Math Semesterber (2011) 58:215–232
DOI 10.1007/s00591-011-0092-z

MATHEMATIK IN DER LEHRE

Die Entwicklung der Vektorrechnung im französischen Mathematikunterricht seit Ende des 19. Jahrhunderts

C. Ba · J.-L. Dorier

Eingegangen: 17. August 2011 / Online publiziert: 24. September 2011

Zusammenfassung Dieser Text ist Teil eines größeren Forschungsprojekts über die Verbindungen zwischen Mathematik und Physik und stellt eine Analyse der Geschichte der Vektorrechnung im Unterricht in Frankreich dar, von ihren ersten Anfängen in der Sekundarstufe am Ende des 19 Jhd. bis zur Gegenwart. Unsere Analyse stützt sich auf einen theoretischen Rahmen, der durch die „Oekologie des Wissens" inspiriert ist (Chevallard, 1994). Über das historische Interesse hinaus wollen wir einen Bereich des Mathematikunterrichtes beleuchten (der unter dem Einfluss der jüngsten Reformen immer kleiner und kleiner wird) sowie seinen Bezug zum Physikunterricht, der – obwohl er von beiden Seiten als natürlich angesehen wird – nicht wirklich als effektive Unterstützung der Lehrer der jeweiligen Disziplin zu dienen scheint.

Schlüsselwörter Vektor · Vektorraum-lineare Algebra · Moderne Mathematik

Mathematics Subject Classification (2010) 97A30 · 97G70 · 97H60

0 Einführung

Obwohl man Spuren des Kräfteparallelogramms seit der Antike findet, ist der Ursprung des Vektorbegriffs in jüngeren Epochen zu suchen. Leibniz ‚Kritik an der Geometrie Descartes', die die Suche nach einer rein geometrischen Charakteristik

C. Ba
Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD), B.P. 5005, Dakar-Fann Dakar, Senegal

J.-L. Dorier (✉)
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Université de Genève, Pavillon Mail 232, Boulevard du Pont d'Arve 40, 1211 Genève 4, Switzerland
e-mail: Jean-Luc.Dorier@unige.ch

empfahl, die sich auf Positionen auf dieselbe Art und Weise anwenden lassen sollte, wie die Algebra auf Größen, blieb für mehr als ein Jahrhundert folgenlos. Erst mit der geometrischen Interpretation der imaginären Größen und mit dem Wunsch nach deren Verallgemeinerung in den Raum entsteht der Vektorbegriff an der Kreuzung zwischen Algebra und Geometrie, im Laufe des 19. Jahrhunderts dann auch in der physikalischen Anwendung [11, 16, 17]. Die Verbindungen, die zwischen der Entstehung der Vektorrechnung und der Ausarbeitung der linearen Algebra bestehen, sind komplexer und gehaltvoller, als es den Anschein hat [14, erster Teil].

Unsere Absicht ist es hier nicht, die Geschichte des Vektorbegriffs nachzuzeichnen; wir verweisen den Leser hierzu auf die oben zitierten Werke. Wir interessieren uns vielmehr dafür, wie Vektoren im französischen Mathematikunterricht seit ihrem zaghaften Auftauchen in den Lehrplänen des Gymnasiums gegen Ende des 19. Jahrhunderts bis hin zum heutigen Unterricht behandelt wurden. Über das historische Interesse hinaus wollen wir einen Bereich des Mathematikunterrichts beleuchten, der wegen der gegenwärtigen Reformen mehr und mehr eingeschränkt wird, und dessen Bezug zum Physikunterricht, obwohl er den beiden involvierten Gruppen natürlich erscheint, nichtsdestoweniger keine wirkliche Stütze für die Lehrer der einen wie der anderen Fachrichtung zu bieten scheint.

Wir werden in diesem Artikel die unterschiedlichen Rollen untersuchen, die die verschiedenen Lehrpläne, die seit der Reform von 1852 aufeinander gefolgt sind, dem Vektorbegriff zudachten. Die erste Frage, die wir uns stellen, betrifft die Bedingungen, die dazu geführt haben, dass Vektoren in das weiterführende Schulwesen Frankreichs eingeführt wurden und sich weiterentwickelten. Als Standpunkt für unsere theoretischen Analysen wählen wir die „ökologische Perspektive“ gemäß der didaktischen Ökologie des Wissens von Chevallard [8]: In diesem Sinne werden wir die Entwicklung des Lebensraumes (Habitat) und der (ökologischen) Nischen des Vektorbegriffs zu bestimmen versuchen.

> Die Ökologen unterscheiden, wenn es sich um einen Organismus handelt, seinen Lebensraum und seine Nische. Um es in einer absichtlich anthropomorphen Sprache zu sagen: Der Lebensraum ist gewissermaßen die Adresse, der Ort an dem der Organismus sesshaft ist. Die Nische bilden die Funktionen, die der Organismus dort erfüllt: Sie ist der Beruf, den er dort ausübt.
>
> (Chevallard [8], 142)

Im Anschluss an Chevallard zeigt Artaud [1], wie ein Objekt in einem didaktischen Ökosystem entstehen und darin überleben kann.

> Damit ein Objekt O in einem didaktischen Ökosystem auftreten kann, ist es notwendig, dass eine Umgebung für dieses Objekt existiert, d.h. dass eine Gesamtheit von bekannten Objekten (das heißt, dass ein unproblematisches institutionelles Verhältnis besteht) existiert, mit welchen O interagieren wird. Diese Bedingung ist auf eine weiter oben zitierte Bedingung zu beziehen: dem Gesetz des strukturierten Ganzen, an dessen Wortlaut ich erinnere: Ein mathematisches Objekt kann nicht für sich alleine existieren; es muss einen Platz in einer mathematischen Struktur einnehmen können, diese Struktur muss vorhanden sein.

> Die Notwendigkeit, dass eine Umgebung existiert, besagt also, dass dieses Auftreten einer mathematischen Entität nicht ex nihilo geschehen kann. Man muss sich auf die bereits existierenden mathematischen oder nicht mathematischen Strukturen stützen.
>
> (Artaud [1], 124)

Die ökologische Analyse erlaubt es weiterhin, ein Geflecht von Bedingungen und Zwängen aufzuzeigen, das die Position des Vektorbegriffs bestimmt. Weiter kann so dessen Entwicklung im Zuge der veränderten Lehrpläne unter Berücksichtigung der globalen Funktionen der schulischen Institutionen, in denen der Vektorbegriff auftritt, aber auch der noch umfassenderen Institutionen, die mit dem Funktionieren des gelehrten Wissens („savoir savant") bei Mathematikern und Physikern verbunden sind, untersucht werden.

Wir werden chronologisch von 1852 bis zur Gegenwart vorgehen, in verschiedenen Phasen, die den großen Schulreformen entsprechen. Wir weisen darauf hin, dass wir uns nicht zu sehr mit den jüngeren Reformen aufhalten, die den Lesern besser bekannt und Gegenstand ausführlicher Analysen sind. Deren Fazit werden wir zitieren, wenn wir bei den didaktischen Schlussfolgerungen anlangen, auf die unsere Arbeit abzielt.

