

Geom Dedicata (2006) 121:61–71
DOI 10.1007/s10711-006-9087-7

ORIGINAL PAPER

Sur la systole de la sphère au voisinage de la métrique standard

(On the systole of the sphere in the proximity of the standard metric)

Florent Balacheff

Received: 2 March 2006 / Accepted: 6 June 2006 /
Published online: 19 July 2006
© Springer Science+Business Media B.V. 2006

Abstract We study the systolic area (defined as the ratio of the area over the square of the systole) of the 2-sphere endowed with a smooth Riemannian metric as a function of this metric. This function, bounded from below by a positive constant over the space of metrics, admits the standard metric g_0 as a critical point, although it does not achieve the conjectured global minimum: we show that for each tangent direction to the space of metrics at g_0 , there exists a variation by metrics corresponding to this direction along which the systolic area can only increase.

Keywords Critical point · 2-sphere · Standard metric · Systole · Zoll metric

Mathematics Subject Classifications (2000) 53C22 · 58E10 · 37C27

1 Introduction

Étant donnée une métrique riemannienne lisse g sur la sphère de dimension 2 notée S^2 , on définit la *systole* de (S^2, g) comme la plus petite longueur d'une géodésique fermée non réduite à un point. On note $\text{sys}(S^2, g)$ cette quantité qui est strictement positive et réalisée comme la longueur d'une géodésique fermée.

Nous pouvons alors définir l'*aire systolique* de (S^2, g) par la formule

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \frac{A(S^2, g)}{(\text{sys}(S^2, g))^2},$$

où $A(S^2, g)$ désigne l'aire riemannienne de (S^2, g) . Cette quantité est minorée par une quantité strictement positive (voir [4, 9, 11, 12]):

$$\inf_g \mathfrak{S}(S^2, g) \geq \frac{1}{32},$$

F. Balacheff (✉)
Section de Mathématiques, Université de Genève, 2-4, rue du Lièvre, C.P. 64 CH-1211,
Genève, Switzerland
e-mail: florent.balacheff@math.unige.ch

où l'infimum est pris sur l'ensemble des métriques lisses de S^2 . Il est conjecturé (par E. Calabi et C. Croke, voir [4]) que

$$\inf_g \mathfrak{S}(S^2, g) = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

dont la valeur est atteinte pour la métrique singulière obtenue en recollant le long de leur bord deux triangles équilatéraux. Notons dès maintenant que l'aire systolique de la métrique standard de la 2-sphère vaut $\frac{1}{\pi}$, ce qui est strictement supérieur à la valeur $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Nous nous intéressons au comportement local de l'aire systolique de S^2 pour une métrique g au voisinage de la métrique standard g_0 . Ce rapport n'est pas continu sur l'espace des métriques lisses muni de la topologie forte (topologie pour laquelle les dérivées de tout ordre convergent uniformément, voir [8]), mais il est continu au voisinage de la métrique standard, et plus généralement au voisinage de toute métrique à courbure strictement positive. En effet, E. Calabi et C. Cao ont montré que pour une métrique g à courbure positive sur la sphère S^2 , la systole coïncide avec la plus petite longueur d'une géodésique fermée obtenue par un procédé de minimax sur l'espace des cycles unidimensionnels (voir [2]). Cette dernière quantité étant continue en la métrique, et les métriques proches d'une métrique à courbure strictement positive étant à courbure positive, nous obtenons la continuité de l'aire systolique au voisinage de ce type de métrique.

Étant donnée une variation $\{g_t\}$ de g_0 par une famille de métriques lisses dépendant de manière lisse d'un paramètre réel t et définie au voisinage de 0, nous étudions le comportement possible de $\mathfrak{S}(S^2, g_t)$ en fonction de t . Par le théorème d'uniformisation, toute métrique sur S^2 est conformément équivalente à la métrique standard, et pour cette raison, nous ne nous intéresserons qu'aux variations de g_0 par des métriques dans sa classe conforme.

