de fisuras se propone considerar una función objetivo consistente en la diferencia relativa cuadrática entre los valores arrojados por el modelo con respecto a valores determinados experimentalmente. Los valores adecuados de los parámetros de la fisura, su ubicación y profundidad, serán aquellos que minimicen dicha función. La solución del problema así planteado se resuelve mediante la combinación del método de los elementos Finitos para evaluar la función objetivo y del método de recocido simulado para dirigir la búsqueda de los parámetros óptimos. Se analiza la eficiencia de la metodología aún en el caso de considerar errores de medición.

## 2. MODELO ESTRUCTURAL

### 2.1. Ecuaciones de movimiento

El presente modelo teórico se basa en la propuesta de una forma adecuada para los movimientos flexional y axial de la viga, de manera compatible con la teoría de Timoshenko. Estos vienen dados por las siguientes expresiones (ver Figura 2):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, t) - y\phi(x, t), \\ v(x, t) &= v_0(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $u$  y  $v$  representan desplazamientos axiales y transversales (en las direcciones  $x$  e  $y$ ) respectivamente,  $u_0$  constituye el desplazamiento correspondiente al centroide de la sección mientras que  $\phi$  es el giro flexional. Estos desplazamientos pueden ser introducidos en las componentes no nulas del tensor de deformación de Green-Lagrange:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Tales expresiones son válidas asumiendo que la deformación es pequeña pero la rotación puede ser moderada (Han y Benaroya, 2000). De esta manera se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u'_0 - y\phi' + \frac{1}{2}v_0'^2, \\ \gamma_{xy} &= -\phi + v_0'. \end{aligned} \quad (3)$$

La distorsión expresada en (2) se ha obtenido desde la siguiente expresión:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}. \quad (4)$$

La mecánica del problema puede ser formulada a partir del principio de trabajos virtuales

$$\delta U = \delta W, \quad (5)$$

donde  $\delta U$  y  $\delta W$  denotan el trabajo virtual interno y el externo respectivamente y pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \\ \delta W &= \int_V F_i \delta u_i dV + \int_S p_i \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Aquí,  $\sigma_{ij}$ ,  $F_i$ ,  $p_i$ ,  $\delta u_i$  y  $\delta \varepsilon_{ij}$  corresponden al tensor de tensiones, vector de fuerzas volumétricas, vector de tensión en la superficie, desplazamientos virtuales y deformaciones virtuales, respectivamente. Se ha empleado la notación de Einstein.

Sustituyendo (1) y (3) en (6) y considerando las fuerzas volumétricas inerciales

$$F_x = f_x - \rho \ddot{u} - c \dot{u} = f_x - \rho \ddot{u}_0 - c \dot{u}_0 + \rho y \ddot{\phi} \quad F_y = f_y - \rho \ddot{v} - c \dot{v} = f_y - \rho \ddot{v}_0 - c \dot{v}_0, \quad (7)$$

se llega a:

$$\delta U = \int_0^L \left( EA \left( u'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) \delta u'_0 + EA v'_0 \left( u'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) \delta v'_0 + GA \left( (v'_0 - \phi) \delta v'_0 + (\phi - v'_0) \delta \phi \right) + EI \phi' \delta \phi' \right) dx, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L \left( q_x \delta u_0 - \rho A \ddot{u}_0 \delta u_0 - c A \dot{u}_0 \delta u_0 - m_z \delta \phi - \rho I \ddot{\phi} \delta \phi + q_y \delta v_0 - \rho A \ddot{v}_0 \delta v_0 - c A \dot{v}_0 \delta v_0 \right) dx + \\ &\quad \int_{S_1} (p_x \delta u_0 - p_x y \delta \phi + p_y \delta v_0) dS \Big|_{x=0} + \\ &\quad \int_{S_2} (p_x \delta u_0 - p_x y \delta \phi + p_y \delta v_0) dS \Big|_{x=L}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde:

$$q_x = \int_A f_x dA, \quad q_y = \int_A f_y dA, \quad m_z = \int_A f_x y dA. \quad (10)$$

