

## UN MODELO NOLINEAL DE LA DINÁMICA DEL FLUJO SANGUÍNEO Y LA PARED ARTERIAL

**Santiago A. Urquiza<sup>a,c</sup>, Nicolás F. Agüero Parisi<sup>a</sup>, Daniel E. Caballero<sup>a</sup>, Guillermo Lombera<sup>a</sup>, Pablo J. Blanco<sup>b,c</sup>, Gonzalo D. Ares<sup>b,c</sup> y Raúl A. Feijó<sup>b,c</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Mecánica, Universidad Nacional de Mar del Plata, Av. J.B. Justo 4302, B7608FDQ, Mar del Plata, Argentina, [santiago.urquiza@fi.mdp.edu.ar](mailto:santiago.urquiza@fi.mdp.edu.ar), <http://www.fi.mdp.edu.ar/>*

<sup>b</sup>*Laboratório Nacional de Computação Científica, Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, 25651-075, Petrópolis, Brazil, [pjblanco@lncc.br](mailto:pjblanco@lncc.br), [feij@lncc.br](mailto:feij@lncc.br), <http://www.lncc.br/>*

<sup>c</sup>*Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Medicina Assistida por Computação Científica, Brazil, <http://www.lncc.br/prjhemol/>*

**Palabras Clave:** FSI, formulación ALE, Hemodinámica, ecuaciones de Navier-Stokes, .

**Resumen.** Con tendencia creciente, el modelado computacional se está empleando para evaluar causas, predecir el desarrollo y optimizar tratamientos de varias patologías del sistema arterial. Esto debido principalmente a la potencialidad de estas técnicas para producir información cada vez más realista, con un mejor nivel de detalle y mejor precisión. Más aún, los modelos computacionales personalizados -específicos para cada paciente- se han vuelto atractivos para médicos e investigadores debido a que aportan información de relevancia para las evaluaciones clínicas a bajo costo. Sin embargo, los resultados del modelado computacional son altamente dependientes de la complejidad y realismo de las hipótesis simplificadoras y también de la precisión de las representaciones geométricas. En el caso particular de la hemodinámica de distritos arteriales paciente-específicos, el problema de interacción fluido estructura asociado presenta ciertos obstáculos relacionados con las características altamente no lineales de las ecuaciones gobernantes que deben ser abordados adecuadamente. Otro aspecto a ser considerado cuando se requiere evaluar las tensiones en la pared arterial, es que las geometrías obtenidas de imágenes médicas corresponden a configuraciones espaciales que no concuerdan con la configuración libre de cargas. Consecuentemente, esto puede llevar a evaluaciones incorrectas de los niveles de tensión parietal. Con estas cuestiones como guía, en este trabajo desarrollamos un modelo computacional de la pared arterial -considerada como un material hiperelástico- basado en una configuración deformada, por ejemplo la configuración diastólica. Esto se realiza para tener en cuenta las características geométricas apropiadas de los distritos arteriales con el objetivo de mejorar la precisión de las deformaciones y las tensiones calculadas. De esta manera, el problema del equilibrio es planteado en una configuración predeformada y con precarga. La correspondiente formulación es linealizada asumiendo conocida dicha configuración espacial. Además, se plantea el problema de acoplamiento fluido estructura asumiendo como conocida la misma configuración diastólica. En este contexto, es provista una linealización completa tanto para la descripción ALE en la subregión de fluido como para el problema de equilibrio del sólido. Las ecuaciones resultantes son discretizadas mediante el método de Elementos Finitos. Finalmente, esta formulación es utilizada para evaluar la respuesta mecánica de un segmento arterial sujeto a cargas hemodinámicas realistas.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la medida que las enfermedades cardiovasculares permanezcan como las principales causas de muerte y mortandad en el mundo [Mendis \(2011\)](#); [Heidenreich et al. \(2011\)](#), las comunidades biomédicas y de computación científica se verán compelidas a incrementar sus esfuerzos para mejorar aún más las herramientas computacionales orientadas al diagnóstico y tratamiento de estas afecciones.

En la última década la biomedicina y la computación científica han entrado en un círculo virtuoso de reciprocidad en los desarrollos, desafiando a la naturaleza con modelos cada vez más realistas de estructuras biológicas altamente complejas [Southern et al. \(2008\)](#). Específicamente, las simulaciones computacionales se utilizan cada vez con mayor frecuencia para evaluar causas, predecir el desarrollo y optimizar tratamientos e intervenciones de varias patologías en el sistema arterial. Esto se debe a la potencialidad de dichas técnicas para producir información cada vez más realista, con un mejor nivel de detalle y con mejor precisión. Por otra parte, los modelos computacionales individualizados -específicos de cada paciente- [Lewis \(2010\)](#); [Castro et al. \(2011\)](#) resultan cada vez más atractivos para médicos e investigadores, considerando los beneficios potenciales en conjunto con los bajos costos implicados y el impacto asociado al minimizarse los procedimientos invasivos.

Sin embargo, este tipo de modelos son altamente dependientes de (i) las hipótesis acerca de la interacción de los subsistemas que están siendo considerados, (ii) la precisión de la representación geométrica de las estructuras anatómicas y funcionales y, (iii) los datos que caracterizan el comportamiento de los materiales involucrados en el proceso de modelado. Para poder manejar la complejidad matemática y numérica subyacente con eficacia, el modelado del sistema arterial completo (concebido como una unidad funcional integrada) requiere un enfoque analítico claro. Procurando de este modo identificar las principales características de los subsistemas asociados a los distritos específicos o determinados aspectos funcionales. Una vez que los modelos matemáticos de estos subsistemas están correctamente establecidos, es necesario integrarlos nuevamente para recrear la complejidad de las interacciones dinámicas originales. De esta manera, para que las simulaciones puedan abordar las condiciones hemodinámicas prevalecientes en dichos distritos con realismo, se hace necesario prestar cuidada atención en los siguientes aspectos:

(a) Los datos del contorno de las interfases de la geometría tridimensional del distrito arterial de interés cuando éste es artificialmente separado del resto del árbol arterial. Estos aspectos vienen siendo considerados en detalle desde hace ya tiempo ([Urquiza et al. \(2006\)](#); [P. J. Blanco y Urquiza \(2007\)](#); [Blanco et al. \(2009\)](#); [P. J. Blanco y Feijóo \(2010\)](#); [Formaggia et al. \(2001\)](#)).

(b) Las ecuaciones constitutivas realistas para modelar el comportamiento de los tejidos blandos de la pared del vaso

Existe consenso de que el tejido arterial puede ser considerado como un material hiperelástico reforzado con fibras, y varias ecuaciones constitutivas fueron propuestas y validadas, ver [Holzapfel y Ogden \(2010\)](#); [Holzapfel \(2000\)](#) y las referencias citadas allí.

(c) El problema de interacción fluido-estructura (FSI) entre el flujo sanguíneo y el movimiento de las paredes arteriales.

Otro aspecto relevante a ser considerado es el adecuado tratamiento del dominio móvil del fluido (sangre) debido a la distensibilidad parietal [Fernandez y Moubachir \(2005\)](#); [Fernandez \(2011\)](#); [Tezduyar y Sathe \(2007\)](#). Ha sido ya señalado que las tensiones de corte transversales (WSS) pueden ser bastante sobreestimadas si la asunción de una pared arterial rígida es considerada en los modelos de flujo sanguíneo (modelado CFD puro) [Hsu y Bazilevs \(2011\)](#). Esto

remarca la necesidad de incluir el movimiento de la pared en las simulaciones de flujo. En efecto, las formulaciones de interacción fluido-estructura (FSI) son necesarias si se requiere una apropiada determinación de las tensiones en la interface entre la sangre y la pared sólida [Hsu y Bazilevs \(2011\)](#); [Tezduyar et al. \(2008, 2009\)](#); [Torii et al. \(2008\)](#).