1 Die Anfänge (1852–1925)

1.1 1852 – Ein erster Hinweis auf das Wort Vektor

Die Astronomen hatten die Angewohnheit von *Vektoren* zu sprechen, um die Bewegung eines Planeten zu beschreiben; insbesondere sprachen sie von Radiusvektoren, um die Strecke zu benennen, die einen Punkt auf einem Kegelschnitt – z. B. die Position eines Planeten – mit einem Brennpunkt verbindet. Der Ausdruck *Radiusvektor* wurde später in die Geometrie verallgemeinert, hatte aber letzten Endes nichts mit dem zu tun, was man heute einen Vektor nennt. Dennoch erscheint so der Vektorbegriff im Jahre 1852 erstmals in den Mathematiklehrplänen der weiterführenden Schulen (für die *Première*)[1] Dies geschah im Zuge der so genannten „Gabelungsreform", einer Reform, die rein utilitaristisch ausgerichtet war, woran Gispert und Hulin [18] erinnern:

> Mit dieser Reform wurde ein zweifaches Ziel verfolgt: Einerseits sollte den Naturwissenschaften eine wichtige Rolle eingeräumt werden (in Anbetracht ihrer Entwicklung), andererseits eine Lehre geschaffen werden, die besser den Bedürfnissen der industriellen Gesellschaft gerecht wird. Die Lehre ist also geprägt durch die Ausrichtung auf den praktischen Nutzen und durch ihren Anwendungsbezug. Jean-Baptiste Dumas, einer der Protagonisten der Reform, erklärte, dass es angebracht sei, „die Geometrie auf wirklich nützliche Lehrsätze und die Algebra auf das für das Studium der Elemente der Physik und Mechanik Erforderliche zu beschränken."
>
> (Gispert, Hulin [18], 1)

[1] Das ist die vorletzte Klasse des Gymnasiums [Anm. d. Übersetzers].

Dieses Zitat zeigt, dass die vorherrschende Auffassung von der Lehre der Naturwissenschaften stark anwendungsorientiert war. Die Mathematik wurde vor allem als ein Fach betrachtet, das im Dienste anderer Fachrichtungen steht. Aus diesem Grund wird man bis Anfang des 20. Jahrhunderts warten müssen, um das Auftauchen des – immer noch im Entstehen begriffenen – mathematischen Vektorbegriffs im Unterricht der weiterführenden Schulen zu finden. Im Jahr 1852 wird in der Mechanik die Zusammensetzung von Kräften, Geschwindigkeiten und Bewegungen angesprochen, mit einer Anspielung auf das Kräfteparallelogramm und auf die Komposition von konvergierenden oder parallelen Kräfte. Aber der Bezug zu dem Vektorbegriff ist noch nicht klar.

1.2 Die Reform von 1902: Vektoren tauchen in der Geometrie auf

Am Anfang des 20. Jahrhunderts verändern sich die erkenntnistheoretischen Grundlagen für die Didaktik der Naturwissenschaften und der Mathematik. 1902 entwickelt eine Reform, die von Hochschullehrern inspiriert wird (Gaston Darboux war Präsident der Lehrplankommission für das Fach Mathematik), eine neue Sicht auf die Lehre der Naturwissenschaften und der Mathematik. Diese Reform, die den Unterricht der weiterführenden Schulen betraf, zielte darauf ab, den Geisteswissenschaften denselben Stellenwert zukommen zu lassen wie den klassischen Studien. Sie sollten dazu beitragen, den Menschen zum mündigen Bürger zu bilden.

> Der bemerkenswerte Aufstieg der Naturwissenschaften allgemein und der Mathematik im Besonderen wird von einem Diskurs über den spezifischen Beitrag der verschiedenen Disziplinen begleitet. Dies alles geschieht unter Betonung der Einheit der Wissenschaft.
>
> (Gispert, Hulin [18], 2)

Mit dieser Reform verschwindet der Ausdruck Radiusvektor aus den Lehrplänen; er wird ersetzt durch die Auffassung, ein Vektor sei eine orientierte Strecke. Bis dato der wissenschaftlichen Welt vorbehalten, wird der Vektor nun auch in die Lehrpläne der Fächer Mechanik und Kinematik der *Première* aufgenommen. Folgende Themen werden angeschnitten: Projektionen, Summe und Differenz von Vektoren, der Projektionssatz (die Projektion einer Summe ist die Summe der Projektionen), das lineare Moment (Impuls). In der Statik und der Dynamik spricht man von der von Kräften verrichteten Arbeit (Skalarprodukt). Der Vektor tritt durch den „paraphysikalischen“ Lebensraum in die weiterführende Bildung ein und findet seine Nische in der Repräsentation physikalischer Größen. Es handelt sich also um eine Reform, die die Mathematik in der Kenntnis der Natur verankert. Die geistigen Väter dieser großen Lehrplanreform von 1902 maßen der Kooperation zwischen den Lehrern der zwei Disziplinen Mathematik und Physik einen hohen Stellenwert bei. In einem Rundschreiben von 1909 wird das Interesse dieser Kooperation betont:

> Es wäre gut […], wenn die Mathematik- und Physiklehrer derselben Lehranstalt sich auf gemeinsame Absprachen stützen könnten. Der Physiklehrer muss stets wissen, wie weit der Mathematiklehrer mit seinem Stoff ist, und umgekehrt hat der Mathematiklehrer jedwedes Interesses daran, zu wissen, welche

> Beispiele er wählen kann, die bereits aus dem Experimentalunterricht bekannt sind, um seine abstrakt dargelegten Theorien zu illustrieren.
>
> (Op. cit., 3)

Die resultierende Stofffülle der Lehrpläne wird von den Lehrenden kritisiert, die 1905 Entlastungen fordern und auch bekommen. So wandern die Vektoren von der *Première* in die *Terminale*[2] und dort in den Bereich der Geometrie, um sich zu Werkzeugen für die Physik zu entwickeln (das stellt ihre Nische dar).

> In Mechanik [. . .] wird der Lehrer jegliche Entwicklungen und Aufgaben vermeiden müssen, die von rein geometrischem Interesse sind. Um jeden Anlass für die Entwicklung von Aufgaben dieses Genres zu beseitigen, wurden die Theoreme, die sich auf Vektoren beziehen, auf ein unumgängliches Minimum reduziert und in den Geometrielehrplan transferiert, wo sie am richtigen Platz sind.
>
> (Anweisungen vom 27. Juli 1905 bezüglich des Mathematikunterrichts, 676)

Der Vektorbegriff wandert also von der Physik in die Geometrie als Lösung eines rein didaktischen Problems aus.

1.3 1925 – ein neuer potentieller Lebensbereich

1925 tauchen Vektoren, ohne explizit in den Lehrplänen genannt zu sein, in der *Troisième*[3] auf. Sie werden verwendet, um relative Zahlen „im Sinne einer konkreten Auffassung der positiven und negativen Zahlen“ in der Arithmetik zu repräsentieren:

> Die Definition der positiven und negativen Zahlen mit Hilfe sinnlicher messbarer Größen, die geeignet sind, eine Richtung auszudrücken, bringt keine speziellen Schwierigkeiten mit sich. Der Bezug zu Vektoren, die von einer Achse getragen werden, ist nur wenig schwieriger. Die Repräsentation von algebraischen Zahlen mit Hilfe einer Achse gibt, zumindest von einem theoretischen Standpunkt aus, die vollständig befriedigende Lösung dieser Schwierigkeiten.
>
> (Hinweise zu den Lehrplänen 1925)

Man sieht also, dass der potentielle Lebensbereich der Vektoren in der *Troisième* die Arithmetik und die Repräsentation gerichteter Größen ist; so wird den Vektoren eine Nische eröffnet. Dies ist in der Tat ein Novum.