L'espace des métriques lisses conformes à g_0 est naturellement identifié à l'espace $C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$ des fonctions lisses sur S^2 à valeurs réelles strictement positives. Nous munissons cet espace de la topologie forte. Comme cet espace est localement homéomorphe à l'espace vectoriel topologique localement convexe $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ des fonctions lisses sur S^2 à valeurs réelles (muni également de la topologie forte), $C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$ est une variété lisse modelée sur $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ (voir [8]) et ce dernier est isomorphe à l'espace tangent en g_0 à cette variété.

D'après le paragraphe précédent, l'application qui à $\Phi \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$ associe $\mathfrak{S}(S^2, \Phi \cdot g_0)$ est une application continue au voisinage de l'application constante égale à 1. Nous obtenons le résultat suivant:

Théorème 1 *Pour chaque $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, il existe une famille lisse à un paramètre de fonctions $\Phi_t \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\Phi_0 = 1$, $\left. \frac{d\Phi_t}{dt} \right|_0 = f$ et*

$$\mathfrak{S}(S^2, \Phi_t \cdot g_0) \geq \frac{1}{\pi},$$

avec égalité pour $t \neq 0$ si et seulement si f est une fonction constante.

Cet énoncé suggère fortement que g_0 soit un minimum local, mais la situation peut être plus subtile. Rappelons pour cela l'exemple classique de la fonction

$f(x, y) = (y - x^2) \cdot (y - x^4)$ n’admettant pas de minimum local en $(0, 0)$, bien qu’elle soit un minimum local le long de chaque droite passant par $(0, 0)$.

Nous pouvons définir la notion de point critique de la manière suivante: étant données une variété lisse M modelée sur un espace vectoriel topologique V localement convexe et une application $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ continue, un point x_0 de M est dit *régulier* s’il existe une carte locale (U, ϕ) centrée en x_0 et une forme linéaire non nulle $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = F(x_0) + T(\phi(x)),$$

pour tout x dans U . Dans le cas contraire, le point est dit *critique*.

Nous avons le corollaire suivant:

Corollaire 2 *La métrique g_0 est un point critique de la fonction aire systolique.*

Notons qu’il s’agit du premier point critique identifié pour la fonction aire systolique sur la 2-sphère, et qu’il est remarquable que ce point critique ne corresponde pas au minimum global conjecturé. Soulignons qu’il n’est pour le moment pas démontré que la métrique conjecturée comme le minimum global (le double triangle plat équilatéral) soit un minimum local, ou bien même un point critique. Signalons enfin que Croke a montré un résultat similaire concernant le volume systolique de l’espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ au voisinage de la métrique standard (voir [3]).

Maintenant que nous avons identifié la métrique standard comme point critique de l’aire systolique, nous pouvons nous intéresser à l’étude de sa “dégénérescence” et de son “indice”, i.e. à la recherche de sous-espaces de l’espace des métriques lisses conformes à g_0 , passant par g_0 et le long desquels la fonction aire systolique est ou bien constante, ou admet g_0 pour extremum local. Nous avons identifié deux sous-espaces remarquables de l’espace des métriques conformes à g_0 : le sous-espace \mathcal{P} des métriques invariantes par l’antipodie de la sphère standard et le sous-espace \mathcal{Z} des métriques de Zoll. Rappelons qu’une métrique est dite de Zoll si toutes les géodésiques sont périodiques de période 2π (voir [1]).

Proposition 3

(1) Si $g \in \mathcal{P}$,

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq \mathfrak{S}(S^2, g_0)$$

avec égalité si et seulement si $g = g_0$.

(2) Si $g \in \mathcal{Z}$,

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \mathfrak{S}(S^2, g_0).$$

Remarquons que la démonstration de cette proposition demande peu de travail, une fois connu les théorèmes respectifs de Pu [10] et Weinstein [13].

