Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:173–177
DOI 10.1365/s13291-011-0026-7

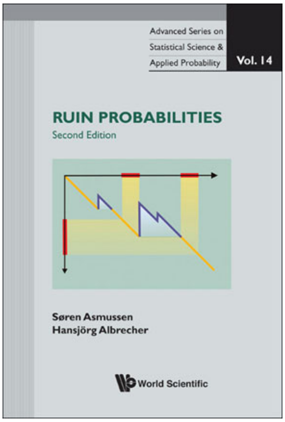
BUCHBESPRECHUNG

Søren Asmussen und Hansjörg Albrecher: "Ruin Probabilities"

World Scientific, 620 pp.

Vicky Fasen

Online publiziert: 10. August 2011



Ruinwahrscheinlichkeiten und Risikotheorie sind klassische Bereiche der Versicherungsmathematik, deren theoretische Fundamente sich in den letzten Jahren immens weiterentwickelt haben. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsunternehmen ruiniert wird, muss dieses diverse Risiken berücksichtigen, die mit dem Verkauf von Versicherungspolicen entstehen. Auf der einen Seite sind die Prämieneinnahmen der Versicherungspolicen einem Zufall unterworfen, da die Zahl der Kunden nicht konstant ist. Auf der anderen Seite überträgt der Kunde mit dem Kauf der Police das Risiko eines Schadens, was unkalkulierbar ist, auf das Versicherungsunternehmen (Zeitpunkt und Höhe eines Schadens sind ungewiss). Zudem kann das Versicherungsunternehmen seine Reserven investieren, woraus wieder Risiken entstehen. All diese Risiken müssen bei der Modellierung des Vermögens und der Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens beachtet werden und führen zu komplexen mathematischen Aufgaben, die Inhalt dieses Buches sind.

Die 2. Auflage des Buches *Ruin Probabilities* von Søren Asmussen und Hansjörg Albrecher wurde 2010 vom Verlag World Scientific veröffentlicht. Die neue Auflage ist eine überarbeitete und um einige Kapitel erweiterte Fassung der ersten Auflage von Søren Asmussen aus dem Jahr 2000. Im Gegensatz zu vielen anderen Büchern,

V. Fasen (✉)
RiskLab, ETH Zürich, Rämistrasse 101, Zürich, Schweiz
e-mail: vicky.fasen@math.ethz.ch

die nur die klassische Ruintheorie von Cramér und Lundberg behandeln, hebt sich dieses Buch ab, da es den aktuellen Stand der Wissenschaft und Forschung der letzten Jahre mit einbezieht und zudem die Verknüpfung zur Warteschlangentheorie und anderen Bereichen der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie präsentiert. Das Buch geht über ein Standardlehrbuch hinaus und hat vielmehr den Charakter eines Nachschlagwerks mit einer beeindruckenden Zusammenstellung von Referenzen (insgesamt 923) und Bemerkungen am Ende jedes Abschnitts. Im Vordergrund steht der mathematische Aspekt der Ruintheorie. Auch wenn der Praxisbezug bewusst nicht im Vordergrund steht, können Modelle und Methoden für jeden Aktuar von Interesse sein.

In der neuen Auflage wurden fünf Kapitel aus aktuellen Forschungsbereichen der letzten Jahre hinzugefügt, die sich mit

- Niveau-abhängigen Risikoprozessen,
- Ruinwahrscheinlichkeiten von Lévy-Prozessen,
- Gerber–Shiu-Funktionen,
- Modellen mit Abhängigkeiten,
- Stochastischer Kontrolltheorie

beschäftigen. Daraus resultiert eine Erhöhung der Seitenzahl von 385 auf 602 Seiten und in einer deutlichen Absetzung der zweiten Auflage von der ersten. Aufgrund der inhaltlichen Dichte des Buches ist es nur möglich, einen kurzen Überblick über den Inhalt zu geben. In dem Buch werden jedoch noch weitere Themen angesprochen, die hier außer Acht gelassen werden müssen.

Das Buch beginnt in Kapitel I mit einer Einführung in das klassische Risikomodell von Cramér–Lundberg und den wesentlichen Verteilungen, die im Versicherungskontext benötigt werden. Es endet mit einer Kurzzusammenfassung über die verschiedenen Methoden der Risikotheorie, die im Laufe des Buchs näher behandelt werden.

In Kapitel II und III werden die Grundlagen über stochastische Prozesse präsentiert, die bei den weiterführenden Modellen zwingend notwendig sind. Sie werden an Beispielen aus der Risikotheorie erläutert. Im Vergleich zur ersten Auflage, in der beide Kapitel noch unter einem Kapitel zusammengefasst waren, wurden viele Beispiele hinzugefügt. Ein mathematisch erfahrener Leser kann diese Kapitel auch überspringen und im späteren Verlauf gegebenenfalls nachlesen.