Was die *Terminale* anbelangt, so tauchten Vektoren in der Trigonometrie mit einem quasi unveränderten Inhalt auf: „Theorie der Projektionen. Geometrische Summe der Vektoren. Additionsformel für den Sinus, den Kosinus und den Tangens.“ Die Interventionen von Vektoren in der Kinematik sind präziser: Der Geschwindigkeitsvektor ist klar benannt, mittlere- und Momentangeschwindigkeiten werden als Vektoren definiert. Der Beschleunigungsvektor wird im speziellen Fall der Kreisbewegung angesprochen. Für die auf einen Festkörper wirkenden Kräfte wird der Schwerpunkt in Verbindung mit dem Angriffspunkt der Resultierenden paralleler Kräfte eingeführt. Die Vektoren haben also eine Berechtigung innerhalb der Mathematik erhalten;

---

[2] Abiturklasse [Anm. d. Übersetzers].

[3] Schuljahr drei Jahre vor der Abschlussklasse [Anm. des Übersetzers].

sie dienen dort als Werkzeuge, um trigonometrische Formeln aufzustellen – das ist ihre Nische. Die Einführung der Vektoren vermöge trigonometrischer Eigenschaften wird in den Statiklehrplänen als nützlich bewertet:

> Die Vermischung der Eigenschaften von Systemen von Kräften mit den zugeordneten Systemen von Vektoren, die so oft stattgefunden hat, wird mit der Untersuchung der letzteren im Allgemeinen verschwinden.
>
> (Hinweise zu den Lehrpläne 1925)

So verfestigte sich der rein geometrische Status der Vektoren; ihre Nische in diesem Lebensbereich konsolidiert sich durch den Bezug zur Trigonometrie.

2 Eine langsame Entwicklung (1937–1967)

2.1 1937–1938 Der arithmetische Lebensbereich wird konkreter

In den Jahren 1937 bis 1938 werden in der *Quatrième*[4] im Bereich Algebra und Arithmetik Vektoren auf einer Achse im Zusammenhang mit der Orientierung und der Ortsbestimmung auf der reellen Achse und der Relation von Chasles[5] eingeführt. Die Projektion von Vektoren derselben Richtung auf eine anders gerichtete Achse erscheint als Illustration der Multiplikation ganzer Zahlen. Es handelt sich immer um Vektoren (orientierte Strecken) mit einem gemeinsamen Anfangspunkt und derselben Richtung; sie werden notiert als $\overrightarrow{AB}$.

In den Lehrplänen erscheinen:

1. die Begriffe orientierte Gerade oder Achse, Einheitsvektor, orientierte Richtung
2. algebraische[6] Länge eines Vektors auf einer Achse oder parallel zu einer gegebenen Richtung (notiert als $\overrightarrow{v}$), die Relation von Chasles ist zu bearbeiten
3. die geometrische Summe von zwei Vektoren derselben Richtung, Summe ihrer algebraischen Längen
4. Festlegung von Punkten auf einer Geraden: Abszisse eines Punktes auf einer orientierten Geraden mit Ursprung, Änderung des Ursprungs
5. Messung eines Vektors aufgefasst als Anwachsen der Abszisse vom Anfangs- bis zum Endpunkt, Abszisse des Mittelpunktes der entsprechenden Strecke
6. Geometrische Interpretation der Dreiecksungleichung, Position eines Punktes bezüglich einer Strecke

Weiterhin stellt man fest, dass die Streckung ausgehend von zwei Parallelen, die auf zwei sich schneidenden Geraden Strecken abschneiden, eingeführt wird. Die Definition des Bildes eines Punktes unter einer Streckung wird mit Hilfe von algebraischen Längen gegeben. Es geht also mehr um die algebraischen Längen als um Vektoren.

Das Thema „Vektoren in der Trigonometrie“ erscheint 1937–1938 in der *Première*.

[4] Schuljahr vier Jahre vor der Abschlussklasse [Anm. des Übersetzers].

[5] Das ist i. W. die Additionsregel für Vektoren, [Anm. des Übersetzers].

[6] Also Vorzeichen behaftete Längen [Anm. des Übersetzers].

Die Lebensbereiche und Nischen der Vektoren haben sich nicht geändert; allerdings ist der algebraische Bereich insgesamt wieder erstarkt. Dies zeigt sich darin, dass der Vektorbegriff auf eine Dimension beschränkt bleibt und dass der trigonometrische Lebensbereich um eine Schulstufe heruntergesetzt worden ist. Im algebraischen Kontext ist die Multiplikation mit Skalaren von besonderer Bedeutung.

Erst im Jahre 1942 beginnen sich die Vektoren im Physikunterricht der weiterführenden Schulen auszubreiten, ausgehend von der Darstellung einer Kraft in der *Seconde*.[7] Dennoch wird das Zusammenspiel der beiden Konzepte „Vektor" und „physikalische Größe" nicht weiter vertieft, aber man beginnt bereits, Schwierigkeiten der Schüler mit Vektoren zu registrieren.

2.2 1947 – Eine Brücke zwischen den beiden Bereichen

1947 gibt es keine wichtigen Veränderungen. In der *Seconde* wird eine Variation des früheren Lehrplans der *Quatrième* eingebaut. In Fortführung dessen, was auf der Geraden (Achse) gemacht wurde, geht es jetzt um die geometrische Bestimmung eines Ortes in der Ebene: „Verhältnis zweier paralleler Vektoren, Teilung einer Strecke durch einen Punkt in einem gegebenen Verhältnis, Theorem von Thales".[8] Die zentrische Streckung wird eingeführt in Hinblick darauf, ähnliche Figuren zu Strecken oder Kreisen betrachten zu können. Deren Eigenschaften werden beim Studium des Umfangs eines Kreises gebraucht. Der Gebrauch von Vektoren als eigenständiges Thema wird nicht verlangt.

In der *Première* verlässt der Vektor die Trigonometrie und kehrt in der Geometrie zurück, zum ersten Mal im Begriff „äquipollenter Vektoren".[9] Diese dienen dazu, die Translation zu definieren. Das „Verhältnis zweier paralleler Vektoren" wird dazu verwendet, auf vektorielle Weise die zentrische Streckung, die Summe und die Differenz von Vektoren, die Projektion und die algebraische Länge sowie in einer orientierten Ebene den orientierten Winkel zwischen Vektoren oder Geraden einzuführen. Man findet eine Anspielung auf Vektoren in dem trigonometrischen Teil: Die geometrische Summe von Vektoren wird eingeführt, um die Ableitung derjenigen Formeln zu erleichtern, die den Kosinus und den Sinus der Differenz oder der Summe zweier Bögen liefern. Der Gebrauch von Vektoren nimmt in der Kinematik mit der Einführung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors zu, die man in der Mathematik der *Terminale* des naturwissenschaftlichen Zweigs wieder findet.

Man sieht, dass die Nischen und Lebensbereiche im Vergleich zur vorherigen Periode erhalten bleiben, und dass die Trigonometrie als Refernzlebensbereich zugunsten der Vergrößerung der Geometrie verschwindet.

Vor allem aber wurde in Gestalt des Strahlensatzes (der die algebraische Länge mit der Geometrie verbindet) eine Brücke geschlagen zwischen den beiden zuvor getrennten Lebensbereichen Algebra und Geometrie. So wird der geometrische Vektorbegriff „algebraisiert", die Multiplikation mit einem Skalar gewinnt an Wichtigkeit

[7] Drittletzte Klasse des Gymnasiums, [Anm. des Übersetzers].

[8] Im Deutschen ist das der Strahlensatz [Anm. des Übersetzers].