(d) Las tensiones originadas por la precarga impuesta por el nivel de presión al que se hayan sometidos los distritos arteriales *in vivo*.

Consecuentemente, este aspecto se debe tener en cuenta para evaluar el estado tensional en la pared arterial, ya que los modelos computacionales paciente-específicos están basados en geometrías obtenidas *in-vivo* a partir de imágenes médicas (MRI, TC, etc). Éstas imágenes se corresponden con configuraciones espaciales arbitrarias que no están libres de cargas. De hecho, teniendo en cuenta que la diástole domina el ciclo cardíaco, se puede asumir que las imágenes obtenidas corresponden a alguna configuración ubicada en el lapso de dicho periodo. Por lo tanto, esto equivale a considerar una configuración que está cargada con al menos la presión diastólica. Omitir estos fenómenos puede llevar a evaluaciones incorrectas de las cantidades de interés, ver [Hsu y Bazilevs \(2011\)](#) y los trabajos allí citados.

Siguiendo los lineamientos descriptos anteriormente, en este trabajo se desarrolla un modelo integrado FSI para la simulación computacional de la pared arterial. La misma es considerada como un material hiperelástico en grandes deformaciones basado en una configuración deformada. Así se logra mejorar la predicción de las deformaciones y las tensiones, tanto en el interior de la pared como en la interfase misma. Consecuentemente, un problema de equilibrio mecánico reverso es planteado en una configuración predeformada y con precarga con el fin de encontrar la configuración libre de cargas externas. Dada la no linealidad de este problema, la correspondiente formulación es linealizada en dicha configuración espacial. A su vez, lo anterior hace posible plantear el problema de acoplamiento fluido-estructura en base a dicha configuración. También en este problema de FSI se obtienen las expresiones linealizadas, tanto para el fluido como para el sólido. Al pasar a las aplicaciones, las ecuaciones resultantes son discretizadas mediante el método de Elementos Finitos. En el cierre del trabajo, estas formulaciones son utilizadas para evaluar la respuesta mecánica de un segmento arterial correspondiente a un aneurisma cerebral sujeto a condiciones hemodinámicas realistas.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección se describen las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de acoplamiento fluido estructura en un segmento arterial. La formulación comprende la interacción de la pared vascular, considerada como un sólido hiperelástico, y el flujo sanguíneo en su interior. El problema FSI es tratado con dos submodelos: un modelo Arbitrariamente Lagrangeano Euleriano (ALE) [Donea et al. \(1982\)](#) para el fluido y un modelo Lagrangeano para la componente de sólido.

Cabe señalar aquí que este problema tiene varias fuentes de no linealidad. Las principales son: La ecuación constitutiva de los tejidos blandos de la pared, los desplazamientos y deformaciones parietales que no pueden considerarse pequeños, las no linealidades propias de las ecuaciones de Navier-Stokes sumadas al movimiento de ambos dominios. Debido a las mencionadas no linealidades, se torna conveniente obtener las correspondientes expresiones linealizadas en el continuo, tanto para el sólido como para el fluido. Por otra parte, es preciso resolver un problema mecánico reverso ([Gee et al. \(2010\)](#); [Govindjee y Mihalic \(1996, 1998\)](#); [Schield \(1967\)](#)) para obtener la configuración libre de cargas de la pared arterial, ya que se asume conocida una configuración sometida a precarga. Como ya fue mencionado, lo anterior está justificado en el hecho que las imágenes médicas son obtenidas *in vivo*. Más aún, teniendo en cuenta que en es-

tado de reposo la diástole comprende aproximadamente 2/3 del pulso cardíaco, se considerará que dichas imágenes son congruentes con el nivel de presión diastólica.

## 2.1. Expresiones de equilibrio mecánico

A continuación se presentan de manera concisa las ecuaciones de equilibrio mecánico en su formulación débil, tanto para el fluido como para la pared arterial. La exposición sigue los lineamientos generales encontrados en [Fernandez \(2011\)](#); [Fernandez y Moubachir \(2005\)](#); [Fernandez M. A. \(2004\)](#). Además se establecen las ecuaciones de acoplamiento que dan lugar al problema de FSI que representa la interacción entre el flujo sanguíneo y el movimiento de la pared arterial.

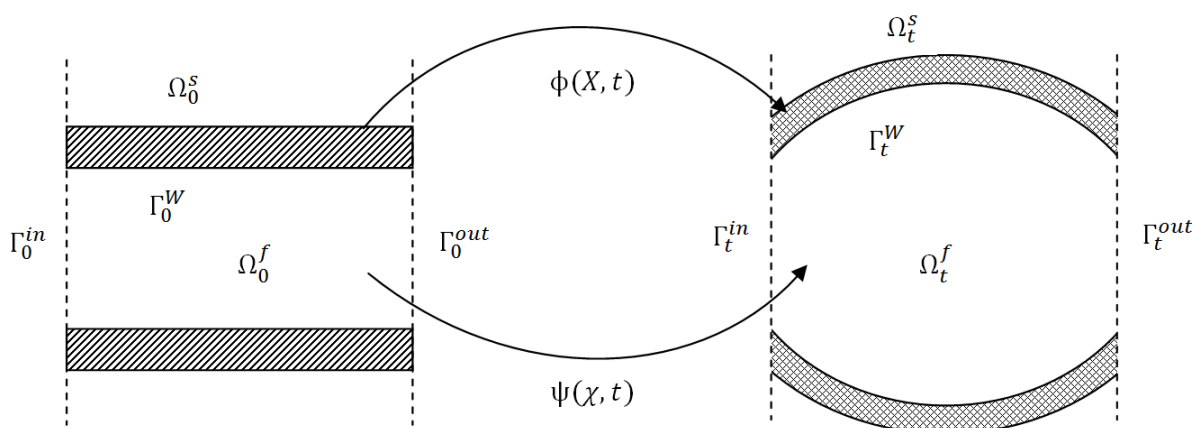


Figura 1: Mapeo del dominio de referencia al dominio actual

Sea  $\Omega_t = \Omega_t^f \cup \Omega_t^s$  el dominio de definición del problema como se muestra en la Figura 1. El mismo consiste en la unión de dos partes disjuntas, el subdominio de sólido  $\Omega_t^s$  representando la pared arterial y el subdominio de fluido  $\Omega_t^f$  correspondiente a la sangre contenida en el lumen del vaso al tiempo  $t$ . El segmento se considera delimitado por dos planos considerados fijos y coincidentes con secciones transversales al segmento arterial, a saber,  $\Gamma_t^{in}$  y  $\Gamma_t^{out}$ . Además consideramos que la interacción fluido estructura tiene lugar en la superficie de pared de sólido  $\Gamma_t^W$  que es mojada por el flujo sanguíneo. En dicha superficie se tiene continuidad del campo de desplazamientos entre ambos subdominios e igualdad de las tracciones. Es posible despreciar las tensiones de origen viscoso que el fluido ejerce sobre el sólido, asumiendo que la interacción se da sólo por la componente de la tracción que actúa en la dirección normal a la superficie (presión). Esta simplificación está justificada en que, para los números de Reynolds prevalecientes en el sistema arterial, las tensiones de corte en la pared debida a la viscosidad del fluido son varios órdenes de magnitud menores que las presión aplicada en el lugar. Consecuentemente, y dado que tanto el fluido como el sólido se asumen incompresibles [Fung \(1997\)](#), no puede asumirse igualdad en los trazos de los campos de presión en  $\Gamma_t^W$ . Dichos campos quedarán asociados a los subdominios de definición (fluido o sólido), aunque se identificarán por brevedad, con los mismos símbolos.

De acuerdo con lo ya enunciado, el problema FSI consiste por un lado, en obtener el dominio  $\Omega_t$  a medida que transcurre el tiempo. Por otro lado, juntamente con lo anterior, se deberán obtener las presiones, las velocidades de fluido y del marco referencial de la Formulación ALE. Por último, con dichos campos disponibles, es posible determinar las tensiones, tanto en el

fluido como en el sólido.