Aquí  $f_x$  y  $f_y$  corresponden a fuerzas volumétricas externas,  $\rho$  es la densidad del material,  $E$  y  $G$  módulos de elasticidad,  $q_x$ ,  $q_y$  y  $m_z$  representan fuerzas distribuidas por unidad de longitud en las direcciones  $x$  e  $y$ , y momento flector por unidad de longitud, respectivamente. Se ha considerado en forma simplificada que el amortiguamiento estructural puede representarse como uno de tipo viscoso expresado a partir del coeficiente volumétrico  $c$ . Por otra parte éste último será expresado en la forma  $c = 2\rho\xi\omega_n$  (donde  $\xi$  es la razón de amortiguamiento) para respuestas forzadas cercanas a la frecuencia natural  $\omega_n$ .

Cada punto (.) y cada símbolo prima (') sobre las variables indica derivación con respecto al tiempo y a la variable espacial respectivamente.

Aplicando conceptos de cálculo variacional a las ecuaciones anteriores se obtiene el sistema diferencial gobernante del movimiento de la estructura:

$$\rho A \ddot{u}_0 + c A \dot{u}_0 - \left( EA_{ef} \left( u'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) \right)' - q_x = 0 \quad (11)$$

$$\rho A \ddot{v}_0 + c A \dot{v}_0 - \left( \left( EA_{ef} v'_0 \left( u'_0 + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) \right)' + \left( GA_{ef} (v'_0 - \phi) \right)' \right) - q_y = 0 \quad (12)$$

$$\rho I \ddot{\phi} - \left( EI_{ef} \phi' \right)' + GA_{ef} (\phi - v_0) + m_z = 0 \quad (13)$$

$$\left[ \left( EA_{ef} \left( u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) - N \right) \delta u_0 \right] \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (14)$$

$$\left[ \left( EA_{ef} v_0' \left( u_0' + \frac{1}{2} v_0'^2 \right) + GA_{ef} (v_0' - \phi) - Q \right) \delta v_0 \right] \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (15)$$

$$\left[ \left( EI_{ef} \phi' + M \right) \delta \phi \right] \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (16)$$

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado la siguiente notación.  $A$ : área de la sección transversal,  $I$ : momento de segundo orden de la sección transversal,  $A_{ef}$ : área efectiva de la sección transversal fisurada,  $I_{ef}$ : momento de segundo orden efectivo de la sección transversal fisurada,  $N$ ,  $Q$  y  $M$ : esfuerzos normal, cortante y momentos flectores actuando en los extremos. El módulo de elasticidad transversal  $G$  es modificado para contemplar el coeficiente de corte de Timoshenko. Por supuesto el sistema anterior está sujeto además a condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad.

## 2.2. Modelo de Fisura

Sin pérdida de generalidad se supone una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y altura  $h$ . Se asume que la fisura de fatiga está localizada en el borde superior de la viga y corresponde a una reducción en su altura. El correspondiente efecto de flexibilidad se expresa aquí en forma equivalente como una reducción de altura en un pequeño elemento de viga de longitud  $l_c$  en cuyo centro está ubicada la fisura. Es fácil determinar la reducción equivalente a la fisura utilizando conceptos de mecánica de fractura (Cortínez y Dotti, 2013b).

La falla considerada puede abrirse o cerrarse de acuerdo a los desplazamientos relativos del borde de la misma. Esto puede ser medido razonablemente bien a partir del valor que adopte la deformación longitudinal específica de la viga en el extremo de la fisura. Tal modelo de fisura “con respiración” puede ser expresado matemáticamente de la siguiente manera:

$$h = h_0(1 - \beta), \quad (17)$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_c & \varepsilon_x(x_c, h_0/2) > 0 \\ 0 & \varepsilon_x(x_c, h_0/2) < 0 \end{cases}, \quad (18)$$

$$\beta_c = \frac{h_0 - h_d}{h_0}. \quad (19)$$

Aquí  $h_0$  y  $h_d$  corresponden a la altura de la sección sin daño y con daño respectivamente y  $x_c$  es la posición de la sección fisurada. Obsérvese el carácter no lineal de esta fisura que puede aparecer o desaparecer de acuerdo a la dinámica de la viga medida mediante la deformación longitudinal específica de la expresión (18). Obviamente, mediante el valor de  $h$  dado por (17) se obtienen el momento de segundo orden  $I_{ef}$  y el área  $A_{ef}$  equivalente de la sección. Para simplificar la notación, de aquí en adelante denominamos  $a$  a la profundidad de la fisura  $\beta_c h_0$ .