De manière évidente, l’espace tangent à \mathcal{P} en g_0 s’identifie au *sous-espace*

$$C^{\infty}_+(S^2, \mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(S^2, \mathbb{R}) \mid f \circ a = f\}$$

des fonctions paires, où a désigne l’antipodie de (S^2, g_0) . Plus éloquente est la correspondance entre “l’espace tangent” à \mathcal{Z} en g_0 et le *sous-espace*

$$C^{\infty}_-(S^2, \mathbb{R}) = \{f \in C^{\infty}(S^2, \mathbb{R}) \mid f \circ a = -f\}$$

des fonctions impaires. En effet, pour toute variation $g_t = \Phi_t \cdot g_0$ de g_0 par des métriques de Zoll, la dérivée $(d\Phi_t/dt)|_{t=0}$ appartient à $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ (voir [5]), et réciproquement, pour toute fonction impaire $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, il existe une variation $\Psi_t^- \cdot g_0$ de la métrique g_0 par des métriques de Zoll telle que $(d\Psi_t^-/dt)|_{t=0} = f$ (voir [6]). Rappelons [14] qu’hormis ces exemples de métriques obtenues comme variation infinitésimale de la métrique standard et de certaines métriques de révolution (voir [14]), nous ne connaissons pas d’autres métriques de Zoll. Notons également que les propriétés topologiques de l’espace \mathcal{Z} demeurent inconnues, comme par exemple sa connexité ou sa 1-connexité.

Nous obtenons ainsi deux sous-espaces de dimension infinie passant par g_0 le long desquels l’aire systolique est ou constante, ou admet g_0 pour minimum global, et dont les “espaces tangents” sont supplémentaires, puisque $C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = C_+^\infty(S^2, \mathbb{R}) \oplus C_-^\infty(S^2, \mathbb{R})$.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous commençons par montrer que l’aire systolique est un minimum local strict le long de certaines variations associées aux éléments $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0$. Un corollaire immédiat en est le théorème annoncé. Dans la troisième section, nous démontrons la proposition ci-dessus. Enfin, nous formulons dans la dernière section quelques remarques et questions.

2 Étude locale de l’aire systolique et variations minimisantes

Le théorème annoncé dans l’introduction est une conséquence du résultat suivant:

Proposition 4 *Soit $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse non nulle vérifiant*

$$\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0.$$

On associe à f la variation de métrique $g_t = (1 + tf)^2 \cdot g_0$ et on note $a > 0$ le plus grand réel tel que g_t soit bien définie pour $|t| < a$. Alors il existe $\alpha \in]0, a[$ tel que, pour tout réel t vérifiant $0 < |t| < \alpha$,

$$\mathfrak{S}(S^2, g_t) > \mathfrak{S}(S^2, g_0) = \frac{1}{\pi}.$$

En effet, considérons la variation $g_t = (1 + t) \cdot g_0$, et notons $u \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ le vecteur dérivé correspondant (u est la fonction constante sur S^2 égale à 1). Nous avons une décomposition naturelle de $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ en somme directe:

$$C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}u \oplus \left\{ f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid \int_{S^2} f dv_{g_0} = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Remarquons que l’espace $\{f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}) \mid \int_{S^2} f dv_{g_0} = 0\}$ peut être pensé comme le noyau de la différentielle en g_0 de l’application $\mathcal{A}(S^2, \cdot)$ qui à $\Phi \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}_+^*)$ associe $\mathcal{A}(S^2, \Phi \cdot g_0)$.

Comme l’aire systolique est invariante par changement d’échelle (la transformation d’une métrique g en $\mu \cdot g$ où μ est un réel strictement positif ne modifie pas la valeur de l’aire systolique), nous obtenons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour toute métrique g

$$\mathfrak{S}(S^2, (1 + \lambda t) \cdot g) = \mathfrak{S}(S^2, g),$$

pourvu que $1 + \lambda t > 0$. Étant donnée une fonction $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, nous pouvons décomposer f dans la somme directe (2.1) comme

$$f = \lambda(f)u + (f - \lambda(f)u)$$

où $\lambda(f) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f dv_{g_0}$ et, en considérant la variation

$$\tilde{g}_t = (1 + \lambda(f)t)(1 + t(f - \lambda(f)))^2 g_0,$$

nous obtenons le théorème.