Im Folgenden werden dann in den Kapiteln IV–VIII die wesentlichen Modelle der Risikotheorie dargelegt und Ruinwahrscheinlichkeiten für Schadenshöhenverteilungen mit leichten Tails untersucht. Die anschließenden Kapitel IX–XIII betrachten das Verhalten beim Ruin der vorher eingeführten Modelle detaillierter oder verallgemeinern die Modelle. Es werden dort die modernen Themen der Ruintheorie abgehandelt. Diese Kapitel sind so gestaltet, dass sie je nach Interesse des Lesers auch unabhängig voneinander gelesen werden können und beginnen meist mit einer kurzen Einführung.

Die klassische Ruintheorie in unendlicher Zeit, zurückgehend auf die Schweden Cramér und Lundberg, die den Schadensankunftsprozess mit einem Poissonprozess unabhängig von den unabhängig und identisch verteilten Schadenshöhen modellieren, wird dann in Kapitel IV behandelt und geht bei weitem über das hinaus, was man in anderen Textbüchern findet. Nicht nur, dass die wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften des Risikoprozesses und Schadensprozesses sowie die Pollaczeck–Khinchine-Formel hergeleitet werden, es werden auch die gemeinsame Verteilung des Defizits beim Ruin und des Überschusses kurz vor dem Ruin sowie Spezialfälle der Pollaczeck–Khinchine-Formel berechnet. Alle Resultate werden rigoros bewiesen. Des Weiteren werden in diesem Kapitel die Lundberg-Ungleichung und die Cramér–Lundberg-Approximation hergeleitet, eine der Kernaussagen der klassischen Risikotheorie. Andere Themen sind auch noch Inhalt dieses Kapitels: Approximation von Ruinwahrscheinlichkeiten; Vergleich von Risiken und Methoden zur Schätzung des Lundberg-Koeffizienten; Sensitivität der Ruinwahrscheinlichkeit auf Veränderungen in der Prämienrate, der Schadenshöhenverteilung und der Ankunftsrate. Die komplexere Fragestellung der Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit ist Gegenstand von Kapitel IV.

Nachdem sich Kapitel II–V nur mit dem klassischen Risikoprozess auseinandergesetzt haben, wird das Modell in Kapitel VI erweitert, indem der Schadensankunftsprozess mit einem allgemeineren Erneuerungsprozess modelliert wird; dem *Sparre-Andersen-Prozess*. Die Modellierung des Schadensankunftsprozess durch einen Markovprozess oder periodische Fluktuationen ist dann Bestandteil von Kapitel VII.

In Kapitel VIII wird der Schadensprozess zwar wieder mit einem zusammengesetzten Poissonprozess modelliert, dafür kann der Prämienprozess von dem Überschussprozess abhängen und wächst damit nicht notwendigerweise linear. Zu Beginn werden motivierende Beispiele für dieses Modell gegeben, die dann im Folgenden näher untersucht werden. Dazu zählen Modelle, in denen das Versicherungsunternehmen sein Vermögen zu einer konstanten Zinsrate investiert, es sein Vermögen risikobehaftet anlegt, wobei die risikobehaftete Anlage mit einer geometrischen Brownschen Bewegung modelliert wird, oder es für seine Gewinne Steuern zahlen muss. Für jedes dieser Modelle wird dann das Ruinverhalten analysiert. Selbst das Ruinverhalten von stochastischen Rekurrenzgleichungen wird näher behandelt.

Phasenverteilungen sind eine wichtige Klasse von Verteilungen in der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie, da sie bei numerischen Berechnungen oft sehr effizient sind. Insbesondere besitzt die Ruinwahrscheinlichkeit im zusammengesetzten Poisson-Modell mit Schadenshöhen, die eine Phasenverteilung besitzen, eine analytische Darstellung. Darauf wird in Kapitel IX näher eingegangen. Zudem werden die Ruinwahrscheinlichkeiten der Modelle aus IV–VIII mit phasenverteilten Schäden betrachtet. Es wird aber auch eine kurze Einführung in Matrix-Exponentialverteilungen gegeben, die eine Verallgemeinerung von Phasenverteilungen sind.

Da man sich bisher auf Ruinwahrscheinlichkeiten für Schäden mit leichten Tails beschränkt hat (d.h. die Cramér–Lundberg-Bedingung ist erfüllt), wird in Kapitel X das Ruinverhalten für Modelle aus IV–VIII mit schweren Tails (subexponentiell) erarbeitet. Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über statistische Methoden aus der Extremwerttheorie zur Schätzung der Tails von Verteilungen ab, die das Ruinverhalten bestimmen.