### 3. PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN

#### 3.1. Función objetivo y restricciones

La identificación de fisuras basada en la historia temporal de desplazamientos puede realizarse minimizando la diferencia entre valores medidos y valores estimados teóricamente. La estimación de desplazamientos se realiza mediante la variación de la posición  $x_c$  y profundidad  $a$  de las fisuras consideradas. Estos valores están acotados entre valores mínimos y máximos.

Consecuentemente, adoptando un criterio de mínimos cuadrados, el problema se formula como uno de optimización, de la siguiente manera:

$$\{a, x_c\} = \arg \min(FO), \quad (20)$$

donde

$$FO = \sum_{m=1}^M \left( \frac{\tilde{v}_m - v_m}{\tilde{v}_m} \right)^2, \quad (21)$$

s.a.

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_c \leq L, \\ a^{\min} &\leq a \leq a^{\max}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\tilde{v}_m$  corresponde al conjunto  $M$  de desplazamientos medidos y  $v_m$  al conjunto de desplazamientos estimados mediante el modelo descrito en las secciones anteriores.

En este trabajo se utiliza tal función objetivo con relación a respuestas estacionarias ante cargas estáticas y oscilatorias.

#### 3.2. Solución computacional

Para resolver el problema anterior los desplazamientos estimados  $v_m$  se calculan a partir de las ecuaciones 11 a 13 con sus correspondientes condiciones de contorno, utilizando el método de los elementos finitos. De esta manera es posible evaluar la función objetivo  $FO$  (21) para diferentes escenarios posibles de ubicaciones y profundidades de las fisuras involucradas.

Debido a que la  $FO$  puede presentar más de un mínimo local, para resolver el problema se recurre a la utilización de un algoritmo metaheurístico. En este trabajo se adopta el método conocido como recocido simulado.

En esta técnica de optimización, el algoritmo comienza con una solución inicial factible y genera a partir de ella una nueva solución en el entorno de la misma. Si la solución nueva es mejor que la actual, es decir disminuye el valor de la función objetivo, se acepta automáticamente. Si no, aún existe la posibilidad de que dicha solución sustituya a la solución actual de acuerdo a un cierto criterio probabilístico  $e^{-\frac{\Delta}{T}}$  que depende de la diferencia entre la solución actual y la nueva ( $\Delta = FO_{nueva} - FO_{anterior}$ ) y del parámetro  $T$  conocido como “temperatura”. A medida que el algoritmo avanza se va disminuyendo  $T$  de manera tal de disminuir la probabilidad de aceptar soluciones factibles que no produzcan una mejora en la función objetivo. El algoritmo acepta soluciones peores que la actual al principio de la ejecución (exploración) pero no al final (explotación). Si la temperatura decrece muy lentamente, el proceso converge a la solución óptima.

En la Figura 1 se muestra un esquema de la metodología descripta. El modelo se implementa en entorno (Matlab, 2010) y el sistema de ecuaciones 11 a 16 se resuelve mediante el método de los elementos finitos utilizando el programa FlexPDE (FlexPDE, 2010).