En razón de lo expresado, se tendrá un mapeo  $\mathcal{M}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$  donde se identifica  $\Omega_0$  con una configuración fija conocida. Usualmente, dicha configuración fija y conocida será la diastólica. A su vez, dicho mapeo puede separarse en los correspondientes al fluido y al sólido, como sigue:

$$\mathcal{A}_t : \Omega_0^f \xrightarrow{\psi} \Omega_t^f, \boldsymbol{\chi} \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}, t) \equiv \mathcal{A}_t(\boldsymbol{\chi}), \boldsymbol{\chi} \in \Omega_0^f, \boldsymbol{x} \in \Omega_t^f \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_t : \Omega_0^s \xrightarrow{\phi} \Omega_t^s, \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t) \equiv \mathcal{L}_t(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X} \in \Omega_0^s, \boldsymbol{x} \in \Omega_t^s \quad (2)$$

Asimismo, dada la adherencia del fluido a la pared sólida, se debe asumir una condición adicional dada por

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{Y}, t) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{Y}, t), \text{ con } \boldsymbol{Y} \in \Gamma_0^W \quad (3)$$

Consecuencia de esta igualdad, es la continuidad del campo de desplazamientos del sólido y del dominio referencial ALE del fluido sobre la frontera de interfase  $\Gamma^W$ . Cabe notar que  $\mathcal{L}_t$  consiste en un mapeo lagrangeano apropiado a una descripción de sólido [Quarteroni y Formaggia \(2003\)](#), donde las partículas del mismo son seguidas en su movimiento a lo largo del tiempo. Recíprocamente,  $\mathcal{A}_t$  será un mapeo tipo ALE para el flujo sanguíneo. En este caso es conveniente que los desplazamientos en el interior del dominio referencial de fluido puedan elegirse de manera arbitraria. Teniendo que cumplir la condición 3 sobre  $\Gamma^W$ . En este trabajo se utilizará una extensión armónica hacia el interior del dominio de fluido de los valores de desplazamiento dados por el sólido en  $\Gamma_t^W$ .

Las definiciones anteriores, deben complementarse con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}, t) = \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{\chi}, t) \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{X}, t) \\ \mathbb{F} &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \mathbb{I} + \nabla \boldsymbol{u}^f, [\mathbb{F}]_{ij} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \chi_j} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{J} = \det(\mathbb{F})$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{X}} = \mathbb{I} + \nabla \boldsymbol{u}^s, [\boldsymbol{F}]_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_j} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{J} = \det(\boldsymbol{F})$$

Observar que en las expresiones 4 y 5, como es usual, los gradientes son tomados respecto de las variables de definición (variables independientes espaciales), tal cual se explicita en las expresiones por componentes.

A su vez, para pasar de campos definidos en una configuración a campos definidos con variables independientes de otra configuración se utilizan las siguientes notaciones,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{\chi}, t) &= \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{x}, t) \circ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}, t); \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{\chi}, t) \circ \boldsymbol{\psi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) \\ \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{X}, t) &= \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x}, t) \circ \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}, t); \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{X}, t) \circ \boldsymbol{\phi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned}$$

También es posible definir,

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{I} - \nabla \mathbf{u}^s,$$

y consecuentemente,

$$\mathbf{f} = F^{-1} \circ \phi^{-1} \quad (6)$$

y,

$$\mathbf{f} = \mathbb{F}^{-1} \circ \psi^{-1} \quad (7)$$

Por último, el campo de velocidades del marco referencial queda caracterizado por el mapeo  $\mathcal{A}_t(\boldsymbol{\chi})$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_R^f(\boldsymbol{\chi}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}^f}{\partial t} \quad (8)$$

Cuando de acuerdo con el contexto no resulte ambiguo, con el fin de abreviar la cantidad de índices involucrados en las expresiones, se omitirán los supraíndices  $f$  y  $s$  que hacen referencia al fluido y al sólido respectivamente.

### Formulación de equilibrio para el fluido:

Teniendo en cuenta las definiciones establecidas anteriormente, el problema de equilibrio mecánico en el subdominio del fluido considerado desacoplado del sólido, puede plantearse como:

Encontrar  $(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}) \in \mathcal{U}_t^f$  tal que,

$$\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_t^f} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V}_t^f, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_t^f} \stackrel{def}{=} \\ & \int_{\Omega_t^f} \frac{\rho}{\mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{v} \mathbf{J}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t^f} \rho \, \text{div}(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R)) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_t + \\ & + \int_{\Omega_t^f} \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{v}, p)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) \, d\Omega_t - \int_{\Omega_t^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_t + \int_{\Gamma_t^{in+out}} \boldsymbol{\pi} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega_t^f} \hat{q} \, \text{div}(\mathbf{v}) \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t^f} (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega_t = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V}_t^f \end{aligned} \quad (10)$$

Se asume que  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R$  en  $\Gamma^W$ , siendo  $\bar{\mathbf{u}}$  un desplazamiento conocido en la frontera función del tiempo. Asimismo,  $\mathbf{v}_R$  es la velocidad del dominio referencial obtenida como la tasa temporal de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de acuerdo con 8. Estas condiciones definen la adherencia del fluido a la presencia de una pared sólida en  $\Gamma^W$ . Dichos términos definirán las condiciones que el sólido impone sobre el subdominio de fluido cuando consideremos el acoplamiento FSI.

Consistentemente, el espacio de soluciones cinemáticamente admisibles queda definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t^f \stackrel{def}{=} & \{ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f), \mathbf{v} = \mathbf{v}_R \text{ en } \Gamma_0^W \} \times \\ & \times \{ p = p \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid p \in L^2(\Omega_0^f) \} \times \\ & \times \{ \mathbf{u} = \mathbf{u} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_0^W \} \end{aligned} \quad (11)$$

Por último el conjunto de variaciones admisibles  $\mathcal{V}_t^f$ , queda definido como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t^f \stackrel{def}{=} & \{ \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f), \hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ en } \Gamma_0^W \} \times \\ & \times \{ \hat{q} = \hat{q} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid \hat{q} \in L^2(\Omega_0^f) \} \times \\ & \times \{ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \circ \boldsymbol{\psi}^{-1} \mid \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f), \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_0^W \} \end{aligned} \quad (12)$$

Siendo  $\Omega_0^f$  el dominio referencial usual de la formulación ALE para el fluido correspondiente a un dado tiempo fijo  $t_0$ , la ecuación 10 puede ser escrita con respecto a las variables espaciales en dicha configuración:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_{\Omega_0^f}^f(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_0^f} \stackrel{def}{=} \\ & \int_{\Omega_0^f} \rho \frac{\partial \mathbf{v} \mathbf{J}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0^f} \rho (\nabla(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R))) \mathbb{F}^{-1} \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \\ & + \int_{\Omega_0^f} \boldsymbol{\Sigma}_{(\mathbf{v}, p)} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}} \mathbb{F}^{-1})^S \mathbf{J} \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^{in+out}} \pi \mathbb{F}^{-T} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega_0^f} \hat{q} \nabla \mathbf{v} \mathbb{F}^{-1} \cdot \mathbb{I} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0^f} \nabla \mathbf{u} \mathbb{F}^{-1} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \mathbb{F}^{-1} \mathbf{J} \, d\Omega_0 = 0 \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V}_0^f \end{aligned} \quad (13)$$