[9] Im Deutschen spricht man von verschiebungsgleichen oder äquivalenten Pfeilen (gleiche Länge, gleiche Richtung, gleiche Orientierung) [Anm. des Übersetzers].

und die Äquipollenz (Verschiebungsgleichheit), die erstmals auftritt, wird für eine gute Definition der Operationen unumgänglich.

2.3 1957 – Status quo

Von 1957 bis 1967 findet man Vektoren im Physikunterricht in der *Première* bei der Behandlung des Themas Elektromagnetismus: Vektoren werden dort definiert als orientierte Strecken, die einen festen Ursprung als Anfang und einen Endpunkt besitzen: Vektoren werden meist – um nicht zu sagen: immer – analytisch behandelt. Sie werden ebenfalls in der Kinematik verwendet, die allerdings nur ein Thema des Mathematikunterrichts in der *Première* C war[10] mit Begriffen wie Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor, die beim Studium von geradlinigen und kreisförmigen Bewegungen konstanter Geschwindigkeit auftreten. In diesem Kontext beziehen sich alle Berechnungen auf kartesischen Koordinaten, die Funktionen der Zeit sind. In der *Seconde* tauchen Vektoren in der Geometrie auf; man greift hier die in der *Troisième* betrachteten Strecken wieder auf. Dies beinhaltet die Äquipollenz, die Addition und ihre Eigenschaften, die Projektion und ihre Wirkung auf die Summe und die Differenz von Vektoren sowie die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl. Weiterhin werden Translationen und zentrische Streckungen durch Vektoren definiert.

In der *Première* wird zwischen „gebundenen äquipollenten" und „freien" Vektoren[11] unterschieden. Die Anwendung von Vektoren in Geometrie und Kinematik gewinnt zunehmend an Bedeutung: zum ersten Mal spricht man den Schwerpunkt zweier Punkte und das Skalarprodukt zweier Vektoren mit seinen Eigenschaften an. Ebenfalls auf diesem Niveau nimmt man ein zunehmendes Interesse an der Benutzung der Vektoren in der analytischen Geometrie zur Kenntnis, die ein unvermeidliches Durchgangsstadium ist.

Man kann also sagen, dass in dieser Periode die Lebensbereiche und Nischen unverändert geblieben sind, obwohl sich das „Werkzeug" Vektor mehr und mehr durchsetzt.

3 Das Zeitalter der modernen Mathematik (1968–1985)

3.1 Die Reform

Angesichts der Notwendigkeit und der Dringlichkeit, den Unterricht an den weiterführenden Schulen und insbesondere den Geometrieunterricht zu reformieren, beginnt man in den 1970er Jahren unter den Einfluss der so genannten modernen Mathematik mit einer tief greifenden Reform der Lehrinhalte. Diese Reform wird von den Universitäten radikal umgesetzt und unterstützt; eine ihrer Galionsfiguren ist Jean

[10] Früher gab es in Frankreich mehrere „Sektionen" im Abitur (mit A–H bezeichnet), C steht für ein Abitur (frz. „Bac") mit dem Schwerpunkt Mathematik. Das „Bac C" war das angesehenste Abitur [Anm. d. Übersetzers]).

[11] Dieses Vokabular erlaubte es, die orientierte Strecke von der Klasse der äquipollenten Strecken zu unterscheiden; diese Unterscheidung ist mit der modernen Mathematik verschwunden.

Dieudonné, welcher 1964 in seinem Werk „Lineare Algebra und elementare Geometrie“ heftig und in einem oftmals polemischen Ton seine Vorstellungen von einer Reform des Geometrieunterrichts verteidigte:

> Dieses Buch gibt eine komplette und detaillierte Darlegung der Ideen und Theoreme der elementaren linearen Algebra, welche das minimale Rüstzeug für Studienanfänger bilden. Die allgemeine Ausrichtung und die Inhalte wurden von dem Wunsch diktiert, es den Studenten so einfach wie möglich zu machen, sich in die aktuelle Lehre in höheren Vorlesungen einzugliedern. Diese sollten ihm als die natürliche Fortsetzung dessen erscheinen, was er bereits gelernt hat. Der Fakt, dass es zweifellos unter tausend Anfängern gegenwärtig keinen einzigen gibt, der in der Lage wäre, dieses Buch ohne Hilfe und ohne einen beträchtlichen Aufwand zu betreiben, zu lesen, spricht Bände über die Inkohärenz unserer Lehrpläne.
>
> (Dieudonné [13], 7)

Aus dieser Argumentation leitet Dieudonné ab, dass man im Gymnasium nur das lehren sollte, was auf die höhere Bildung vorbereitet (ohne elitär zu sein). Folglich muss man die Schüler auf die lineare Algebra vorbereiten. Diese vereinigt die synthetische und die analytische Geometrie und ist reich an höchst verschiedenen Anwendungen. Weiterhin bildet die lineare Algebra die Basis für diejenigen Begriffe, welche während der ersten Studienjahre (in der Propädeutik) behandelt werden.

> Es scheint mir, dass es von Interesse ist, den Anfänger so früh wie möglich mit den notwendigen Grundkenntnissen dieser Disziplin vertraut zu machen, ihm beizubringen „linear zu denken“, was umso einfacher ist, als es nur wenige Grundbegriffe in der Mathematik gibt, welche einfacher zu definieren wären als die des Vektorraumes und der linearen Abbildung. In unserer Epoche, in der alle Naturwissenschaften eine intensive Entwicklung erfahren, sind alle Tendenzen, welche komprimieren und vereinheitlichen von großem Nutzen, der nicht zu überschätzen ist. [...] Andererseits versuchte ich der Versuchung zu widerstehen, verfrüht Theorien einzuführen, die an der Universität gelehrt werden. Es scheint mir, dass die Natur uns glücklicherweise eine klar gezogene „Demarkationslinie“ mitgegeben hat, indem sie uns mit einem geometrischen Sinn für den Raum von zwei oder drei Dimensionen ausstattete. Das macht es möglich, alle die Phänomene der linearen Algebra zu veranschaulichen, die sich auf zwei Dimensionen beschränken (und natürlich auf reelle Skalare).
>
> (Dieudonné [13], 12–14)

Man bemerkt, dass Dieudonné viel Wert auf die einigende Kraft der linearen Algebra, welche ihm zu Folge es erlaubt, die elementare Geometrie mit der gebotenen mathematischen Strenge zu präsentieren, legt. Für ihn besteht das Interesse der Geometrie im weiterführenden Unterricht darin, dass sie:

> [...] ein wunderbares Labor darstellt, in dem man sich mit bestimmten einfachen Fällen, die sich in konkreten Bildern darstellen lassen, und mit Begriffen, deren Gehalt sehr allgemein und sehr abstrakt ist und welche man sich in dieser

allgemeinen Form später aneignen muss, vertraut machen kann; es wäre wirklich ausgesprochen schade, von diesem glücklichen Umstand nicht in vollem Umfang zu profitieren.

(Dieudonné [13], 14)

Im Unterschied hierzu konzipierte Choquet [9], der auch eine Rolle in dieser Reform spielte, wobei er immer abseits von Bourbaki stand oder sogar gegen ihn war, den Geometrieunterricht für junge Schüler nicht als einen deduktiven Lehrgang; dieser sollte nach Choquet vielmehr auf Beobachtungen beruhen und immer das Ziel verfolgen, ausgehend von Erfahrungen grundlegende Konzepte zu entwickeln. Choquet meinte, dass der „Königsweg", der den geometrischen Raum durch den dreidimensionalen affinen euklidischen Raum modelliert, nicht zugänglich sei für Schüler, die jünger als 17 Jahre sind. Er schlug aus diesem Grunde eine Axiomatik vor, die er zwischen die beiden genannten Stadien schieben möchte.