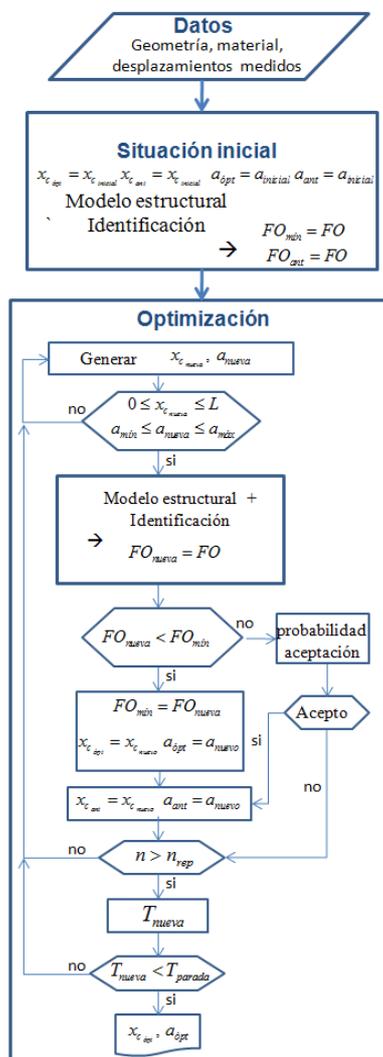


Figura 1: Esquema de solución

## 4. EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1. Estudios preliminares

Con el propósito de explorar cualitativa y cuantitativamente la dinámica de vigas fisuradas, así como las posibilidades de identificación de las fisuras utilizando el método propuesto, se trabaja sobre una viga de 1,2m de longitud, 0,04m de altura y 0,025m de ancho. Se considera una carga concentrada sinusoidal en el centro de viga y una carga constante distribuida a lo largo de la misma:  $q_y = \bar{q}_y + P_y \delta(x - L/2) \cos(\omega t)$  tal como se muestra en la Figura 2, donde  $P_y = 7200\text{N}$  y  $\bar{q}_y = -6000\text{N/m}$ . Se adopta una frecuencia de excitación  $\omega$  igual al 95 % de la primera frecuencia natural y se considera una razón de amortiguamiento  $\xi = 0,05$ . La viga es de un material definido por las siguientes características: Densidad  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$ , módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^{11}\text{ Pa}$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

En la Figura 3 se muestran los desplazamientos verticales máximos y mínimos calculados para una viga doblemente empotrada sana y con una fisura de 0,012m en el extremo izquierdo. Se comparan los resultados obtenidos con el modelo general propuesto, que considera tanto la

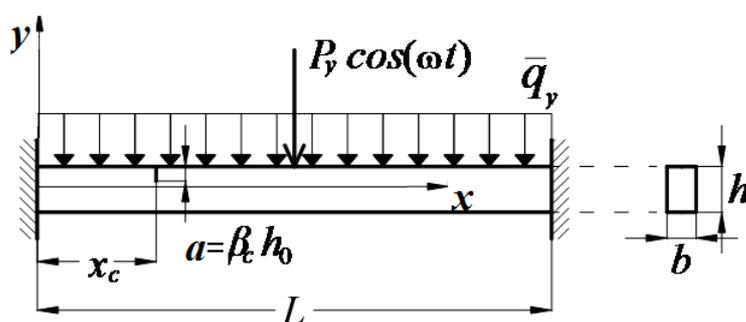


Figura 2: Características de la viga

no linealidad geométrica como la apertura y cierre de la fisura, y los obtenidos mediante un enfoque linealizado y una fisura siempre abierta.