In Kapitel XI wird das klassische Risikomodell verallgemeinert, indem der Schadenshöhenprozess nun durch einen Lévy-Prozess modelliert wird. Zunächst wird mit einer Einführung in Lévy-Prozesse begonnen. Danach wird die Ruinwahrscheinlichkeit sowohl für den Fall mit schweren Schadensverteilungen als auch im Fall, dass die Cramér–Lundberg-Bedingung erfüllt ist, berechnet. Zudem werden Skalierungsfunktionen als Hilfsmittel zur Berechnung von zweiseitigen Ruinwahrscheinlichkeiten vorgestellt und ein Überblick über Fluktuationstheorie gegeben.

Nachdem in Kapitel IV schon die gemeinsame Verteilung des Überschusses kurz vor dem Ruin und des Defizits beim Ruin hergeleitet wurden, werden nun mit *Gerber–Shiu-Funktionen* moderne Erweiterungen dieser Größen untersucht. Es sei $(R_t)_{t\geq 0}$ der Risikoprozess, $\tau(u)$ der Ruinzeitpunkt bei einem Anfangskapital u, $|R_{\tau(u)}|$ das Defizit beim Ruin und $R_{\tau(u)-}$ der Überschuss kurz vor dem Ruin, dann nennt man

$$m(u) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-\delta\tau(u)} w(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|); \tau(u) < \infty\big]$$

Gerber–Shiu-Funktion, wobei die Straffunktion w nicht-negativ ist. Ihre Eigenschaften und Lösungen werden im Fall des klassischen Risikomodells, Erneuerungsmodell und Lévy-Risikomodells in Kapitel XII analysiert.

Verallgemeinerte Modelle sind Bestandteil von Kapitel XIII, die zum Beispiel Abhängigkeiten in den Schadenshöhen oder Zwischenankunftszeiten erlauben (lineare Modelle, Shot-Noise-Modelle, Sparre-Andersen-Modell). Ziel ist es, Motivationen zu geben, wie die Abhängigkeitsstruktur die Ruinwahrscheinlichkeit beeinflussen kann und welche alternativen Modelle noch betrachtet werden können. Aus diesem Grund ist dieses Kapitel eher kurz gefasst.

Auch Versicherungsunternehmen müssen sich Strategien überlegen, um ihr Vermögen (Nutzen) zu maximieren, z.B. welchen Anteil ihrer Reserven in eine risikobehaftete Anlage investiert wird. Die Berechnung der besten Strategie führt zur stochastischen Kontrolltheorie in diskreter Zeit (dynamische Programmierung) und in stetiger Zeit (Lösen von Hamilton–Jacobi–Bellman-Gleichungen). Ein Überblick in das reichhaltige und sehr aktuelle Gebiet der stochastischen Kontrolltheorie mit Anwendungen im Versicherungskontext ist Gegenstand von Kapitel XIV.

Verschiedene Verfahren zur Simulierung der Ruinwahrscheinlichkeit, insbesondere Importance Sampling, in endlicher und unendlicher Zeit, mit schweren und leichten Schadensverteilungen werden in Kapitel XV präsentiert. Im letzten Kapitel XVI, unter dem Namen *diverse Themen*, wird etwas über Risikomodelle in diskreter Zeit, Approximation der Schadenshöhenverteilung, Prämienberechnung und Rückversicherung gesagt. Ein Anhang mit diversen Grundlagen schließt das Buch ab.

Das Buch stellt imposant die Entwicklung mathematischer Modelle und Methoden der klassischen und modernen Ruintheorie der letzten Jahrzehnte dar. Es zählt eindeutig zu den Monographien aus der Kategorie angewandter Wahrscheinlichkeitstheorie mit sehr vielen Ausblicken und Verweisen zu Erweiterungsmöglichkeiten und alternativer Literatur. Beeindruckend ist, wie präzise jede Aussage bewiesen wird. Teilweise werden am Ende eines Abschnitts noch alternative Beweise vorgestellt. Der Leser sollte aber eine gewisse Vertrautheit mit Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastischen Prozessen mitbringen. Ohne dieses Grundwissen wird dieses Buch vermutlich schwer zu verstehen sein, obwohl alles rigoros definiert wird. Wer dieses Wissen mitbringt, wird dieses Buch mit großem Gewinn lesen. Die Notation richtet sich an die Konventionen der Warteschlangentheorie und ist deshalb für einen Versicherungsmathematiker nicht direkt zugänglich. Aber das Notationsverzeichnis im Anschluss an das Vorwort, das es in der ersten Auflage noch nicht gab, ist diesbezüglich eine Bereicherung. Zusammenfassend kann man sagen: Es ist ein ausgesprochen gelungenes Werk, das es so noch nicht auf dem Markt gibt. Es wird sicherlich in den nächsten Jahren als Standardreferenzwerk im Bereich der Ruintheorie verwendet.