Choquet empfiehlt

die Verwendung einer einfachen Axiomatik an Stelle von starken Axiomen. So bekommt man sehr schnell einen Zugang zu nicht-evidenten und intuitiven Sätzen, was heißt, die Eigenschaften des Raumes, der uns umgibt, zu übersetzen und einfach verifizierbar zu machen.

(Choquet [9], 10)

Delachet [12] greift die in den beiden geschilderten Werken entwickelten Standpunkte wieder auf und vervollständigt sie:

Das Werk von Dieudonné gebraucht direkt die Begriffe Vektorraum und Skalarprodukt. Obwohl es erlaubt, in kurzer Zeit weit zu kommen, scheint es uns doch eine Lücke zu lassen zwischen der Benutzung der experimentellen Methode, der einzigen Methode, die man mit jungen Kindern verwenden kann, und der Einführung in die axiomatisch Methode, die uns gut geeignet für die Schüler der Oberstufe unserer Gymnasien zu sein scheint.

(Delachet [12], 7)

Die Position von Dieudonné, der die Reform der modernen Mathematik in Frankreich dominiert hat, ist ein ideologisches Modell von oben nach unten („top–down"): Das Vorbild des normierten euklidischen Raumes prägt die Einführung des Vektorbegriffs in der Sekundarstufe I mit der Perspektive, später die lineare Algebra oder, weiterführend noch, die Funktionalanalysis zu vermitteln.

In diesem Kontext werden Vektoren ab der *Quatrième* als Äquivalenzklassen von äquipollenten Punktepaaren eingeführt. Das Studium der algebraischen Eigenschaften soll dazu führen, dass – ohne es zu sagen – die dem geometrischen Raum zugrunde liegende Vektorraumstruktur sichtbar wird (indem man mit der Geraden, dann mit der Ebene anfängt). Mit diesem Ziel wurden 1969 die elementaren Ergebnisse der Theorie der Vektorräume endlicher Dimension in die Lehrpläne des Gymnasiums ab der *Seconde* aufgenommen. In der Klasse *Première* C treten Vektoren im Rahmen der Vektorgeometrie auf. Dabei hat sich aber der Sinn des Wortes „Geometrie" im Sinne der neuen Strukturierung des mathematischen Wissens erweitert:

[...] dieses Wort hat lange Zeit eine gewisse Beschreibung der physikalischen Welt beinhaltet, eine Aufzählung (manchmal nicht gänzlich klar aus-

> gedrückt) von Eigenschaften, welche experimentelle Gründe veranlassten, ihm zuzuschreiben. Kurzum – und das ist das Wesentliche – das Studium von Eigenschaften, die durch logisches Schlussfolgern aus Präzedenzfällen abgeleitet werden können. „Geometrie“ bezeichnet von nun an eine ihrer Natur nach logische mathematische Konstruktion, die sich auf ein kohärentes Axiomsystem stützt, in das in erster Linie die algebraischen Strukturen (Vektorräume, Gruppen, ...) und Topologien ($\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$...) einfließen.
>
> (Pressiat [25], 204)

Gemäß dieser vertikalen Organisation wird die Geometrie zu einer Propädeutik für die lineare Algebra, der geometrische Vektor wird der quasi ausschließliche Prototyp für Vektorräume. Dies ist eine technische Lösung des bekannten begriffsgenetischen Problems, wie das Abstrakte ausgehend vom Konkreten erlernt werden kann. So wird eine gewisse Strategie in der Darlegung des Stoffes erforderlich.

> Tatsächlich spiegelt sich die Natur des geometrischen Vektors nicht vollständig in seinen linearen Eigenschaften wider (weil diese Eigenschaften weder dem geometrischen Wesen, noch dem konstitutiven Aspekt der Dialektik zwischen Algebra und Geometrie noch der Wichtigkeit der Vektormultiplikation[12] bei der Entstehung des Vektorbegriffs gerecht werden). Dies ist der Grund dafür, dass die Einführung der Axiome des Vektorraums durch Überprüfung an geometrischen Vektoren als wesentlichen Interesse hat, zu zeigen, dass solche abstrakten Gesamtheiten auf einer „vertrauten“ Ebene existieren. Die Wahl des geometrischen Vektors wird also als Veranschaulichung gerechtfertigt, unter der Bedingung, dass man sehr explizit die Funktion dieser Veranschaulichung anspricht.
>
> (Dorier [15], 53)

Anders ausgedrückt wohnt man einer echten Linearisierung der Geometrie bei. Einer der Effekte dieser Entscheidung ist, dass Begriffe wie Untervektorraum, linear abhängige und unabhängige Vektoren sowie Basis das Fundament dieser neuen Vektorgeometrie liefern. Sie werden als Stützpunkte dienen, um die Kinematik des Massenpunktes einzuführen, und unter anderem Grundkenntnisse über Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren in der Abschlussklasse der Sektion C zu vermitteln.

In dieser neuen Organisation des mathematischen Schulwissens werden die Vektoren eine neue Nische besetzen. Nun haben sie die Funktion, die Schüler auf die lineare Algebra vorzubereiten, sie werden dafür die treibende Kraft und das zentrale Beispiel sein. Diese Vision „von oben“ der Organisation des mathematischen Wissens ist charakteristisch für die moderne Mathematik, in diesem Sinne wird die moderne Mathematik den Vektorbegriff im Gymnasium bedingen und formen.

Zusammenfassend sieht man, dass während der Periode der „modernen Mathematik“ der „natürliche“ Lebensbereich für Vektoren die Geometrie ist, ihre Nische ist es, als Grundlage für die Geometrie aber vor allem als Vorbereitung auf die lineare Algebra zu dienen.

[12] Sei es das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt.

Man bemerkt also einen direkten aber fernen Zusammenhang mit den Hilberträumen, die 5 oder 6 Jahre später gelehrt werden – aber nur noch für die mathematische Elite!

3.2 Kritik an der Reform

Von nun an wird der anschauliche Aspekt, der eine entscheidende Rolle in der Entstehung der Vektorrechnung gespielt hat (wie Bouligand [6] betont, waren es die Mechanik und der Elektromagnetismus, die dafür gesorgt haben, dass Vektoren in das Zentrum der mathematischen Beschäftigung rückten) zugunsten der abstrakten Theorie der Vektorräume aufgegeben.

> [...] das Wesen des geometrischen Vektors [...] ergibt sich notwendig daraus, dass die algebraische Strukturierung und die geometrische Anschauung in ein dialektisches Verhältnis gesetzt worden sind. Wir müssen hier betonen, dass die Verwendung des Begriffs „algebraische Strukturierung" nicht glauben machen soll, dass die Vektorrechnung wesensmäßig das Auftauchen der Theorie der Vektorräume in der Geometrie sei. Tatsächlich darf man sich hier nicht von der Ähnlichkeit des Vokabulars täuschen lassen. Die Theorie der Vektorräume ist von axiomatischer Natur, die algebraischen Vektoren sind nicht konstruiert, sie existieren a priori und sind nur durch ihre strukturellen Eigenschaften definiert. Die Vektorrechnung zeugt in dieser Hinsicht von einer dynamischen Modellbildung, das Objekt erschafft sich in der algebraischen Kombination in Interaktion mit der geometrischen Anschauung. Darüber hinaus war in der Entstehung des geometrischen Vektorbegriffs die Rolle der Multiplikation fundamental, wohingegen die lineare Struktur nicht mit einem Produkt ausgestattet ist.
>
> (Dorier [14], 76–77)

