Jahresber Dtsch Math-Ver (2011) 113:179–182
DOI 10.1365/s13291-011-0025-8

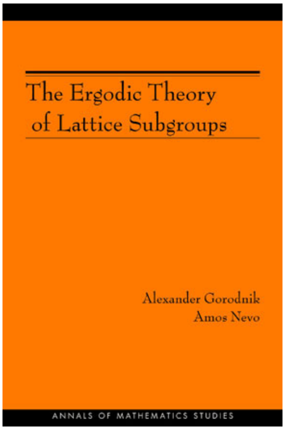
BUCHBESPRECHUNG

Alexander Gorodnik and Amos Nevo: "The Ergodic Theory of Lattice Subgroups"

Princeton University Press, 2010

Manfred Einsiedler

Online publiziert: 10. August 2011



Die Ergodentheorie beschäftigt sich mit dynamischen Systemen unter Verwendung eines statistischen Gesichtspunktes. Ein dynamisches System kann zum Beispiel aus einer Abbildung $T : X \to X$ auf einem Raum X bestehen und ein wichtiger Aspekt der Theorie ist die Untersuchung der Bahnen

$$\{T^n(x) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

eines Punktes $x \in X$. Für einen gegebenen Ausgangspunkt kann diese Untersuchung mitunter sehr schwierig sein, aber die Untersuchung der Bahnen typischer Punkte ist oft viel einfacher. Das Wort „typisch" ist in diesem Zusammenhang bzgl. eines invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes zu verstehen.

Allgemeiner besteht ein dynamisches System aus einer Gruppenwirkung

$$\cdot : G \times X \to X, \quad (g, x) \in G \times X \mapsto g \cdot x.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf X heißt G-invariant falls $\mu(g^{-1} \cdot B) = \mu(B)$ für alle $g \in G$ und alle meßbaren $B \subset X$. Ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf X heißt ergodisch, falls für ein meßbares $B \subset X$ mit $g^{-1} \cdot B = B$ für alle $g \in G$ folgt, daß $\mu(B) \in \{0, 1\}$. Also muß jede invariante Menge B erfüllen, daß B entweder fast leer oder fast ganz X sein muss.

M. Einsiedler (✉)
Zürich, Schweiz
e-mail: manfred.einsiedler@math.ethz.ch

Oft schränkt man sich in der Untersuchung auf ergodische invariante Maße ein, was aus zwei Gründen keine sehr drastische Einschränkung ist. Erstens sind viele natürliche invariante Maße ergodisch (außer wenn Invarianten vorhanden sind) und zweitens läßt sich (mittels Choquet's Theorem) jedes invariante Wahrscheinlichkeitsmaß in ergodische Wahrscheinlichkeitsmaße zerlegen.

Als Beispiel für obige Behauptung, daß Bahnen typischer Punkte einfacher zu untersuchen sind, wollen wir folgende Aussage beweisen. Für ein ergodisches invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß μ gilt für μ-fast alle $x \in X$, daß der Abschluß der Bahn $G \cdot x$ gleich dem Träger des Maßes μ ist. Hier nehmen wir an, daß X eine abzählbare Basis der Topologie hat, und zur Einfachheit auch, daß G abzählbar ist. In diesem Fall gilt für jede offene Menge O mit $\mu(O) > 0$, daß die Bahn $G \cdot O = \{g \cdot x : g \in G, x \in O\}$ invariant ist und daher $\mu(G \cdot O) = 1$ erfüllen muß. Wendet man dies auf alle offene Mengen in der Basis, die den Träger von μ schneiden, an, und nimmt man den abzählbaren Durchschnitt der so erhaltenen meßbaren Mengen vom Maß eins, ergibt sich die Aussage.