En la ecuación anterior se tiene que  $\boldsymbol{\Sigma}_{(\mathbf{v}, p)} = -p\mathbb{I} + 2\mu(\nabla \mathbf{v} \mathbb{F}^{-1})^S$ , con  $(\bullet)^S$  parte simétrica. La ecuación 13 puede discretizarse en el tiempo con un esquema totalmente implícito resultando en,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_{\Omega_0^f}^f(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_0^f} \stackrel{def}{=} \\ & \int_{\Omega_0^f} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{v} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^f} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{v}^n \mathbf{J}^n \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0^f} \rho (\nabla(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R))) \mathbb{F}^{-1} \cdot \mathbb{I} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \\ & + \int_{\Omega_0^f} \boldsymbol{\Sigma}_{(\mathbf{v}, p)} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}} \mathbb{F}^{-1})^S \mathbf{J} \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^{in+out}} \pi \mathbb{F}^{-T} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \mathbf{J} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega_0^f} \hat{q} \nabla \mathbf{v} \mathbb{F}^{-1} \cdot \mathbb{I} \mathbf{J} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0^f} \nabla \mathbf{u} \mathbb{F}^{-1} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} \mathbb{F}^{-1} \mathbf{J} \, d\Omega_0 = 0 \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V}_0^f \end{aligned} \quad (14)$$

con  $\mathbf{v}^n = \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}, n\Delta t)$ , idem para  $\mathbf{J}^n$ . Para las variables evaluadas en  $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$  se han omitido los supraíndices, e.g.,  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}, (n+1)\Delta t) \doteq \mathbf{v}$ .



### Linealización del problema ALE

Tomando como punto de partida la ecuación 14 la misma se linealiza con un esquema clásico de Newton, para luego devolver las expresiones a la configuración  $\Omega_a \equiv \Omega_{t^{n+1}}^f(\mathbf{u}_a)$ , siendo  $\mathbf{u}_a$  un valor tentativo de  $\mathbf{u}^{n+1}$  (en general el valor en la iteración previa). De esta manera el problema linealizado resulta en las siguientes expresiones,

Encontrar  $(\delta\mathbf{v}, \delta p, \delta\mathbf{u}) \in \mathcal{V}_t^f$  tal que,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v}, p, \mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_t^f} + \\ & \frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v} + \tau\delta\mathbf{v}, p + \tau\delta p, \mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_t^f} = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V}_t^f \end{aligned} \tag{15}$$

con

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{R}_{\Omega_a}^f(\mathbf{v} + \tau\delta\mathbf{v}, p + \tau\delta p, \mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{q}, \hat{\mathbf{u}}) \rangle_{\Omega_a} = \\ & + \int_{\Omega_a} \frac{\rho}{\Delta t} \delta\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_a + \int_{\Omega_a} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a + \int_{\Omega_a} \rho \, \text{div}(\delta\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R)) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_a + \\ & + \int_{\Omega_a} \rho \, \text{div}(\mathbf{v} \otimes (\delta\mathbf{v} - \delta\mathbf{v}_R)) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_a + \int_{\Omega_a} \rho \, \text{div}(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R)) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a - \\ & - \int_{\Omega_a} \rho ((\nabla(\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_R)) \nabla\delta\mathbf{u}) \cdot \mathbb{I}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_a + \\ & + \int_{\Gamma_a^{in+out}} \pi \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Gamma_a - \int_{\Gamma_a^{in+out}} \pi (\nabla\delta\mathbf{u})^T \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Gamma_a - \\ & + \int_{\Omega_a} \boldsymbol{\sigma}_{(v,p)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_t + \int_{\Omega_a} \boldsymbol{\sigma}_{(\delta v, \delta p)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) \, d\Omega_t \\ & - \int_{\Omega_a} 2\mu (\nabla\mathbf{v} \nabla\delta\mathbf{u})^S \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}) \, d\Omega_a - \int_{\Omega_a} \boldsymbol{\sigma}_{(v,p)} \cdot (\nabla\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla\delta\mathbf{u})^S \, d\Omega_a - \\ & - \int_{\Omega_a^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a - \\ & - \int_{\Omega_a} \hat{q} \, \text{div}(\delta\mathbf{v}) \, d\Omega_a + \int_{\Omega_a} \hat{q} (\nabla\mathbf{v} \nabla\delta\mathbf{u} \cdot \mathbb{I}) \, d\Omega_a - \int_{\Omega_a} \hat{q} \, \text{div}(\mathbf{v}) \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a + \\ & + \int_{\Omega_a} \nabla\delta\mathbf{u} \cdot \nabla\hat{\mathbf{u}} \, d\Omega_a - \int_{\Omega_a} (\nabla\mathbf{u} \nabla\delta\mathbf{u}) \cdot \nabla\hat{\mathbf{u}} \, d\Omega_a - \\ & - \int_{\Omega_a} \nabla\mathbf{u} \cdot (\nabla\hat{\mathbf{u}} \nabla\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a + \int_{\Omega_a} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\hat{\mathbf{u}} \, \text{div}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega_a \end{aligned} \tag{16}$$

Lo distintivo aquí es que las velocidades y presiones quedan acopladas con los desplazamientos del marco referencial.

### Formulación de equilibrio para el sólido:

En la figura 2 pueden observarse las 3 configuraciones relevantes de sólido para el adecuado planteo de las condiciones de equilibrio. En tanto que la formulación se base en ecuaciones



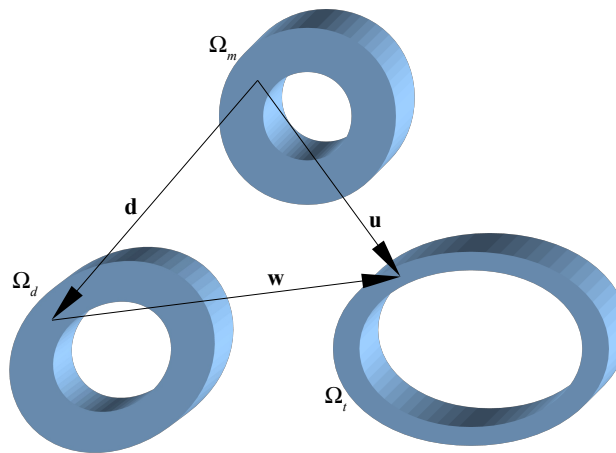


Figura 2: Configuraciones del sólido

constitutivas para materiales hiperelásticos, el problema sólo dependerá del tiempo a través de las variaciones temporales en las condiciones de contorno. En el presente caso, esta dependencia se da por la variación en la presión aplicada sobre la interfase de acoplamiento. Las condiciones generales y la linealización de este problema se han tratado en [Urquiza et al. \(2012\)](#), por lo tanto aquí se exponen los elementos estrictamente necesarios para el adecuado seguimiento del planteo, en tanto problema de FSI. Para el equilibrio del sólido se asume conocida una configuración que no está libre de cargas externas, que hemos de llamar configuración diastólica, la cual se encuentra sometida a una presión  $\pi(t_d)$  conocida. Esta presión puede asimilarse con la presión mínima del sistema arterial, la cual coincidirá con el fin de la diástole. Así, el problema puede pensarse a partir de las 3 configuraciones mostradas en la figura 2. Se tiene la configuración diastólica en un tiempo fijo  $t_d$  conocida. Por lo tanto será posible identificar la configuración fija  $\Omega_0^s$  con la configuración diastólica  $\Omega_d^s \equiv \Omega_{t_d}^s$ .

En virtud que las leyes constitutivas están referidas en general a un estado libre de tensiones, se hace necesario disponer del campo de desplazamientos  $\mathbf{d}$  que mapea la configuración libre de cargas  $\Omega_m^s$ , a priori desconocida, a la configuración  $\Omega_d^s$ . Más aún, para obtener el campo  $\mathbf{d}$  es necesario resolver previamente un problema mecánico reverso en  $\Omega_d^s$  mediante el cual se obtiene  $\mathbf{d}$  y consecuentemente,  $\Omega_m^s$ . Este problema se trata más adelante, asumiéndose aquí que el campo  $\mathbf{d}$  fue previamente calculado.