Es scheint, als wäre man sich über dieses Wechselspiel mit der geometrischen Anschauung in den Überlegungen zur Vektorrechnung nur wenig im Klaren gewesen. Das ist die These, die Choquet im Jahre 1973 betonte:

> Ich bin verstört darüber, was ich den Unterricht der Grundschule und der Sekundarstufe I betreffend feststellen muss. Sicher war ich einer der Befürworter der Reform des Mathematikunterrichts. Was ich befürwortete, war nur, einige abgestorbene oder überladene Äste abzusägen sowie etwas Algebra einzuführen [...], Die Umsetzung aber dieser Vorschläge wurde von einer sehr schädlichen Tendenz begleitet. Dies gilt vor allem für den Angriff gegen die Geometrie und gegen das Zurückgreifen auf die Anschauung. Man hat den Lehrern gesagt, dass sie Nieten wären, falls sie Dreiecke behandeln würden, und dass die lineare Algebra die gesamte altmodische Geometrie ersetzt hätte [...].
>
> (Zitiert bei Licois [21], 17)

Ab 1985 ändern sich die Lehrpläne der Gymnasien in kritischer Auseinandersetzung mit den Bourbakistischen Entscheidungen. Es beginnt diejenige Periode, die man als Gegenreform zur modernen Mathematik bezeichnen wird. Die lineare Algebra verschwindet gänzlich aus den Lehrplänen der weiterführenden Schule. Angefangen mit den Lehrplänen der undifferenzierten Sekundarstufe von 1981 holt dieses Verschwinden alle Gymnasialklassen mit den Lehrplänen von 1985 ein.

Der Bericht der Lehrplankommission Kahane [20] macht die Gründe, warum die Lehrpläne der modernen Mathematik wieder in Frage gestellt wurden, deutlich:

> [...] dieses vollkommen lineare Projekt, das von einem mathematischen Standpunkt kohärent erscheinen könnte, wurde eingeführt ohne vorangehende didaktische Überlegungen, die diese Bezeichnung verdient hätten. Das hat zu einem spektakulären Misserfolg geführt, der nicht durch mangelnde Vorbereitung des Lehrkörpers zu erklären ist. Es scheint hier tatsächlich wesentliche didaktische Gründe zu geben, die eine vorzeitige Einführung der linearen Algebra nicht so einfach machen, wie dies die Kollegen der 60er Jahre annahmen.
>
> (Kahane [20], 110)

Dennoch bemerken wir, dass die neue Definition des Vektorbegriffs als Element eines Vektorraumes, die aus der neuen Strukturierung des Geometrieunterrichts um die lineare Algebra herum hervorging, keine unmittelbaren Auswirkungen auf den Physikunterricht hatte, wie Hulin [4] betont:

> Die Koordination von Physik- und Mathematikunterricht wird schwieriger: Neben dem zeitlichen Auseinanderklaffen von Mathematikunterricht und den Bedürfnissen des Physiklehrers existiert auch eine Diskrepanz zwischen der im Mathematikunterricht gelehrten modernen Mathematik und der angewandten Mathematik, die im Physikunterricht gebraucht wird. Übrigens wird eine Expertengruppe ins Leben gerufen werden, die zwischen der Kommission Lagarrigue und der Kommission Lichnerowicz vermitteln und die Beziehungen zwischen dem Physik- und dem Mathematikunterricht untersuchen soll.
>
> (Belhoste, Gispert, Hulin [4], 37)

Trotz des guten Willens der Reformer wird es immer Misserfolge in der Lehre der beiden Disziplinen geben. Das bringt Belhoste [4] zum Ausdruck, wenn er schreibt:

> Eine Reform, die von den Interessen und den Sorgen der höheren Bildung ohne klare Vorstellung der eigentlichen Aufgaben der Sekundarstufe gesteuert wurde, war zweifellos von Anfang an zum Misserfolg verurteilt, gleichgültig was ihre wissenschaftliche Legitimität und den guten Willen ihrer Befürworter anbelangt.
>
> (Belhoste, Gispert, Hulin [4], 37)

Untersuchungen aus der Physikdidaktik zeigen gewisse mit Vektoren und deren Anwendung in der Physik verbundene Schwierigkeiten auf und versuchen, die behaupteten Misserfolge zu erklären. Im Jahr 1973 führten Malgrange, Saltiel und Viennot eine Umfrage bei Studienanfängern durch, um die Bedeutung zu ergründen, die die Studenten Vektoren und ihrer Verwendung in der Physik zuschrieben. Unter den von ihnen ermittelten Schwierigkeiten betrifft die hartnäckigste die Vektoraddition. Dazu kommen die Probleme mit der Sprache des Physikunterrichts, der im Allgemeinen nicht zwischen vektoriellen und skalaren Größe unterscheidet (Geschwindigkeit bezeichnet ebenso den Geschwindigkeitsvektor als auch die Größe der Geschwindigkeit). Ihre Erkenntnisse veranlassten die Autoren festzustellen, dass

> [...] die geometrische Repräsentation zweifellos näher an der physikalischen Intuition des Raumes als realistisch ist. Sie erlaubt es, „mentale Bilder" („man

> sieht, was vor sich geht“) zu entwickeln, deren Wichtigkeit nicht zu leugnen ist, obwohl es schwierig ist, sie genau zu definieren. Die geometrische Repräsentation erlaubt es weiterhin – oder müsste erlauben – qualitative Probleme (ohne Bezug auf Größen) zu lösen. Sie ist notwendig, wenn das Geometrische allein zur Debatte steht (Symmetrieprobleme zum Beispiel). Abgesehen davon, dass die diversen Aspekte nicht wirklich systematisch ausgeschöpft werden, führt allerdings ein Festhalten an einer ausschließlich geometrischen Repräsentation zu den Defiziten, die wir bereits kennen.
>
> (Malgrange, Saltiel, Viennot [24], 12)

Insgesamt schreiben diese Autoren die Schwierigkeiten

> dem zu großen Einfluss einer schlecht entwickelten Geometrie auf die Algebra, der die Beziehungen zwischen Kräften, Bewegungen und der Geometrie der Kongruenzabbildungen im Unklaren lässt
>
> (Malgrange, Saltiel, Viennot [24], 13)

zu.

Man musste nicht lange warten, um die ungünstigen Auswirkungen der Abstraktion in der Sekundarstufe zu erkennen. Der Bezug der Mathematik zu anderen Disziplinen wurde hervorgehoben: Die neuen Lehrpläne (von 1978) und vor allem ihr geometrischer Teil betonen den Gebrauch des anschaulichen Wissens der Schüler. Die Theorie ist kein Selbstzweck sondern ein Werkzeug, um auf die Fragen zu antworten, die das Leben stellt: Technologie, Physik, Ökonomie.

4 Die Gegenreform (1985 bis 2006)

Infolge der Misserfolge der modernen Mathematik, die sich in den Lehrplänen der Sekundarstufe niederschlugen, begannen sich die Sichtweisen zu ändern: Die Theorie der Vektorräume, die als Rahmen für die Arbeit mit Vektoren diente, verschwand nach und nach aus den Lehrplänen des Gymnasiums; der Vektorraum wurde durch einen „konkreteren“ geometrischen Rahmen ersetzt. In diesem Sinn präzisiert der Lehrplan, „dass die Vektorrechnung kein ausschließlich algebraisches Gebiet darstellen darf; ihre Beziehungen zu den geometrischen Situationen zu beherrschen, spielt eine wesentliche Rolle bei der Lösung geometrischer Probleme“.