Pour démontrer la proposition, nous allons procéder comme suit. Étant fixée la fonction lisse non nulle $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\int_{S^2} f dv_{g_0} = 0$, nous pouvons calculer l’aire de la métrique g_t associée. Nous voyons facilement que

$$\mathcal{A}(S^2, g_t) = \mathcal{A}(S^2, g_0) + t^2 \int_{S^2} f^2 dv_{g_0}.$$

La proposition va alors découler de l’inégalité

$$\text{sys}(S^2, g_t) \leq 2\pi, \tag{2.2}$$

pour t dans un voisinage ouvert de 0. Avant de démontrer cette inégalité, nous commençons tout d’abord par quelques rappels.

2.1 Rappels et notations

2.1.1 Le principe du minimax

Un outil important pour étudier la systole est fourni par le procédé de minimax. Pour plus de détails (voir [7]).

Soit (S^2, g) une 2-sphère riemannienne. Nous commençons par considérer l’espace ΛS^2 des courbes fermées, défini comme l’espace des applications $c: S^1 \rightarrow S^2$ de classe H^1 (i.e. absolument continue, dont la dérivée existe pour presque tout $t \in S^1$ et est de carré intégrable respectivement à la métrique) muni de la topologie C^0 . Les groupes $SO(2)$ et $O(2)$ agissent canoniquement sur ΛS^2 et on note ΠS^2 et $\tilde{\Pi} S^2$ les quotients respectifs (respectivement *espace des courbes non initialisées* et *espace des courbes non initialisées non orientées*), π_{SO} et π_O les projections associées et π_S la projection naturelle de ΠS^2 sur $\tilde{\Pi} S^2$. La fonctionnelle énergie E_g initialement définie sur ΛS^2 par

$$E_g(c) = 1/2 \int_{S^1} g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) dt,$$

induit une application sur ΠS^2 et $\tilde{\Pi} S^2$ respectivement, pour laquelle les points critiques sont exactement les orbites de points critiques de ΛS^2 pour l’action correspondante. Or les points critiques de E_g dans ΛS^2 sont exactement les géodésiques fermées (éventuellement réduites à un point).

Soit w une classe d’homologie de dimension 1 non nulle de ΛS^2 (respectivement ΠS^2 et $\tilde{\Pi} S^2$) à coefficients quelconques. Pour chaque cycle singulier $u \in w$, on note $|u|$ la réunion des images des simplexes singuliers de u .

Nous avons alors le résultat suivant:

Théorème 5 (voir [7]) Soit $\kappa_w = \inf_{u \in w} \sup_{c \in |u|} E_g(c)$.

Alors $\kappa_w > 0$ et il existe une géodésique fermée $c_w \in \Lambda M$ vérifiant $E_g(c_w) = \kappa_w$.

2.1.2 Familles particulières de courbes sur (S^2, g_0)

La géométrie de la sphère standard présente naturellement plusieurs familles de courbes intéressantes, dans le sens où ces familles génèrent des classes homologiques non nulles dans un des espaces de courbes décrits au paragraphe précédent. Nous considérons dans ce paragraphe (S^2, g_0) comme la sphère unité de \mathbb{R}^3 pour le produit scalaire canonique, munie de la métrique induite.

Notons tout d’abord AS^2 l’espace des cercles paramétrés. Un tel cercle est soit une application constante, soit un plongement $c: S^1 \rightarrow S^2$ paramétré proportionnellement à la longueur d’arc, dont l’image est l’intersection de S^2 avec un plan à distance < 1 de l’origine de \mathbb{R}^3 . L’espace des grands cercles est noté BS^2 .

L’image $\pi_{SO}(BS^2)$ (espace des grands cercles non initialisés) est clairement en bijection avec S^2 , et nous pouvons décrire la bijection comme suit: à chaque $u \in S^2$ correspond le grand cercle non initialisé de S^2 noté $\gamma(u)$ obtenu comme la projection par π_{SO} d’un grand cercle dont l’image est l’intersection du plan orthogonal à u avec S^2 orienté par la règle du tire-bouchon (cf. Fig. 1).