De esta forma, las condiciones de equilibrio mecánico para la pared arterial, considerada como una material incompresible hiperelástico en situación de carga al tiempo  $t$ , pueden expresarse en la configuración actual  $\Omega_t^s$  como:

Encontrar  $(\mathbf{w}, p) \in \mathcal{W}_t^s$  tal que,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^s}^s(\mathbf{w}, p), (\hat{\mathbf{w}}, \hat{q}) \rangle_{\Omega_t^s} &= \int_{\Omega_t^s} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_t - \\
&- \int_{\Omega_t^s} p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_t + \int_{\Gamma_t^W} \pi \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Gamma - \int_{\Omega_t^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Omega_t - \\
&- \int_{\Omega_t^s} \hat{q}(1 - \det \mathbf{f}) d\Omega_t = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{w}}, \hat{q}) \in \mathcal{W}_t^s
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathcal{W}_t^s \stackrel{\text{def}}{=} \{ \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}} \circ \boldsymbol{\phi}^{-1} \mid \hat{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^s), \hat{\mathbf{v}} = 0 \text{ en } \Gamma_0^{\text{in/out}} \} \times \{ \hat{q} = \hat{q} \circ \boldsymbol{\phi}^{-1} \mid \hat{q} \in L^2(\Omega_0^s) \} \tag{18}$$

En este caso se ha considerado una condición de Neumann sobre  $\Gamma^W$  correspondiente a una presión normal función del tiempo  $\pi(t)$ . Esta será la vía para acoplar con el fluido, cuando  $\pi$  se substituya por la presión del flujo sanguíneo evaluada en la interfase de acoplamiento. Observar que al considerar al sólido como incompresible, la tensión  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)$  se ha descompuesto en componente hidrostática y desviadora  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{u})$ . En referencia a la figura 2, el campo de desplazamientos total vale  $\mathbf{u} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$  con  $\mathbf{d}$  asumido conocido. Por último, para abreviar la exposición se ha considerado al sólido completamente amarrado en  $\Gamma^{\text{in/out}}$ , condición que puede relajarse convenientemente para considerar movimientos en la dirección radial llegado el caso.

### Expresiones linealizadas para el equilibrio del sólido

Se muestran aquí las expresiones linealizadas para el caso de la formulación dada por la ecuación 17. Nuevamente, el proceso de linealización se lleva a cabo en la configuración conocida  $\Omega_a^s$  para luego devolver las expresiones a la configuración  $\Omega_a^s \equiv \Omega_t^s(\mathbf{w}_a)$ ,  $\mathbf{w}_a$  un valor tentativo de  $\mathbf{w}$  solución del problema (en general el valor en la iteración previa). Este problema ya fue tratado Urquiza et al. (2012) y el lector es referido allí para mayores detalles.

Se obtiene la expresión linealizada del operador de sólido en el dominio espacial:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^s}^s(\mathbf{w}, p), (\hat{\mathbf{w}}, \hat{q}) \rangle_{\Omega_t^s} + \frac{d}{d\tau} \langle \mathcal{R}_{\Omega_t^s}^s(p + \tau \delta p, \mathbf{w} + \tau \delta \mathbf{w}), (\hat{\mathbf{w}}, \hat{q}) \rangle_{\Omega_t^s} \Big|_{\tau=0} = \\
\int_{\Omega_a^s} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_a - \int_{\Omega_a^s} p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_a + \\
+ \int_{\Gamma_a^W} \pi \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Gamma - \int_{\Omega_a^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Omega_a + \\
+ \int_{\Omega_a^s} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_a + \int_{\Omega_a^s} \nabla \delta \mathbf{w} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \nabla(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_a - \\
- \int_{\Omega_a^s} \delta p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{w}}) d\Omega_a + \int_{\Omega_a^s} p \nabla \hat{\mathbf{w}} \nabla \delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{I} d\Omega_a - \int_{\Omega_a^s} p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{w}}) \operatorname{div}(\delta \mathbf{w}) d\Omega_a + \\
+ \int_{\Gamma_a^W} \pi \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{w}} \operatorname{div}(\delta \mathbf{w}) d\Gamma_a - \int_{\Gamma_a^W} \pi (\nabla \delta \mathbf{w})^T \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Gamma_a - \int_{\Omega_a^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{w}} \operatorname{div}(\delta \mathbf{w}) d\Omega_a - \\
- \int_{\Omega_a^s} \hat{q}(1 - \det \mathbf{f}) d\Omega_t - \int_{\Omega_a^s} \hat{q} \operatorname{div}(\delta \mathbf{w}) d\Omega_a = 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Consecuentemente, el problema linealizado consiste en: Encontrar  $(\delta \mathbf{w}, \delta p) \in \mathcal{W}_t^s$  tal que la ecuación 19 se cumpla para  $\forall(\hat{\mathbf{w}}, \hat{q}) \in \mathcal{W}_t^s$ .

El tensor de cuarto orden  $\mathbf{D}$  se obtiene a partir del potencial hiperelástico  $\Psi$  (acorde a la ley constitutiva elegida), definiendo con  $\mathbf{S}$  al clásico segundo tensor de Piola-Kirchoff. Las expresiones del mismo resultan en,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \left. \frac{\partial \mathbf{S}_m^D}{\partial \mathbf{E}_m} \right|_{\mathbf{E}(\mathbf{d}+\mathbf{w})} = \\ &= \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \right|_{\mathbf{E}(\mathbf{d}+\mathbf{w})} \\ [\mathbf{D}]_{ijkl} &= \left[ \frac{1}{\det F^U} [\mathbf{D}^*]_{abcd} F_{ia}^U F_{jb}^U F_{kc}^U F_{ld}^U \right] \circ \phi^{-1} \\ F^U &= F(\mathbf{d} + \mathbf{w}) \end{aligned} \tag{20}$$

**Formulación del problema mecánico reverso:**

Se presentan a continuación las ecuaciones variacionales que dan lugar a la obtención del campo de desplazamientos  $\mathbf{d}$  de la ecuación 17, asumiendo como conocida la configuración diastólica  $\Omega_d^s$  a una dada presión intraarterial  $\pi(t_d) \doteq \pi_d$ . Este problema es conocido en la literatura como problema mecánico reverso Gee et al. (2010); Govindjee y Mihalic (1998, 1996); Lu Jia (2007); Lu et al. (2008) ya que la configuración libre de cargas  $\Omega_m^s$  es un resultado del problema al obtener el campo de desplazamientos  $\mathbf{d}$ .

Este problema puede formularse como sigue: encontrar  $(\mathbf{d}, p) \in \mathcal{D}_d^s$  tal que,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}_{\Omega_d^s}^s(\mathbf{d}, p), (\hat{\mathbf{d}}, \hat{q}) \rangle_{\Omega_d^s} &= \int_{\Omega_d^s} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \\ &- \int_{\Omega_d^s} p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \int_{\Omega_d^s} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{d}} d\Omega_d + \int_{\Gamma_d^w} \pi_d \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{d}} d\Gamma - \\ &- \int_{\Omega_d^s} \hat{q} (1 - \det \mathbf{f}) d\Omega_d = 0 \quad \forall(\hat{\mathbf{d}}, \hat{q}) \in \mathcal{D}_d^s \end{aligned} \tag{21}$$

$$\mathcal{D}_d^s \stackrel{def}{=} \{ \hat{\mathbf{d}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^s), \hat{\mathbf{d}} = 0 \text{ en } \Gamma_0^{in/out} \} \times \{ \hat{q} \in L^2(\Omega_d^s) \} \tag{22}$$

**Expresiones lineales para el problema reverso**

Las ecuaciones linealizadas correspondientes a la ecuación 21 se pueden expresar como sigue:

Encontrar  $(\delta \mathbf{d}, \delta p) \in \mathcal{D}_d^s$  tal que,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_d^s} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \int_{\Omega_d^s} p \operatorname{div}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \\
& - \int_{\Omega_d^s} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{d}} d\Omega_d + \int_{\Gamma_d^W} \pi_d \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{d}} d\Gamma + \int_{\Omega_d^s} \mathbf{D}(\mathbf{f}^{-1} \nabla \delta \mathbf{d})^S \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \\
& - \int_{\Omega_d^s} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}) (\mathbb{I} \cdot \nabla \delta \mathbf{d} \mathbf{f}^{-1}) d\Omega_d + 2 \int_{\Omega_d^s} \mathbf{f}^{-1} \nabla \delta \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma}^D(\mathbf{d}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}) d\Omega_d - \\
& - \int_{\Omega_d^s} \hat{q} (1 - \det \mathbf{f}) d\Omega_d - \int_{\Omega_d^s} \hat{q} \det \mathbf{f} (\mathbb{I} \cdot \nabla \delta \mathbf{d} \mathbf{f}^{-1}) d\Omega_d = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{d}}, \hat{q}) \in \mathcal{D}_d^s \quad (23)
\end{aligned}$$

En la ecuación 23 el tensor de cuarto orden  $\mathbf{D}$  viene dado por la expresión 20 evaluado con  $\mathbf{u} = \mathbf{d}$ .