> Dies bedeutet, dass man vergisst, dass der geometrische Vektor von algebraischer Natur ist und dass diese algebraische Natur nicht durch Einschieben des Zwischenglieds „Vektorraum“ aufgezeigt werden muss. Die Operationen mit den geometrischen Vektoren sind begriffliche Wesensmerkmale des geometrischen Vektors selbst:
>
> 1. Die Länge ist seit den Griechen die Basis der Geometrie.
> 2. Die Orientierung macht es möglich, die unumgänglichen negativen Größen im Rahmen der Addition zu berücksichtigen.
> 3. Die Richtung schließlich entspringt der Idee der Multiplikation
>
> Die letzte Aussage ist schwierig zu verstehen. Fragen wir hierzu, was die Multiplikation zweier Vektoren bedeutet. In der geometrischen Algebra der alten

Griechen ist das Produkt zweier Zahlen (d.h. zweier Strecken) der Flächeninhalt eines Rechtecks. Wenn man nun vom Rechteck zum Parallelogramm übergeht, erscheint in der Formel für den Flächeninhalt der Sinus des Winkels, der von den beiden Seiten eingeschlossen wird, d.h. die relative Position ihrer Richtungen (die Idee des Negativen impliziert hier den Einbezug der Orientierung). Folglich ist es, wie Grassman in der Einführung seiner Ausdehnungslehre betont, das Parallelogramm und nicht das Rechteck, das das richtige Konzept für die Multiplikation darstellt, wenn man orientierte geometrische Größen zu Grunde legt. Diese Einsicht zeigt, wie wichtig die Orientierung geometrischer Größen in der Idee des Produkts ist.

(Dorier [15], S. 79–80)

So wird in den neuen Lehrplänen die Vektorrechnung als Werkzeug vorgestellt, das der Lösung von geometrischen Problemen dient und dem Physikunterricht nutzen kann. Um diesen Standpunkt zu veranschaulichen, kann man anmerken, dass man bezüglich der *Première* nur noch Anweisungen findet wie „jeder axiomatische Standpunkt ist aus der gesamten Geometrie ausgeschlossen". In der *Terminale* ist die Überschrift „Vektorwerkzeug und Konfiguration" im Bereich der Geometrie Ausdruck dafür, dass jegliche Abstraktion bezüglich des Vektorbegriffs ausgeschlossen werden soll. Man bemerkt, dass sich der Werkzeugscharakter des mathematischen Objekts „Vektor" verfestigt; er tritt vermehrt im Rahmen von Untersuchungen anderer mathematischer Objekte auf.

Der Vektorbegriff wird am Ende der Sekundarstufe I auf „naive" Art in Verbindung mit Translationen eingeführt. Damit greift man auf die Geometrievorlesungen von Hadamard (Hada1898) zurück, der den natürlichen Zusammenhang zwischen Translation und Vektor treffend ausdrückt, indem er die Translation folgendermaßen definiert:

Falls man von allen Punkten einer Figur gleichlange, parallele in die selbe Richtung laufende Strecken zieht, werden die Endpunkte dieser Strecken eine der ersten gleiche Figur bilden. [...] Die Operation, durch welche man von der ersten zu der zweiten Figur kommt, hat den Namen Translation erhalten. Man sieht, dass eine Translation bestimmt ist, wenn man eine Strecke wie AA' in Größe, Richtung und Orientung vorgibt, welche einen Punkt mit seinem homologen verbindet. Man bezeichnet eine Translation auch durch die Buchstaben einer solchen Strecke: man spricht beispielsweise von der Translation AA'.

(Hadamard [19], 51)

Diese Idee der parallelen Strecken verdeckt jedoch oftmals den Zusammenhang zwischen der konkreten Bewegung Verschiebung und der mathematischen Translation. Nur wenige Mathematiklehrer bemühten sich darum, diesen Zusammenhang herzustellen, wie wir in unserer Arbeit festgestellt haben [2]. Gibbs hat 1901 den Vektor als eine Translation definiert; die Verbindung mit der Mechanik war schnell zu erkennen, wenn er behauptete: „The typical vector is the displacement of translation in space."

Die Kinematik, welche das einzige Gebiet war, das eine Brücke zwischen Mathematik und Physik zu schlagen erlaubte, wird als eigenständiger Bereich der Mechanik aus den Physiklehrplänen der *Seconde* vollständig verbannt. Dennoch nimmt der Gebrauch von Vektoren in den Physiklehrplänen der *Seconde* zu. Die Kraft, die vektorielle Größe, die die mechanische Wirkung eines Objektes auf ein anderes ausdrückt, sieht ihre Eigenschaften in den Schulbüchern klar ausgedrückt und formell repräsentiert. Die Modellierung der Geschwindigkeit entspricht einem Vektor im mathematischen Sinn.

Man merkt hier, dass der Werkzeugaspekt des Vektorbegriffs gegenüber den Objektaspekten überwiegt.

So verschwindet die lineare Algebra aus den Lehrplänen des Gymnasiums, der geometrische Vektor wird in der *Quatrième* und *Troisième* eingeführt, allerdings werden Bezüge zu der linearen Algebra unterdrückt. Die Vektoraddition muss mit der Zusammensetzung von Translationen in Verbindung gebracht werden. Die Geometrie der Figuren kehrt mit Macht zurück. In der *Seconde* wird klargemacht, dass jeglicher axiomatischer Standpunkt in der Geometrie zu vermeiden ist. Die Behandlung der Figuren nimmt einen zentralen Platz ein und der Computereinsatz wird betont. Die Vektorrechnung darf kein ausschließlich algebraisches Tätigkeitsfeld sein: Was wesentlich ist, ist, die Vektoren in den Konfigurationen und in den Transformationen zu erkennen. Es wird außerdem in den Lehrplänen präzisiert, dass das Interesse der Vektorauffassung nicht auf die Geometrie beschränkt sei. Dieses Interesse kann durch Beispiele aus der Physik illustriert werden. Die gleichen Ziele werden in der *Première* S[13] mit der Weiterführung der Vektorrechnung in der Ebene und mit ihrer Ausdehnung auf den Raum verfolgt.

Man sieht also, dass der Vektor einen verkleinerten Lebensbereich in der Geometrie und eine Nische in der Veranschaulichung der Physik sowie als leistungsfähiges Werkzeug in der Geometrie wieder findet. Die Bezugnahme auf die Algebra (sei es die lineare Algebra oder durch die orientierten Größen, wie man es in der arithmetischen Nische in den 40er bis 60er Jahren tat) ist gänzlich verschwunden.

5 Konklusion

Mehrere mathematischdidaktische Arbeiten haben die jüngsten Entwicklungen der Lehrpläne analysiert und die Schwierigkeiten beim Vermitteln von Vektoren auf den neuesten Stand gebracht (siehe zum Beispiel: Lê Thi Hoai [22], Bittar [5], Pressiat [25]). Man findet in diesen Arbeiten ebenfalls interessante Erfahrungen mit dem Unterricht von Vektoren. Es steht sicherlich außer Frage, sie hier vollständig zusammenzufassen.

Wir betonen lediglich drei Punkte, die unsere Untersuchung erhellen kann:

1. Obwohl die Reform der modernen Mathematik verworfen worden ist, prägt das Modell der linearen Algebra – auch wenn es offiziell aus den Lehrplänen verschwunden ist – weiterhin die mathematische Struktur um den Vektor. Die Wichtigkeit, die der Multiplikation mit einem Skalar im Gymnasium beigemessen wird, belegt dies. Man „beweist“ weiterhin, ohne es zu sagen, die Axiome der linearen Struktur. Die algebraischen Aspekte, die den Vektorbegriff auszeichnen, wie der

[13] Entspricht in etwa der früheren *Première* C [Anm. des Übersetzers].