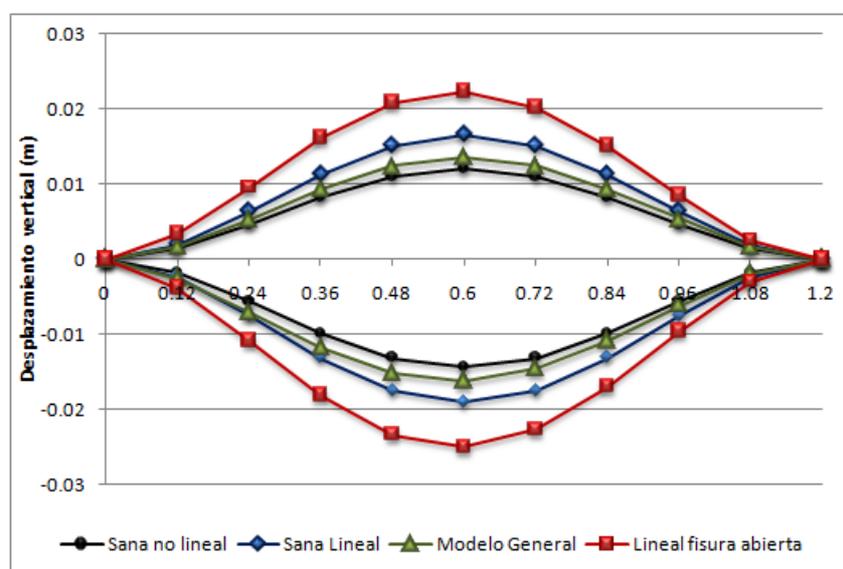


Figura 3: Comparación de modelos

Es posible observar cómo aumenta la amplitud del desplazamiento de la viga fisurada con respecto a la viga sana. Este aumento es mucho mayor en el caso del cálculo linealizado. Por otra parte se observa que el empleo de un modelo lineal, en este caso produce desplazamientos excesivamente grandes y alejados de la realidad. Por tal motivo, para esta relación de esbeltez, no es posible despreciar los efectos no lineales incorporados. Todos los casos analizados a continuación se realizaron utilizando el modelo general presentado en la sección 2.

En las Figuras 4 y 5 se muestran las diferencias de desplazamiento con respecto a los de la viga sana mencionada para diferentes posiciones y profundidad de la fisura. Se puede observar que las diferencias que corresponden a las fisuras ubicadas cerca de los puntos de inflexión (Figura 5) son muy pequeñas. En tal sentido, para detectar dichas fisuras habría que considerar diferentes configuraciones de carga que eventualmente posean excitaciones externas cercanas a una frecuencia resonante diferente para cambiar la forma de movimiento.

De manera similar se analizó el caso de una viga con las mismas características que la anterior pero empotrada en el extremo izquierdo y libre en el derecho. Las cargas consideradas en este caso son  $P_y=720\text{N}$  y  $\bar{q}_y=-600\text{N/m}$ .

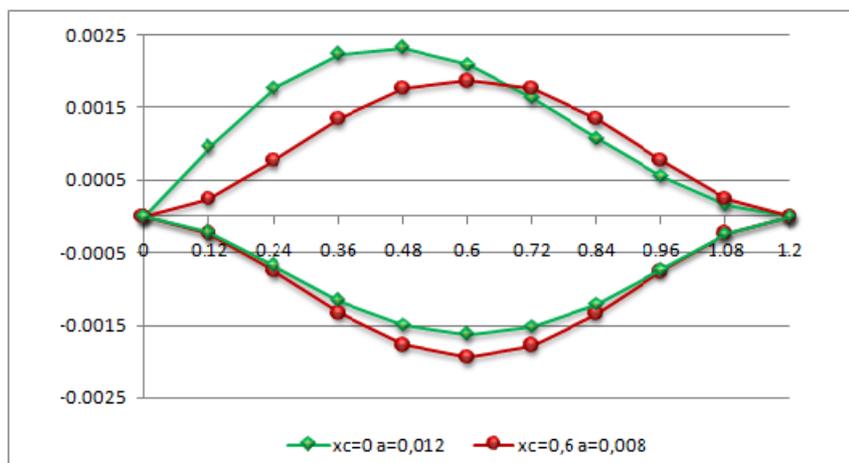


Figura 4: Diferencia de desplazamientos con respecto a la viga sana (m)