### Acoplamiento Fluido-Estructura

Los subproblemas de fluido 10 y de sólido 17 pueden acoplarse de manera directa a través de las siguientes identificaciones: se reemplaza la condición de Neumann en el sólido  $\pi(t)$  por la traza en  $\Gamma^w$  de la presión  $p$  en el subdominio de fluido. Asimismo, se reemplaza la condición de Dirichlet en desplazamiento del marco ALE ( $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  en  $\Gamma_0^W$ ) por otra, donde el desplazamiento del marco ALE se vincula al desplazamiento del sólido en la frontera de acoplamiento. De esta manera, se tiene para el problema de fluido que vale la condición  $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s \equiv \mathbf{d} + \mathbf{w}$  en  $\Gamma_0^W$ . Como consecuencia, el problema queda correctamente acoplado y en caso que en la implementación computacional se opte por la solución desagregada de cada subproblema, sólo deben acondicionarse dichas variables en la interfase de acoplamiento.

## 3. CASO DE APLICACIÓN: ANEURISMA EN ARTERIA CEREBRAL MEDIA

El objetivo de este ejemplo numérico es probar la formulación e implementación del problema con configuración material desconocida y posteriormente la secuencia de trabajo propuesta en un ambiente de condiciones hemodinámicas realistas. La formulación e implementación del problema sólido con configuración material conocida ya ha sido explorada y validada en Urquiza et al. (2012), mientras que la formulación de fluido ha sido ampliamente probada en Blanco et al. (2009); Urquiza et al. (2006).

### 3.1. Implementación numérica

La solución del problema de fluido será aproximada utilizando elementos finitos tetrahédricos con interpolación lineal, añadiendo para el campo de velocidades un grado de libertad adicional asociado a un nodo “bubble” que se condensa de manera estática en cada elemento. Por su parte, las ecuaciones de equilibrio mecánico correspondientes al sólido hiperelástico son aproximadas utilizando elementos tetrahédricos lineales tanto en la presión como en los desplazamientos, introduciendo estabilización en el campo de presiones para evitar problemas de *locking* volumétrico Urquiza et al. (2012).

El acoplamiento fluido-estructura será realizado mediante un esquema iterativo que utiliza los resolvedores de los subproblemas como cajas negras, dando como entrada a cada una de ellas la información provista por su contraparte. Para posibilitar la convergencia del esquema iterativo fue introducida subrelajación en las condiciones de acoplamiento Blanco et al. (2012).

### 3.2. Geometría, parámetros y discretización utilizada

A partir de imágenes médicas es obtenida la segmentación del lumen de un aneurisma localizado en la Arteria Cerebral Media. El espesor de la pared sólida fue escogido para que sea de aproximadamente el 30 % del radio medio del segmento arterial. Cabe aclarar que dichos valores de espesor y las propiedades elásticas de la pared fueron elegidas para que sean compatibles con el modelo 1D [Urquiza et al. \(2006\)](#), del cual se obtienen los valores de las condiciones de contorno. Se utilizaron mallas tetrahédricas no estructuradas para ambos subdominios, con aproximadamente 6000 nodos para la discretización del fluido y aproximadamente 9000 para la pared arterial, con 3 elementos en el espesor. En la figura (3) se observa la segmentación del segmento arterial a partir de tomografías computadas mientras que la figura (4) muestra la geometría y la mallas correspondientes.

El comportamiento del sólido es modelado utilizando una ecuación constitutiva clásica Neo-Hookeana y la elección de los parámetros de rigidez es seleccionada para que la compliancia del modelo 3D sea compatible con el modelo unidimensional en la superficie de entrada.

Para obtener valores realistas de las presiones de entrada y salida del fluido utilizamos los valores de presión obtenidos a partir de un modelo 1D del sistema cardiovascular, de acuerdo a [Urquiza et al. \(2006\)](#). La figura (5) muestra la curva de presión utilizada en el extremo proximal del segmento, correspondiente a un ciclo cardíaco. De manera consistente con la curva presentada, se asume una presión de diástole de  $10^5$  [dynas/cm<sup>2</sup>] para resolver el problema reverso y obtener la configuración material inicialmente desconocida.

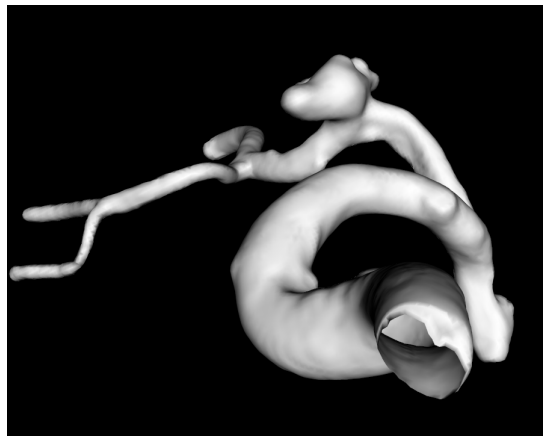


Figura 3: Segmentación de aneurisma en Arteria Cerebral Media.