Soit $\mathcal{F} = \{\pi_S(\gamma(\cos(t\pi), \sin(t\pi), 0)), t \in [0, 1]\}$ la famille de courbes paramétrée par l’intervalle $I = [0, 1]$. Cette famille fournit un élément $[F] \neq 0$ de l’homologie $H_1(\tilde{\Pi}S^2, \mathbb{Z}_2)$.

Soit $u \in S^2$. Pour chaque $s \in [-1, 1]$, nous pouvons associer un élément $\gamma(u, s)$ de $\pi_{SO}(AS^2)$ (espace des cercles non-initialisés) obtenu comme l’intersection avec S^2 du plan orthogonal à u translaté du vecteur su et orientée naturellement (cf. Fig. 2).

Soit \mathcal{G}_u la famille d’éléments de ΠS^2 paramétrée par S^1 obtenu comme la concaténation de la famille $\{\gamma(u, s) \mid s \in [-1, 1]\}$ avec la famille de courbes réduites à un point définie par un demi grand cercle reliant $\gamma(u, -1)$ à $\gamma(u, 1)$. Cette famille fournit un élément non-trivial de $H_1(\Pi S^2, \mathbb{Z})$.

2.1.3 Tangent unitaire et métrique associée

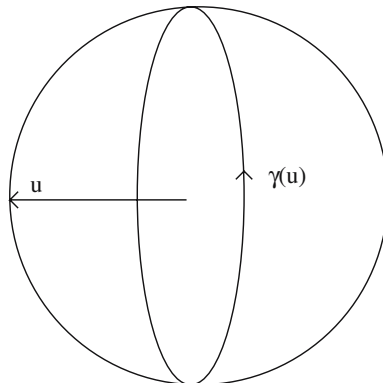
Soit $U^{g_0}S^2$ le fibré tangent unitaire à (S^2, g_0) . Cet espace est isomorphe à BS^2 .

Clairement, on a une action libre de $S^1 \simeq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ sur cet espace, dont le quotient coïncide avec l’espace des grands cercles non initialisés $\pi_{SO}(BS^2) \simeq S^2$.

La variété $U^{g_0}S^2$ possède une métrique naturelle g_1 vérifiant

$$dv_{g_1} = \alpha_{g_0} \wedge \pi_{SO}^*(dv_{g_0}), \tag{2.3}$$

Fig. 1 Le grand cercle associé à u



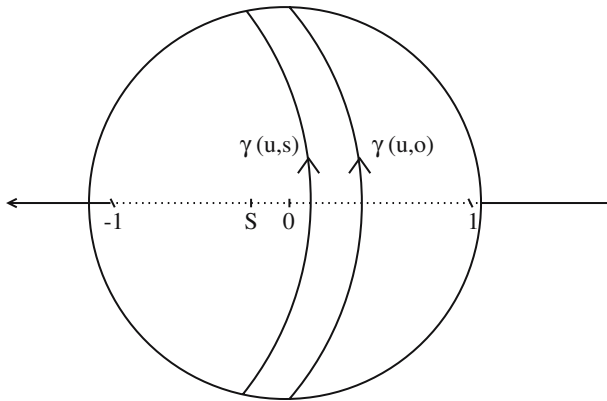


Fig. 2 La famille $\gamma(u, s)$

où α_{g_0} désigne l'image réciproque de la 1-forme de Liouville par l'isomorphisme musical bémol associé à g_0 , ainsi que l'égalité suivante pour toute fonction $f \in C^1(U^{g_0}S^2, \mathbb{R})$:

$$\int f \, dv_{g_1} = \int f \, d\sigma \times dv_{g_0}, \tag{2.4}$$

où σ désigne la mesure canonique sur le cercle unité S^1 (voir [1], pp. 51–52).