Eine wichtige Verallgemeinerung obiger Untersuchung des Abschlusses der Bahn ist die Untersuchung der Verteilung der Bahn. Einer der grundlegenden Sätze der Ergodentheorie ist der Birkhoffsche Ergodensatz von 1931, welcher diese Frage nach der Verteilung der Bahn für eine Abbildung beantwortet. Genauer formuliert: Für eine Abbildung $T : X \to X$, ein gegebenes invariantes Wahscheinlichkeitsmaß μ auf X und eine integrierbare Funktion f auf X gilt, daß der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = F(x)$$

für μ-fast alle $x \in X$ existiert. Unter Verwendung der Fast-Invarianz von Intervallen in $\mathbb{N}$ sieht man schnell, daß $F(x) = F(T(x))$ gelten muß, wenn nur der Grenzwert für x existiert. Falls μ zusätzlich ergodisch ist, dann ist $F(x) = \int f d\mu$ für μ-fast alle x. Dieser Ergodensatz wurde im letzten Jahrhundert mehrmals verallgemeinert. Ein natürlicher Gültigkeitsbereich dieses Satzes, nämlich der aller Gruppenwirkungen von Gruppen, auf denen fast invariante Teilmengen existieren – sogenannte mittelbare Gruppen, wurde 1999 in einer Arbeit von Elon Lindenstrauss erreicht.

In dem Buch ‚The Ergodic Theory of Lattice Subgroups' geht es um Gruppenwirkungen von halbeinfachen Liegruppen, wie zum Beispiel $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, und Gittern in diesen, zum Beispiel $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Allgemeiner werden auch p-adische Liegruppen und Liegruppen über einem lokalen Grundkörper mit positiver Charakteristik und Produkte von diesen Gruppen erlaubt. Solche halbeinfachen Liegruppen sind nicht mittelbar und somit ist der oben erwähnte Ergodensatz nicht anwendbar. Auf den ersten Blick ist es nicht einmal klar, wie man obige Mittelbildungen über Teile der Bahnen verallgemeinern sollte. Wie aber Gorodnik und Nevo in ihrem Buch zeigen, gibt es viele Familien von Teilmengen, wie zum Beispiel Kugeln bezüglich einer linksinvarianten Metrik auf G, für die Ergodensätze gelten. In der Tat sind diese Sätze oft viel stärker als ihre Vorgänger für mittelbare Gruppen. Um diesen Unterschied zu erklären wollen wir eine Version eines dieser Sätze formulieren.

Sei $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ für $n \geq 2$. Sei $\Gamma_t = \{\gamma \in \Gamma : \log \|\gamma\| < t\}$, wobei $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm bezeichnet. Sei (X, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Wirkung von Γ auf X so daß μ Γ-invariant und ergodisch ist. Für jedes $f \in L^p(X)$ mit $1 < p < \infty$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{|\Gamma_t|} \sum_{\gamma\in\Gamma_t} f(\gamma^{-1}\cdot x) = \int f d\mu$$

sowohl in L^p als auch für μ-fast alle $x \in X$. Falls zusätzlich ‚spectral gap‘ (siehe unten) für die Wirkung vorliegt, dann gilt sogar

$$\left|\frac{1}{|\Gamma_t|} \sum_{\gamma\in\Gamma_t} f(\gamma^{-1}\cdot x) - \int f d\mu\right| \le C_p(f,x)e^{-\zeta_p t} \tag{1}$$

für Konstanten $C_p(f,x), \zeta_p > 0$.

Der Zusatz (1), der eine exponentielle Fehlerabschätzung liefert, ist für mittelbare Gruppen nur für sehr spezielle Wirkungen und auch dann nur für glatte Funktionen möglich. Für halbeinfache Gruppen und deren Gitter sind ‚spectral gap‘ und die Resultate für L^p-Funktionen von Gorodnik und Nevo allerdings sehr häufig erfüllt.

Wir wollen eine Definition von spectral gap (von mehreren äquivalenten) vorstellen. Eine unitäre Darstellung π einer Gruppe G auf einem Hilbertraum H hat *spectral gap*, falls es ein $\epsilon > 0$ und eine kompakte Menge $K \subset G$ gibt, so daß der Faltungsoperator

$$\chi_K(v) = \frac{1}{m_G(K)} \int_K \pi(g) v dm_G$$

(m_G ist ein Haarmaß auf G) die Abschätzung

$$\|\chi_K(v)\|_H \le (1-\epsilon)\|v\|_H \quad \text{für } v \in (H^G)^\perp$$

erfüllt. Hier ist $H^G = \{v \in H : \pi(g)v = v \text{ für alle } g \in G\}$ der Teilraum, auf dem G trivial wirkt. Da χ_K ein selbstadjungierter beschränkter Operator ist, der H^G als Eigenraum zum Eigenwert 1 hat, beschreibt obige Abschätzung in der Tat eine Lücke im Spektrum von χ_K. Für uns interessant ist die Darstellung