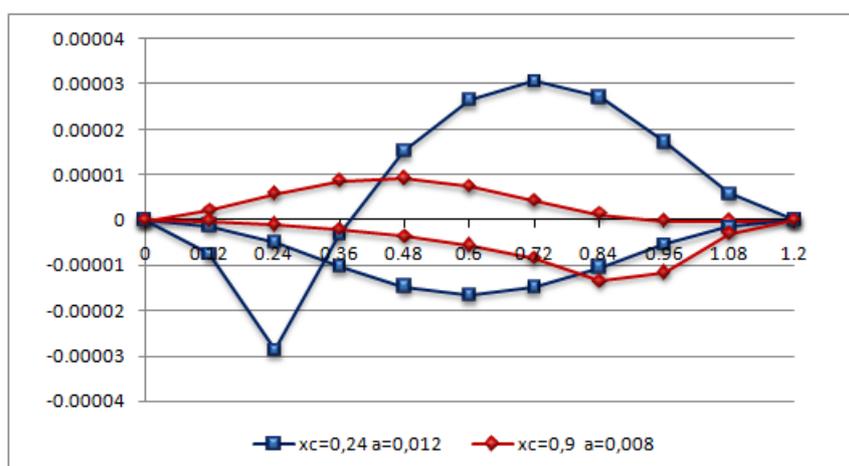


Figura 5: Diferencia de desplazamientos con respecto a la viga sana (m)

En la Figura 6 se compara el desplazamiento vertical en función del tiempo del punto ubicado a 0,12m del extremo izquierdo para distintas ubicaciones de una fisura de 0,12m de profundidad. Como se puede observar, cuando la fisura se encuentra en la mitad de la viga, los desplazamientos ya no se distinguen de los correspondientes a una viga sana.

En la Figura 7 que corresponde a la viga empotrada-libre ya descrita se puede apreciar nuevamente cómo la utilización de un modelo de fisura abierta puede subestimar el daño.

#### 4.2. Identificación de daño

Se estudian 4 casos en los cuales se pretende ubicar y estimar la profundidad de las fisuras. En los 2 primeros casos se analiza una viga empotrada-libre y en los otros dos casos se trabaja con una viga empotrada en ambos extremos. Las cargas y ubicación de las fisuras son la que se detallan en la Tabla 1. La carga dinámica se aplica a 0,9m del empotramiento en los dos primeros casos y en el centro de la viga para los casos de doble empotramiento.

El Caso 1 corresponde a la estimación de la localización y profundidad de una sola fisura de 0,012m ubicada a 0,24m del extremo izquierdo empotrado. En el Caso 2 se pretende localizar dos fisuras en la viga empotrada-libre, una igual a la del Caso 1 y otra de 0,016m a 0,06m del extremo empotrado. En el Caso 3 se trata de localizar 2 fisuras en la viga empotrada-empotrada

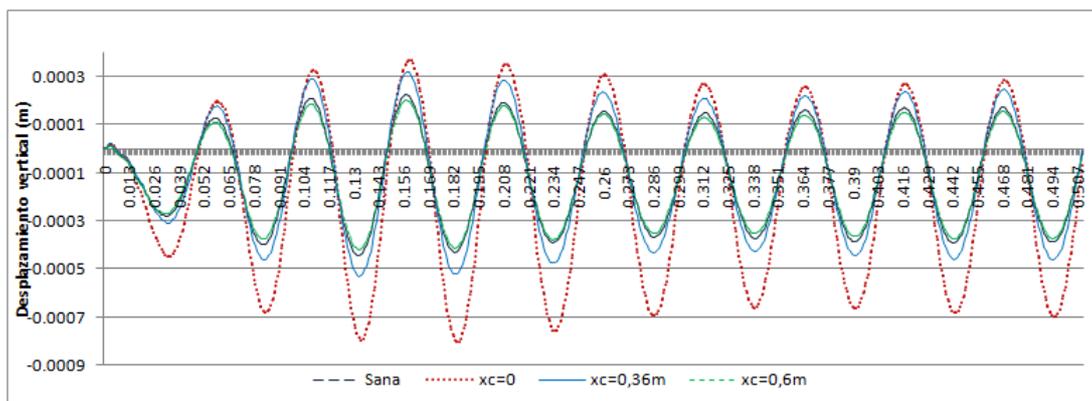


Figura 6: Historia temporal de desplazamientos a 0,12m del extremo izquierdo. Profundidad de la fisura: 0,12m. Viga empotrada-libre