2.2 Démonstration de l'inégalité (2.2)

Posons, pour tout $(q, v) \in U^{g_0}M$,

$$\Lambda_t(q, v) = \sqrt{g_t(q)(v, v)} = 1 + tf(q).$$

En intégrant cette fonction sur $U^{g_0}S^2$ par rapport à la mesure canonique associée à g_1 , on obtient d'une part en utilisant (2.4),

$$\begin{aligned} \int_{U^{g_0}S^2} \Lambda_t \, dv_{g_1} &= \int_{S^2} \left(\int_{S^1} (1 + tf) \, d\sigma \right) \, dv_{g_0} \\ &= 2\pi \int_{S^2} (1 + tf) \, dv_{g_0} \\ &= 8\pi^2, \end{aligned}$$

et d'autre part en utilisant (2.3),

$$\begin{aligned} \int_{U^{g_0}S^2} \Lambda_t \, dv_{g_1} &= \int_{\pi_{SO}(BS^2)} \left(\int_{\pi_{SO}^{-1}(u)} (1 + tf) \cdot \alpha_{g_0} \right) \, dv_{g_0} \\ &= \int_{S^2} l_{g_t}(\gamma(u)) \, dv_{g_0}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la moyenne de la longueur respectivement à la métrique g_t sur l'espace des grands cercles non initialisés est constante, à savoir

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} l_{g_t}(\gamma(u)) dv_{g_0} = 2\pi.$$

Remarquons qu'un calcul simple nous montre que pour tout $u \in S^2$,

$$l_{g_t}(\gamma(u)) = 2\pi + t \int_{\gamma(u)} f \cdot \alpha_{g_0}.$$

Deux cas se présentent donc à nous:

Premier cas. Pour tout $u \in S^2$,

$$\int_{\gamma(u)} f \cdot \alpha_{g_0} = 0.$$

Alors pour tout $u \in S^2$ et $|t| < a$, $l_{g_t}(\gamma(u)) = 2\pi$. Comme toute courbe $c: S^1 = [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow S^2$ de ΛS^2 vérifie

$$2 \cdot E_g(c) \leq l_g(c),$$

on obtient que pour tout $u \in S^2$ et tout $t \in]-a, a[$, $E_{g_t}(\gamma(u)) \leq \pi$. Donc, pour tout $c \in \mathcal{F}$,

$$E_{g_t}(c) \leq \pi.$$

Comme $[\mathcal{F}] \neq 0$, on obtient par le théorème 5 l'existence d'une géodésique fermée correspondant à cette classe d'énergie au plus π , donc de longueur au plus 2π pour la métrique g_t avec $|t| < a$.

D'où l'inégalité (2.2) dans ce cas.

Second cas. Il existe $u_0 \in S^2$, tel que

$$\int_{\gamma(u_0)} f \cdot \alpha_{g_0} < 0.$$

Remarquons qu'alors, il existe nécessairement $u_1 \in S^2$ tel que

$$\int_{\gamma(u_1)} f \cdot \alpha_{g_0} > 0.$$

Pour tout $t \in]0, a[$, $l_{g_t}(\gamma(u_0)) < 2\pi$ et il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $s \in]-\beta, \beta[$ et tout $t \in]0, a[$,

$$l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi.$$

On se fixe alors $\alpha_0 \in]0, a[$ tel que pour $t \in]0, \alpha_0[$, $l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi$ pour tout $s \in [-1, 1] \setminus]-\beta, \beta[$. Nous obtenons ainsi, pour $t \in]0, \alpha_0[$ et pour tout $s \in [-1, 1]$,

$$l_{g_t}(\gamma(u_0, s)) < 2\pi.$$

Donc pour chaque $c \in \mathcal{G}_{u_0}$, $E_{g_t}(c) < \pi$. De la non trivialité de $[\mathcal{G}_{u_0}]$, nous obtenons par le théorème 5 l'existence d'une géodésique fermée correspondant à la classe $[\mathcal{G}_{u_0}]$ d'énergie au plus π , donc de longueur au plus 2π pour la métrique g_t et ce pour tout $t \in]0, \alpha_0[$.