$$\big(\pi(g)(f)\big)(x) = f(g^{-1}\cdot x) \quad \text{für } x \in X,\ f \in H = L^2(X,\mu) \text{ und } g \in G,$$

die von einer Wirkung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit einem invarianten Maß induziert wird, für diese Darstellung ist Ergodizität von dem Maß äquivalent zu $\dim(H^G) = 1$.

Für halbeinfache Gruppen ist spectral gap eine häufige Erscheinung: Jede irreduzible Darstellung einer halbeinfachen Liegruppe hat spectral gap und für manche Gruppen können K und ϵ sogar unabhängig von der Darstellung gewählt werden – diese Eigenschaft nennt man Property (T). Die Gruppen $G = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ und $\Gamma = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ haben zum Beispiel Property (T) für $n \ge 3$.

Es ist einfach zu sehen, warum spectral gap für die Untersuchung von Mitteln über Bahnen nützlich sein kann: Falls G auf (X,μ) ergodisch mit spectral gap wirkt und $f \in L^2(X)$ ist, dann folgt

$$\left\|\chi_K^n(f) - \int f d\mu\right\|_2 \le (1-\epsilon)^n \|f\|_2,$$

wobei $\chi_K^n(f)$ die n-fache Anwendung des obigen Faltungsoperators auf f bezeichnet. Allerdings kann man $\chi_K^n(f)$ auch als die Faltung einer absolut stetigen Dichteverteilung auf $K^n \subset G$ mit f verstehen – und dies ist bis auf die Dichteverteilung eben ein Ergodensatz. Mit (viel) mehr Arbeit lässt sich diese Dichteverteilung durch eine konstante Verteilung ersetzen und so erhält man die exponentielle Abschätzung (1) zumindest im L^2-Mittel.

Eine Motivation für die Untersuchungen von Gorodnik und Nevo sind asymptotische Abzählungsresultate. Duke, Rudnick und Sarnak [1] haben gezeigt, daß es einen engen Zusammenhang zwischen den asymptotischen Abzählungen von Punkten in Bahnen von Gittern Γ auf homogenen Räumen G/H und Gleichverteilungsfragen für Bahnen der Form $gH\Gamma \subset G/\Gamma$ gibt. Weiter haben Eskin und McMullen [3] gezeigt, wie man diese Gleichverteilungsresultate mit dynamischen Argumenten beweisen kann. Gorodnik und Nevo erhalten Resultate in diese Richtung, wenn auch nicht in der gleichen Allgemenheit. In den Situationen, wo die Methode von Gorodnik und Nevo funktioniert, erhalten sie aber eine sehr gute Fehlerabschätzung (in [3] wurde keine Fehlerabschätzung bewiesen und in [1] werden nur spezielle Teilmengen für die Abzählung erlaubt). Zum Beispiel erhalten Gorodnik und Nevo für sehr allgemeine Familien von Teilmengen $B_t \subset G$, daß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\Gamma \cap B_t|}{m_G(B_t)} = \frac{1}{m(G/\Gamma)},$$

wobei m das Maß auf G/Γ ist, das von m_G induziert wird. Weiter wird ein exponentiell kleiner Fehlerterm bewiesen, der wiederum von der spectral gap Eigenschaft abhängt.

Weitere Informationen zu dem Buch von Gorodnik und Nevo sind in [2] enthalten.

Literatur

1. Duke, W., Rudnick, Z., Sarnak, P.: Density of integer points on affine homogeneous varieties. Duke Math. J. **71**(1), 143–179 (1993)
2. Einsiedler, M. (Reviewer): The ergodic theory of lattice subgroups, by Alexander Gorodnik and Amos Nevo. Bull. Am. Math. Soc. **48**, 475–480 (2011)
3. Eskin, A., McMullen, C.: Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups. Duke Math. J. **71**(1), 181–209 (1993)