Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas

RAFAEL FELIPE CHAVES ESCOBAR

COD.2013185006

LUIS ALBERTO JAIMES CONTRERAS

COD. 2013185009

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTA. D.C., 2014

Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas

RAFAEL FELIPE CHAVES ESCOBAR

LUIS ALBERTO JAIMES CONTRERAS

ASESOR
Mg. HERNÁN DÍAZ ROJAS

COASESORA
Dra. JEANNETTE VARGAS HERNÁNDEZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTA. D.C., 2014

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Descomposición genética de la educación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas".*** *Presentado* por los estudiantes:

Rafael Felipe Chaves Escobar – 2013185006
Luis Alberto Jaimes Contreras - 2013185009

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **44** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *HERNÁN DÍAZ ROJAS*

Jurados:

Profesor(a) *DARLY ALINA KÚ*

Profesor (a) *BENJAMIN SARMIENTO LUGO*

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Descomposición Genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.
Autor(es)	Chaves Escobar Rafael Felipe; Jaimes Contreras Luis Alberto.
Director	Hernán Díaz
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2014. 75p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Teoría APOE, descomposición genética, problemas de mezclas, construcciones mentales, mecanismos de construcción.

2. Descripción
Este trabajo presenta una Descomposición Genética del objeto Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden que modela un problema de mezclas, la cual se obtuvo siguiendo el marco metodológico propuesto por la teoría APOE, dicho marco implica la elaboración de una descomposición genética preliminar que pone en relieve las primeras consideraciones acerca de cuáles son las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que realiza un estudiante para comprender la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas. Para determinar si estas primeras consideraciones se ajustan a la descomposición genética del concepto a tratar, se aplicó a 9 estudiantes de ingeniería de una Universidad Pública dos instrumentos de recolección de información; discusiones en clase y ejercicios escritos. Luego, producto del análisis de la información se evaluaron las construcciones mentales y los mecanismos de construcción dados en la descomposición genética preliminar, y se realizaron los ajustes que se consideraron necesarios para proponer la descomposición genética refinada que da cuenta cómo comprende un estudiante la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.

3. Fuentes
Se consultaron varios documentos, dentro de estos, 3 tesis doctorales y 5 libros de ecuaciones diferenciales y cerca de 25 publicaciones. A continuación se mencionan 9 de las fuentes más relevantes:

Alvarenga, K. B. (2006). Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios (Tesis Doctoral). Instituto Politecnico Nacional. Monterrey.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, 2, 1 – 32.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer New York.

Bermúdez, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Dubinsky, Ed. (2000 a). De la Investigación en Matemática Teórica a la Investigación en Matemática Educativa: un viaje personal. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 3 (1), 47 – 70.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, 273-280.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., & Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Acta Scientiae,6 , 41-59

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática. Educativa a Nivel Superior. Educación matemática, 17, (1), 5-31.

Zill Dennis & Cullen Michael. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.

4. Contenidos

El presente trabajo está estructurado en 5 capítulos, descritos a continuación:

El capítulo 1 da cuenta de la existencia del problema que originó esta investigación, este es, cómo comprende un estudiante la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.

El capítulo 2 describe la teoría APOE como fundamento teórico de esta investigación a través de sus elementos principales: construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema), mecanismos de construcción (interiorización, reflexión, inversión, coordinación, tematización, encapsulación y desencapsulación) y descomposición genética. Además se da explicación de los principales conceptos matemáticos involucrados con la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas, estos son: razón de cambio, definición y clasificación de una ecuación diferencial, modelo matemático y problemas de mezclas.

El capítulo 3 describe la metodología (sugerida por APOE), comenzando por un análisis teórico del objeto ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas, el cual incluye una descomposición genética preliminar que vincula las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que realiza un estudiante para comprender la ecuación diferencial. Lo anterior soportado por la información recogida a través de dos técnicas de recolección de datos, las discusiones en clase y las pruebas escritas. Por último se realizó el análisis de la información recogida con la finalidad de realizar ajustes a la descomposición genética preliminar.

El capítulo 4 da cuenta de los resultados obtenidos mediante la refinación de la descomposición genética preliminar y expone las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que realiza un estudiante para comprender la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.

Por último, el capítulo 5 recoge las conclusiones finales sujetas al marco teórico usado y a los objetivos propuestos en esta investigación, además expone algunas recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con las ecuaciones diferenciales.

5. Metodología

Para la realización de este trabajo se contó con la participación de estudiantes de una Universidad Pública de la ciudad de Bogotá que inscribieron la asignatura de ED en el programa de Tecnología en Construcciones Civiles e Ingeniería Civil. El trabajo realizado con los estudiantes se desarrolló bajo los componentes planteados en el ciclo de investigación de la teoría APOE, el cual describimos en la siguiente sección.
La teoría APOE plantea un ciclo de investigación que involucra tres componentes; análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y la recolección y análisis de datos. El componente relacionado con el análisis teórico implica la elaboración de una descomposición genética preliminar, la cual describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender la ecuación diferencial lineal de primer orden (EDLO1) que modela un problema de Mezclas. En el segundo componente se escogen ciertas actividades basadas en la descomposición genética preliminar, dichas actividades son la base del tercer componente; la recolección y análisis de datos.