De manière analogue, nous obtenons l’existence d’un $\alpha_1 \in]0, a[$ tel que pour tout $t \in] - \alpha_1, 0[$, il existe une géodésique fermée correspondant à la classe $[\mathcal{G}_{u_1}]$ d’énergie au plus π , donc de longueur au plus 2π pour la métrique g_t .

On pose alors $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ et l’inégalité (2.2) est démontrée pour $t \in] - \alpha, \alpha[$.

3 Aire systolique et parité

Nous allons maintenant démontrer la proposition 3. La démonstration repose sur deux résultats: le premier est dû à Pu [10] et le second à Weinstein [13].

3.1 Fonctions paires et théorème de Pu

Soit g une métrique sur S^2 lisse appartenant à \mathcal{P} , i.e paire respectivement à l’antipodie a de (S^2, g_0) et conforme à g_0 . Comme $a^*g = g$, nous pouvons former le quotient $S^2/a \simeq \mathbb{R}P^2$ et le munir de la métrique induite par g que nous noterons \tilde{g} .

Étant donnée une métrique riemannienne \hat{g} sur $\mathbb{R}P^2$, nous définissons la systole de $(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$ comme la plus petite longueur d’une courbe non contractile et la notons $sys(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$. Cette longueur est réalisée comme la longueur d’une géodésique fermée non contractile. Nous pouvons alors définir l’aire systolique de $(\mathbb{R}P^2, \hat{g})$ comme le quotient

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \hat{g}) = \frac{\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2, \hat{g})}{(sys(\mathbb{R}P^2, \hat{g}))^2}.$$

Nous observons que pour la métrique \tilde{g} définie à partir de la métrique g ci-dessus, nous avons

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2, \tilde{g}) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(S^2, g),$$

et

$$sys(\mathbb{R}P^2, \tilde{g}) \geq \frac{1}{2}sys(S^2, g).$$

On en déduit donc:

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq \frac{\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \tilde{g})}{2}.$$

L’aire systolique du plan projectif vérifie l’inégalité suivante:

Théorème 6 (voir [10]) *Soit \hat{g} une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}P^2$. Alors*

$$\mathfrak{S}(\mathbb{R}P^2, \hat{g}) \geq \frac{2}{\pi},$$

avec égalité si et seulement si \hat{g} est la métrique standard.

Nous en déduisons donc pour toute métrique $g \in \mathcal{P}$,

$$\mathfrak{S}(S^2, g) \geq \mathfrak{S}(S^2, g_0) = \frac{1}{\pi},$$

avec égalité si et seulement si $g = g_0$.

Ceci démontre le point 1) de la Proposition 3.

3.2 Fonctions impaires et métriques de Zoll

La définition suivante est classique (voir [1]). Une métrique riemannienne g de S^2 est dite une *métrique de Zoll* si toutes les géodésiques de (S^2, g) sont périodiques de période 2π . Remarquons que dans ce cas, $\text{sys}(S^2, g) = 2\pi$. Il est clair que la métrique standard g_0 vérifie cette propriété: les géodésiques fermées sont les éléments de BS^2 . Une métrique de Zoll g vérifie l'égalité suivante démontrée par Weinstein (voir [1, 13]):

$$\mathcal{A}(S^2, g) = \mathcal{A}(S^2, g_0).$$

Ceci a pour conséquence que pour toute métrique $g \in \mathcal{Z}$,

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \frac{1}{\pi}.$$

Le point (2) de la proposition 3 est ainsi démontré.