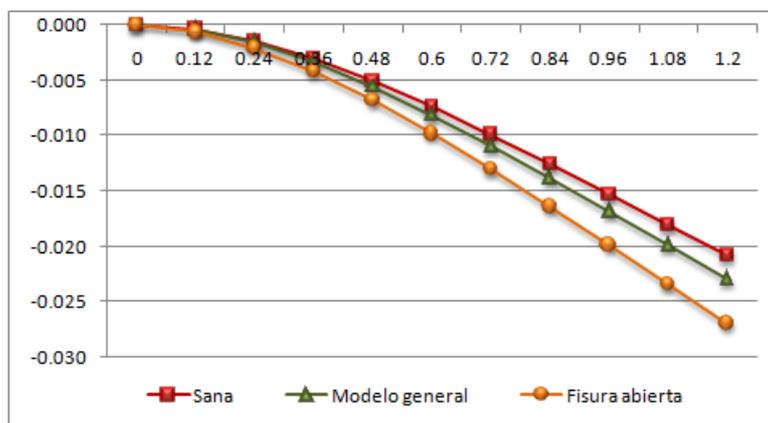


Figura 7: Comparación de modelos. Viga empotrada-libre. Fisura de 0,12m de profundidad en 0,24m

de acuerdo a los datos de la Tabla 1 y en el Caso 4 se pretende localizar las mismas fisuras que en el caso anterior considerando la existencia de un posible error en los datos medidos. Se adopta este error entre el 1 % y el 5 % y se lo asigna aleatoriamente a los valores medidos  $\tilde{v}_m$  del conjunto de  $M$  puntos.

En todos los casos se realiza un cálculo transitorio partiendo de condiciones iniciales en reposo hasta llegar al estado estacionario. En este estado se analiza el conjunto de desplazamientos máximos y mínimos.

Análogamente a lo propuesto por otros autores (Rosales et al., 2009; Viola et al., 2001), el cálculo de los errores que se cometen en la estimación de la ubicación y de la profundidad de la

Caso	Carga		Fisura 1		Fisura 2	
	$\bar{q}_y$ (N/m)	$P_y$ (N)	$\tilde{x}_c$ (m)	$\tilde{a}$ (m)	$\tilde{x}_c$ (m)	$\tilde{a}$ (m)
1	-600	300	0,24	0,012	-	-
2	-600	300	0,24	0,012	0,12	0,016
3	-6000	7200	0,48	0,01	0,06	0,012
4	-6000	7200	0,48	0,01	0,06	0,012

Tabla 1: Cargas y características de las fisuras reales

Caso	Identificadas				Errores			
	Fisura 1		Fisura 2		Fisura 1		Fisura 2	
	$x_c$ (m)	$a$ (m)	$x_c$ (m)	$a$ (m)	$Err_1$ (%)	$Err_2$ (%)	$Err_1$ (%)	$Err_2$ (%)
1	0,24	0,012	-	-	0	0	-	-
2	0,22	0,0085	0,14	0,017	-1,67	-8,75	1,67	2,5
3	0,48	0,0105	0,04	0,0105	0	1,25	-1,67	-3,75
4	0,48	0,013	0,06	0,013	0	7,5	0	2,5

Tabla 2: Fisuras estimadas y errores correspondientes

fisura respectivamente se realiza de la siguiente manera:

$$Err_1 = \frac{x_c - \tilde{x}_c}{L} \quad Err_2 = \frac{a - \tilde{a}}{h} \quad (23)$$

donde  $\tilde{x}_c$  y  $\tilde{a}$  corresponden a la ubicación y profundidad real de la fisura y  $x_c$  y  $a$  a las estimadas, respectivamente.

En el Caso 1 la fisura fue detectada exactamente tanto en cuanto a su localización como a su profundidad. En la Figura 8 se puede apreciar la forma de la función objetivo. En el resto de los casos se encontraron las soluciones que se muestran en la Tabla 2 con los errores porcentuales indicados.

Cabe destacar que en el caso de la viga empotrada-libre no se produce acoplamiento axial-flexional (ecuaciones 11, 12).