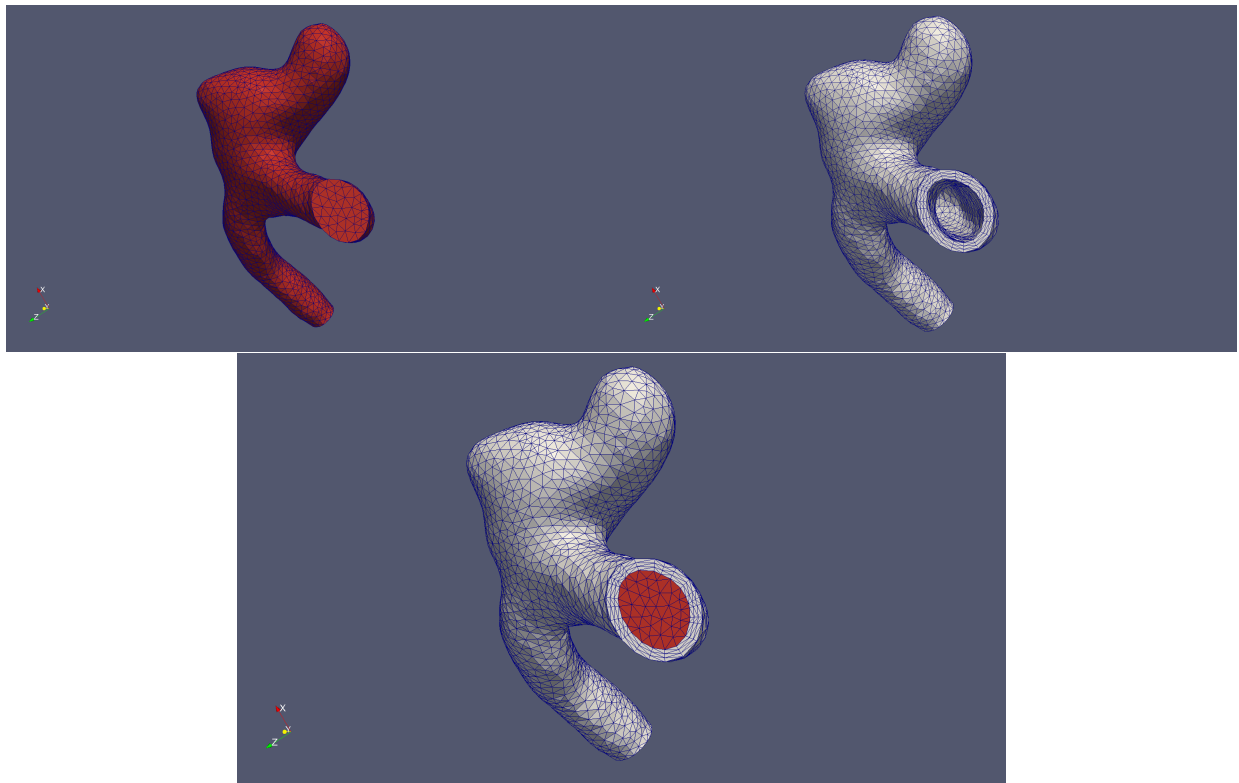


Figura 4: Geometría y mallas utilizadas. (sup-izq) Malla de fluido, (sup-der) Malla de sólido, (inf) Ambas mallas.

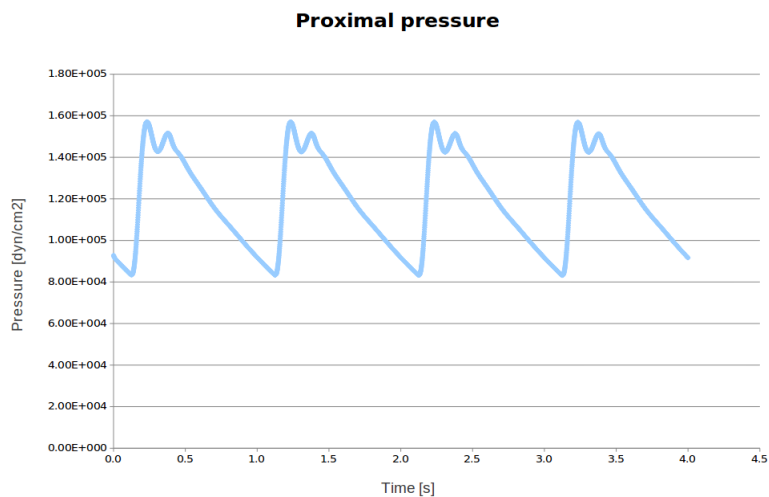


Figura 5: Presión proximal resultado de simulación 1D

### 3.3. Resultados

En primer lugar observamos los resultados del problema reverso, encontrando la configuración material (sin cargas) de la pared arterial. En la figura (6) se puede apreciar la configuración material obtenida, donde la escala de colores representa la magnitud del campo de desplazamientos  $d$ , contrastada con la configuración de diástole (basada en imágenes) que se dibuja en un tono blanco traslúcido. En segundo lugar, tenemos la configuración que el sólido toma en un determinado instante de la sístole en la figura (7), donde nuevamente es comparada con la

configuración de diástole (blanco traslúcido). Por último, la figura (8) muestra el campo de velocidades y las líneas de corriente para un instante de tiempo durante el período de sístole. Los valores de caudal obtenidos son prácticamente indistinguibles de los valores que se derivan del modelo 1D puro.

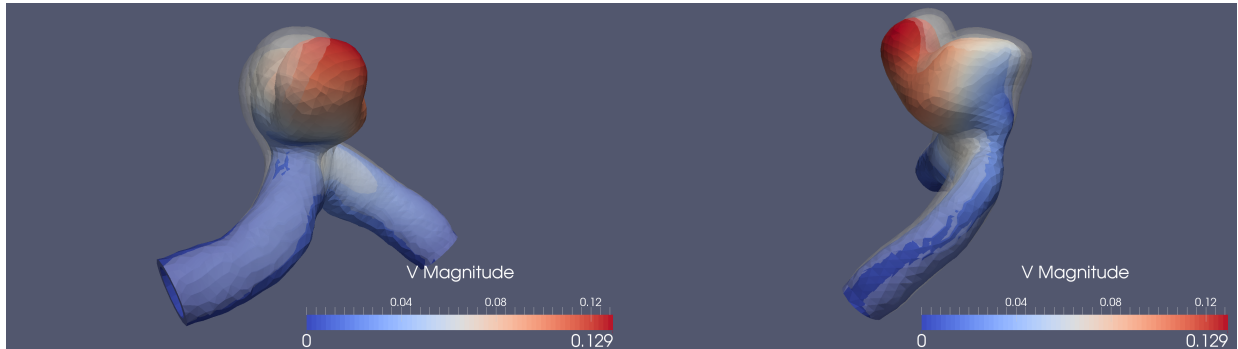


Figura 6: Resultados: problema reverso, configuración material vs. configuración inicial de diástole

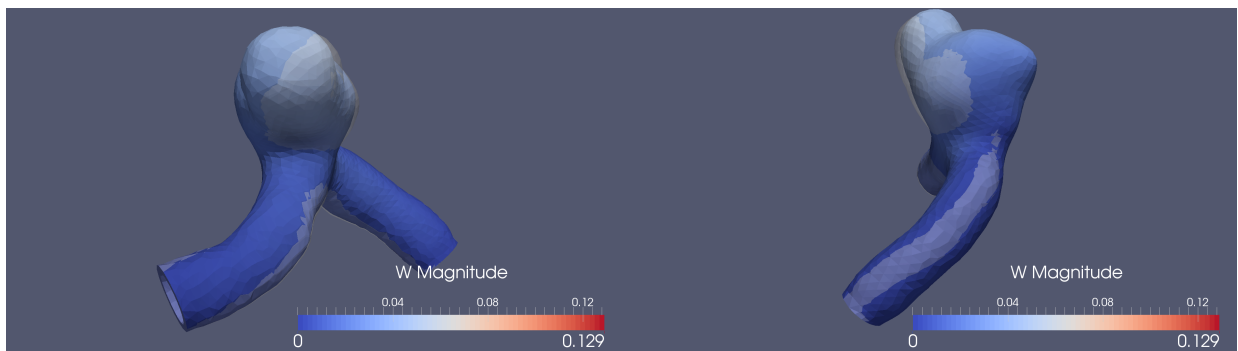


Figura 7: Resultados: problema FSI, configuración de sólido en sístole vs. configuración inicial de diástole

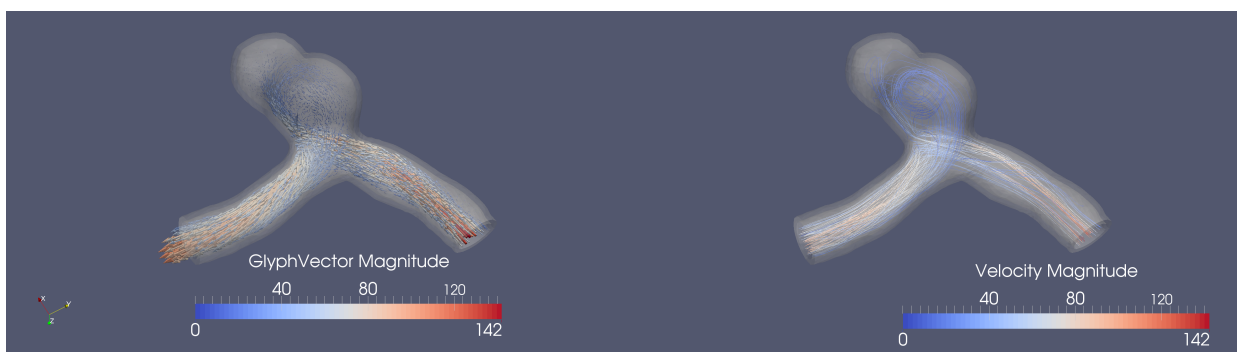


Figura 8: Resultados: problema FSI, campo de velocidades para un instante en sístole

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado sumariamente las formulaciones para tratar el problema de acoplamiento fluido-estructura en distritos arteriales con geometría 3D provenientes de imágenes médicas. Se han dado las formulaciones necesarias para su tratamiento y las respectivas



linealizaciones. Las ecuaciones resultantes fueron discretizadas por el Método de Elementos Finitos y aplicadas a la modelización de un segmento de arterial cerebral con aneurisma. El caso fue resuelto con cargas hemodinámicas realistas mostrando la capacidad de las formulaciones y algoritmos desarrollados para abordar casos FSI provenientes de pacientes específicos.