Bezug zum Strahlensatz, werden allerdings verschwiegen. Das Verschwinden jeglicher algebraischen Nische wirkt sich als Mangel aus. Wenn anfänglich (berechtigterweise) der Bezug zu der Struktur des Vektorraumes verworfen wird, wird dies später nicht mehr ausgeglichen. In diesem Sinne wäre es wichtig, sich Fragen zu stellen bezüglich der algebraischen Aspekte von Vektoren, welche nicht die einer linearen Struktur sind, die aber deren geometrische Natur in nicht zu trennender Weise ausdrücken.

2. Die Nische „leistungsfähiges Werkzeug für die Geometrie“ bietet ihrerseits Schwierigkeiten. Es ist tatsächlich schwierig, ein geometrisches Problem zu finden, das ohne Vektoren formuliert werden kann, bei dem aber die Modellierung mit Hilfe von Vektoren zu einer wirklich leistungsfähigen Benutzung des Werkzeugs Vektors führt. Man hat tatsächlich in der Entwicklung der Lehrpläne gesehen (und die historische Analyse bestätigt dies), dass der geometrische Bereich nicht ganz so natürlich ist für die Vektoren, wie es den Anschein hat. Zu einem Großteil ist der geometrische Vektor eine didaktisch motivierte Erfindung, die es in einem gegebenen Moment erlaubt, ein begriffsgenetisches und praktisches Problem in der Organisation des gelehrten Wissens zu lösen. Dieser Punkt wird besonders in der Arbeit von Pressiat [25] untersucht.
3. Es bleibt die Nische „Werkzeug für die Physik“; aber auch sie scheint schwierig aufrecht zu erhalten zu sein. Tatsächlich sind nur wenige physikalische Situationen in der *Troisième* oder selbst in der *Seconde* bekannt, für welche der Vektorformalismus wirklich passend wäre. Meistens findet man in den Lehrbüchern mehr oder minder versteckte Einkleidungen von pseudophysikalischen Situationen. Der Schüler wird hierbei auf den reinen Nachvollzug reduziert, da er die behandelte physikalische Situation nicht wirklich verstehen kann.

Wir haben gesehen, dass die Entwicklung der Lehrpläne nicht aufgehört hat, die physikalischen und mathematischen Lebensbereiche der Vektoren zu trennen, was die disziplinäre Abgrenzung gefördert hat. In unserer Dissertation [3] untersuchen wir diese Fragestellung. Wir analysieren einerseits Situationen aus der Physik, die einen guten Einstieg in die Vermittlung von Vektoren in den Mathematikklassen sein könnten, andererseits untersuchen wir im Physikunterricht Situationen, in denen eine entsprechende mathematische Arbeit notwendig ist. Idealerweise zielen wir darauf ab, Szenarien für einen fächerübergreifenden Unterricht in den beiden Fächern aufzubauen, die die Vektoren und die physikalischen Vektorgrößen vereinigen.

Danksagung Das französische Original dieses Artikels erschien in L’Ouvert Nr. 113 (2006), 17–30. L’Ouvert ist eine Zeitschrift des IREM Strasbourg. Die Übersetzung besorgte L.R. Volkert (Esch-sur-Alzette). Unser Dank gilt Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) für seine Hilfe bei der Übersetzung.

Literatur

1. Artaud, M.: Introduction à l’approche écologique du didactique. L’écologie des organisations mathématiques et didactiques. In: Bailleul, M. et al. (Hrsg.) Actes de la XI$^{\text{ième}}$ Ecole d’Eté de Didactiques des Mathématiques, Houlgate, 1997, S. 101–139 (1997)
2. Ba, C.: Etude didactique de l’utilisation du vecteur en physique et des liens entre mouvement de translation et translation mathématique. Mémoire de DEA, LIRDHIST. Université Claude Bernard, Lyon 1 (2003)

3. Ba, C.: Etude didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1/Université Cheikh Anta Diop, Dakar. Zugänglich unter http://www.tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/22/41/PDF/These-BA-2007.pdf (2007)
4. Belhoste, B., Gispert, H., Hulin, N. (Hrsg.): Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, Vuibert – INRP, Paris (1996)
5. Bittar, M.: Les vecteurs dans l'enseignement secondaire – Aspects outil et objet dans les manuels – Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements: papier-crayon et Cabri-géomètre II. Thèse de l'université Jospeh Fourier – Grenoble 1 (1998)
6. Bouligand, G.: Les aspects intuitifs de la Mathématique. Gallimard, Paris (1944)
7. Chevallard, Y.: La transposition didactique, 2. Aufl. La Pensée Sauvage, Grenoble (1991)
8. Chevallard, Y.: Les processus de transposition didactique et leur théoretisation. In: Arsac, G., et al. (Hrsg.) La transposition didactique à l'épreuve, S. 135–180. La Pensée Sauvage, Grenoble (1994)
9. Choquet, G.: L'ensignement de la géometrie. Hermann, Paris (1964)
10. Colomb, J.: (dir.): Les enseignements en Troisième et Seconde, ruptures et continuités, pp. 49–76. INRP, Paris (1993)
11. Crowe, M.J.: A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System. University Press, Notre Dame (1976)
12. Delachet, A.: La géométrie élémentaire. Presses universitaires de France, Paris (1967). (Reihe: Que sais-je ? Nr. 418).
13. Dieudonné, J.: Algèbre linéaire et géometrie élémentaire. Hermann, Paris (1964)
14. Dorier, J.-L. (Hrsg.): L'algèbre linéaire en question. La Pensée Sauvage, Grenoble (1997)
15. Dorier, J.-L.: Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire – Perspective théorique sur leurs interactions. Cahier du laboratoire Leibniz n°12 (2000). http://www.leibniz-imag.fr/LesCahiers/index.html
16. Flament, D.: Le nombre une hydre à n visages. Entre nombres complexes et vecteurs. Editions de la maison des sciences de l'homme, Paris (1997)
17. Flament, D.: Histoire des nombres complexes. Entre algébre et géometrie. CNRS Editions, Paris (2003)
18. Gispert, H., Hulin, N.: L'ensignement des mathématiques dans ses liens à d'autres disciplines, Une perspective historique. Vuibert – INRP, Paris (2007)
19. Hadamard, J.: Leçons de géometrie élémentaire. Tome 1: Géométrie plane. Herrmann, Paris (1898)
20. Kahane, J.-P. (Hrsg.): Rapport au ministère de l'Education nationale, l'enseignement des sciences mathématiques, Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques sous la direction de Jean-Pierre Kahane. Odile Jacob, Paris (2002)
21. Licois, J.-R.: La géométrie élémentaire au fil de son histoire dans les programmes français. Ellipses, Paris (2005)
22. Lê Thi Hoai, C.: Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Vietman et la classe de seconde en France. Thèse de l'université Joseph Fourier – Grenoble 1/Ecole Normale Supérieure de Vinh (1997)
23. Lounis, A.: L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques: conceptions et difficultés des élèves, essai et remédiation. Thèse, Université de Provence Aix-Marseille I (1989)
24. Malgrange, J.-L., Saltiel, E., Viennot, L.: Vecteurs, scalaires et grandeurs physiques. Bulletin SFP. Encart pédagogique, Janvier-Février 1973, pp. 3–13 (1973)
25. Pressiat, A.: Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « point-vecteurs ». Thèse de l'université Paris VII (1999)