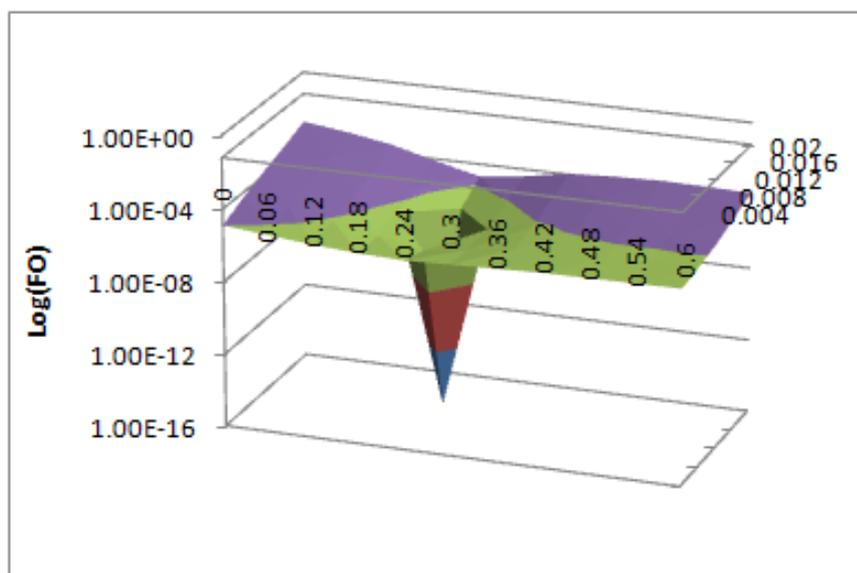


Figura 8: Función objetivo para una sola fisura

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para la identificación de fallas por fatiga basada en un modelo dinámico de vigas que contempla efectos de corte y de inercia rotatoria y fundamentalmente aspectos no lineales relacionados con la “respiración” de la fisura, la existencia de vibraciones de amplitud moderada y de una carga inicial.

Las correspondientes ecuaciones fueron resueltas a partir del método de elementos finitos. Específicamente se analizó la respuesta resonante para cargas dinámicas sinusoidales actuando simultáneamente con una carga estática.

El problema de identificación se ha planteado como uno de optimización en el cual se busca minimizar la diferencia entre desplazamientos calculados y medidos en régimen estacionario. Éste fue resuelto con el método de recocido simulado.

Los ejemplos considerados han mostrado que la presente metodología permite identificar tanto la posición como la profundidad de fisuras por fatiga con razonable precisión aún cuando existan pequeños errores de medición.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el auspicio de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y el CONICET.

## REFERENCIAS

- Carneiro S.H. *Model-based vibration diagnostic of cracked beams in the time domain*. Tesis de Doctorado, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.
- Chati M., Rand R., y Mukherjee S. Modal analysis of a cracked beam. *Journal of sound and vibration*, 207:249–270, 1997.
- Cortínez V. y Dotti F. Influencia del efecto breathing en la identificación de fisuras en vigas de paredes delgadas. *Mecánica Computacional*, páginas 2047–2065, 2013a.
- Cortínez V. y Dotti F. Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 110:249–257, 2013b.
- FlexPDE. V.6, PDE Solutions Inc. 2010. [www.pdesolutions.com](http://www.pdesolutions.com).
- Giannini O., Casini P., y Vestroni F. Nonlinear harmonic identification of breathing cracks in beams. *Computers and Structures*, 129:166–177, 2013.
- Han S. y Benaroya H. Non-linear coupled transverse and axial vibration of a compliant structure, part 1: Formulation and free vibration. *Journal of Sound and vibration*, 237:837–873, 2000.
- Majkut L. Identification of crack in beams using forced vibrations amplitudes. 24:199–204, 2005.
- Matlab. R2010a The MathWorks, Inc. . 2010. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).
- Rosales M., Filipich C., y Buezas F. Crack detection in beam-like structures. *Engineering Structures*, 31:2257–2264, 2009.
- Shen M. An identification problem for vibrating cracked beams. *Journal of Sound and vibration*, 150(3):457–484, 1991.
- Tsyfansky S.L. y Beresnevich V.I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring. *Journal of Sound and vibration*, 213(3):159–168, 1998a.
- Tsyfansky S.L. y Beresnevich V.I. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings. *Journal of Sound and vibration*, 236(1):49–60, 1998b.
- Viola E., Federici L., y Nobile L. Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 36:23–35, 2001.