4 Remarques et perspectives

Il serait intéressant d'éclairer plusieurs points:

- (1) Pour tout vecteur tangent non nul $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, nous avons construit une variation de métrique $\Phi_t \cdot g_0$ telle que $\Phi_0 = 1$, $(d\Phi_t/dt)|_{t=0} = f$, et pour laquelle $\mathfrak{S}(S^2, g_t) \geq \mathfrak{S}(S^2, g_0)$ pour $t \geq 0$. Il semble raisonnable de penser que la métrique g_0 est un minimum local de l'aire systolique dans l'espace des métriques conformes à g_0 , mais il n'y a, à l'heure actuelle et à la connaissance de l'auteur, aucune démonstration de cette conjecture.
- (2) De manière plus ambitieuse, il serait intéressant de mieux comprendre le comportement local de l'aire systolique au voisinage de g_0 . La troisième section suggère une conjecture de la forme: il existe un voisinage ouvert U_0 de 0 dans $C^\infty(S^2, \mathbb{R}) = C_+^\infty(S^2, \mathbb{R}) \oplus C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, un voisinage V_{g_0} de g_0 dans l'espace des métriques lisses conformes à g_0 muni de la topologie forte et un homéomorphisme local $\phi: U_0 \rightarrow V_{g_0}$ tel que, pour toute métrique $g \in V_{g_0}$, si on note π_+ et π_- les projections respectives de $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$ sur $C_+^\infty(S^2, \mathbb{R})$ et $C^\infty(S^2, \mathbb{R})$, nous ayons

$$\mathfrak{S}(S^2, g) = \mathfrak{S}(S^2, g_0)(1 + \|\pi_+(\phi^{-1}(g))\|_2^2),$$

où $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{S^2} f^2 dv_{g_0}}$ pour tout $f \in C^\infty(S^2, \mathbb{R})$.

- (3) Une question intéressante est la suivante: toute métrique de Zoll est-elle un point critique de la fonctionnelle aire systolique? Plus généralement, la découverte d'autres points critiques serait remarquable, et il n'est pas clair quelles sont les métriques (en-dehors des métriques de Zoll et de l'exemple de Calabi) qui fourniraient de bons candidats.

Remerciements. L'auteur tient à exprimer ici ses remerciements à I. Babenko, pour lui avoir présenté ce sujet de recherche, ainsi que pour les conversations qui s'en sont suivies. Ses remerciements s'adressent également à M. Berger pour ses réponses sur certains points, à S. Sabourau, pour ses remarques pertinentes et au référé anonyme. L'auteur a été partiellement soutenu par le Fonds National Suisse de la recherche scientifique et le Centre Interfacultaire Bernoulli.

References

1. Besse, A.: *Manifolds All of whose Geodesics are Closed*. Springer, Berlin-Heidelberg, New York (1978)
2. Calabi, E., Cao, J.: Simple closed geodesics on convex surfaces. *J. Differential Geom.* **36**, 517–549 (1992)
3. Croke, C.: Lower bounds on the energy of maps. *Duke Math. J.* **55**(4), 901–908 (1987)
4. Croke, C.: Area and the length of the shortest closed geodesic. *J. Differential Geom.* **27**, 1–21 (1988)
5. Funk, P.: Über Fläschen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien. *Math. Ann.* **74**, 278–300 (1913)
6. Guillemin, V.: The Radon transform on Zoll surfaces. *Adv. Math.* **22**, 85–119 (1976)
7. Klingenberg, W.: *Lectures on Closed Geodesics*. Springer, Berlin-Heidelberg, New York (1978)
8. Milnor, J.: Remarks on infinite-dimensional Lie groups. *Relativity, groups and topology, II* (Les Houches, 1983), 1007–1057 (1984)
9. Nabutovsky, A., Rotman, R.: The length of the shortest closed geodesic on a 2-dimensional sphere. *Int. Math. Res. Not.* **23**, 1211–1222 (2002)
10. Pu, P.: Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.* **2**, 55–72 (1952)
11. Rotman, R.: The length of a shortest closed geodesic and the area of a 2-dimensional sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* **134**, 3041–3047 (2006).
12. Sabourau, S.: Filling radius and short closed geodesics of the 2-sphere. *Bull. SMF* **132**, 105–136 (2004)
13. Weinstein, A.: On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed. *J. Diff. Geom.* **9**, 513–517 (1974)
14. Zoll, O.: Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien. *Math. Ann.* **57**, 108–133 (1903)