## REFERENCIAS

- Blanco P., Pivello M., Urquiza S., y Feijóo R. On the potentialities of 3d-1d coupled models in hemodynamics simulations. *Journal of Biomechanics*, 42(7):919–930, 2009.
- Blanco P.J., Leiva J.S., y Buscaglia G.C. A black-box decomposition approach for coupling heterogeneous components in hemodynamics simulations. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, :408–27, 2012.
- Castro M.A., Putman C.M., y Cebra J.R. Computational analysis of anterior communicating artery aneurysm shear stress before and after aneurysm formation. *Journal of Physics: Conference Series*, 332(1):012001, 2011.
- Donea J., Giuliani S., y Halleux J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1-3):689 – 723, 1982. ISSN 0045-7825. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90128-1](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(82)90128-1).
- Fernandez M.A. Coupling schemes for incompressible fluid-structure interaction: implicit, semi-implicit and explicit. Informe Técnico, INRIA, 2011.
- Fernandez M.A. y Moubachir M. A newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. *Computers & Structures*, 83(2-3):127 – 142, 2005. ISSN 0045-7949. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.04.021>. Advances in Analysis of Fluid Structure Interaction.
- Fernandez M. A. M.M. A newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling. Informe Técnico Rapport de recherche N°5085, INRIA, 2004.
- Formaggia L., Gerbeau J., Nobile F., y Quarteroni A. On the coupling of 3d and 1d navier-stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(6-7):561 – 582, 2001. ISSN 0045-7825. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4). Minisymposium on Methods for Flow Simulation and Modeling.
- Fung Y.C. *Biomechanics: Circulation*. Springer-Verlag, 2 edición, 1997.
- Gee M.W., Forster C., y Wall W.A. A computational strategy for prestressing patient-specific biomechanical problems under finite deformation. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 26(1):52–72, 2010. ISSN 2040-7947. doi: 10.1002/cnm.1236.
- Govindjee S. y Mihalic P.A. Computational methods for inverse finite elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(1-2):47 – 57, 1996. ISSN 0045-7825. doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(96\)01045-6](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(96)01045-6).
- Govindjee S. y Mihalic P.A. Computational methods for inverse deformations in quasi-incompressible finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(5):821–838, 1998. ISSN 1097-0207. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(199811)43:5<821::AID-NME453>3.0.CO;2-C.
- Heidenreich P.A., Trogon J.G., Khavjou O.A., Butler J., Dracup K., Ezekowitz M.D., Finkelstein E.A., Hong Y., Johnston S.C., Khera A., Lloyd-Jones D.M., Nelson S.A., Nichol G., Orenstein D., Wilson P.W., y Woo Y.J. Forecasting the future of cardiovascular disease in the united states: A policy statement from the american heart association. *Circulation*, 123(8):933–944, 2011. doi:10.1161/CIR.0b013e31820a55f5.

- Holzzapfel G.A. y Ogden R.W. Constitutive modelling of arteries. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 466(2118):1551–1597, 2010. doi:10.1098/rspa.2010.0058.
- Holzzapfel G.A. G.T. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. *Journal of Elasticity*, 61:1–48, 2000.
- Hsu M.C. y Bazilevs Y. Blood vessel tissue prestress modeling for vascular fluid-structure interaction simulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(6):593 – 599, 2011. ISSN 0168-874X. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2010.12.015. The Twenty-Second Annual Robert J. Melosh Competition.
- Lewis M.K.R. Current progress in patient-specific modeling. *Brief Bioinform.*, 11(1):111–126, 2010.
- Lu J., Zhou X., y Raghavan M. Inverse method of stress analysis for cerebral aneurysms. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 7(6):477–486, 2008. ISSN 1617-7959. doi:10.1007/s10237-007-0110-1.
- Lu Jia Zhou Xianlian R.M.L. Inverse elastostatic stress analysis in pre-deformed biological structures: Demonstration using abdominal aortic aneurysms. *Journal of biomechanics*, 40(40):693–696, 2007. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2006.01.015.
- Mendis S. *Global Atlas on Cardiovascular Disease Prevention and Control*, capítulo 1, página 155. World Health Organization, 2011.
- P. J. Blanco R.A.F. y Urquiza S.A. A unified variational approach for coupling 3d-1d models and its blood flow applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996(41-44):4391–4410, 2007. doi:10.1016/j.cma.2007.05.008.
- P. J. Blanco S. A. Urquiza S.A. y Feijóo R. Assessing the influence of heart rate in local hemodynamics through coupled 3d-1d-0d models. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*, 26:890–903., 2010. doi:10.1002/cnm.1389. Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). Print ISSN: 2040-7939. Online ISSN: 2040-7947.
- Quarteroni A. y Formaggia L. Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System. In *Modelling of Living Systems*, Handbook of Numerical Analysis Series. 2003.
- Schild R. Inverse deformation results in finite elasticity. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 18(4):490–500, 1967. ISSN 0044-2275. doi:10.1007/BF01601719.
- Southern J., Pitt-Francis J., Whiteley J., Stokeley D., Kobashi H., Nobes R., Kadooka Y., y Gavaghan D. Multi-scale computational modelling in biology and physiology. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 96(1-3):60 – 89, 2008. ISSN 0079-6107. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.pbiomolbio.2007.07.019. Cardiovascular Physiome.
- Tezduyar T.E. y Sathe S. Modelling of fluid-structure interactions with the space-time finite elements: Solution techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54(6-8):855–900, 2007. ISSN 1097-0363. doi:10.1002/fld.1430.
- Tezduyar T.E., Sathe S., Schwaab M., y Conklin B.S. Arterial fluid mechanics modeling with the stabilized space-time fluid-structure interaction technique. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(5):601–629, 2008. ISSN 1097-0363. doi:10.1002/fld.1633.
- Tezduyar T.E., Schwaab M., y Sathe S. Sequentially-coupled arterial fluid-structure interaction (scafsi) technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(45-46):3524 – 3533, 2009. ISSN 0045-7825. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.05.024. Models and Methods in Computational Vascular and Cardiovascular Mechanics.
- Torii R., Oshima M., Kobayashi T., Takagi K., y Tezduyar T. Fluid-structure interaction modeling of a patient-specific cerebral aneurysm: influence of structural modeling. *Computational*

- Mechanics*, 43(1):151–159, 2008. ISSN 0178-7675. doi:10.1007/s00466-008-0325-8.
- Urquiza S., Blanco P., Vénere M., y Feijóo R. Multidimensional modeling for the carotid blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4002–4017, 2006.
- Urquiza S.A., Blanco P.J., Ares G.D., y Raúl A. Feijóo R. *Scientific Computing Applied to Medicine and Healthcare*, capítulo Implementation issues of large strain formulations of hyperelastic materials for the modeling of arterial wall mechanics., páginas 79–121. INCT-MACC/LNCC, 2012.