6. Conclusiones

La descomposición genética presentada en este trabajo evidencia que un objeto matemático por muy “simple” que parezca o que algunos libros de texto presenten de forma trivial, implica un conjunto de construcciones mentales y mecanismos de construcción que los estudiantes requieren desarrollar para lograr su comprensión.
Se sugiere en un curso de ED en el que se trabajen problemas de mezclas presentar la función $V(t)$ como la solución de una ED.

En los libros de texto revisados no se menciona la razón de cambio $\frac{dV}{dt}$, en el momento de solucionar un problema de mezclas, pero como se mencionó en el análisis de los audios y la prueba escrita algunos estudiantes no solo deducen la función volumen de forma directa sino que plantean una ecuación diferencial, porque comprenden que la razón de cambio $\frac{dV}{dt}$, es igual a la diferencia entre la velocidad de entrada y velocidad de salida de mezcla, lo que permite escribir la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$, cuya solución para los problemas de mezclas definidos en este trabajo es $V(t) = (A - B)t + V_0$ donde V_0 (Volumen inicial) es la constante de integración que se halla con la condición inicial $V(0) = V_0$. En relación a lo anterior, se sugiere en un curso de ED en el que se trabajen problemas de mezclas presentar la función $V(t)$ como la solución de la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$.

Cuando se elaboró la descomposición genética preliminar no se incluyó alguna forma en particular para hallar la función V(t), aunque uno de los procesos implicaba reconocer la función V(t) para cualquier comportamiento de las velocidades de entrada y salida de la mezcla, lo cual sí se incluye en la descomposición genética presentada en los resultados de este trabajo, porque fue uno de los procesos realizados por los estudiantes.
La metodología utilizada permitió a los investigadores detectar que el modelo predice las construcciones de los estudiantes e invitamos a otros investigadores a utilizarlo para flexibilizar y completar el modelo.

Elaborado por:	Chaves Escobar Rafael Felipe; Jaimes Contreras Luis Alberto.
Revisado por:	Hernán Díaz

Fecha de elaboración del Resumen:	22	10	2014

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

En la malla curricular de las carreras de ingeniería los fundamentos del cálculo se ubican en la línea del análisis matemático. Un estudiante de ingeniería en los primeros semestres debe cursar asignaturas como cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial y álgebra lineal como requisitos previos para cursar la asignatura de ecuaciones diferenciales (ED) ya que esta última exige al estudiante la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales como función, límite, continuidad, derivada, integral entre otros. Sin embargo se evidencia que algunos estudiantes llegan a este curso sin comprender estos conceptos, como por ejemplo: cuando se les propone un problema matemático, no reconocen ni diferencian constantes, parámetros, variables, el cambio de una variable respecto a otra, y mucho menos plantean una ecuación que las relacione (Chaves y Jaimes, 2012).

Morales López y Salas Huertas (2010) señalan que en la enseñanza de las ED actualmente “predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver problemas que involucran ED” y que algunos docentes hoy en día emplean como estrategia didáctica. Un planteamiento similar hecho por Nápoles Valdés, González Thomas, Brundo, Genes, y Basabilbaso (2004) indican que en la enseñanza de las ED algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son evadidos u ocultados con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto, llevando al estudiante y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo.

En algunos libros de ED que hemos revisado (Zill y Kullen, 2008;Becerril y Elizarraraz, 2004; Edwards y Penney, 2009; Bronson y Costa, 2008; Nagle, Saff y Snider, 2005), cuando se abordan los modelos lineales de primer orden (mezclas, decaimiento radioactivo, crecimiento exponencial, entre otros) por lo general se hace una breve presentación; en algunos casos implica el proceso que se utiliza para obtener la ED que modela el tipo de problema dado, y un ejemplo en donde se utiliza la ED.

Por lo anterior se considera necesario proponer una descomposición genética que exhiba los elementos que un estudiante requiere para comprender la ecuación diferencial lineal de primer orden (EDLO1) que modela un problema de mezclas, tomando como marco teórico y metodológico la teoría APOE.

CAPÍTULO 1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

A continuación, se establece el planteamiento del problema mediante cuatro secciones. En la primera se revisan: los resultados de un encuentro de profesores realizado en el año 2011 en el que uno de los temas de discusión fue la tasa de repitencia en los cursos de matemáticas; las investigaciones relacionadas con la enseñanza aprendizaje de las ED, y la forma como se presenta la ecuación diferencial lineal de primer orden (EDLO1) en los libros de texto. En la segunda, se plantea la pregunta de investigación. La tercera, se plantean el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación. Finalmente, en la cuarta la justificación del problema.

1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El problema que se va a tratar en el presente trabajo se identificó a través de tres elementos que se explican a continuación:

1.1.1. Tasa de repitencia en los cursos de ecuaciones diferenciales

En el Encuentro de Profesores de Matemáticas y Estadística y Formadores de Profesores de Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, realizado el 23 de Marzo de 2011, se presentó un análisis de la incidencia de las asignaturas de matemáticas en situaciones de prueba académica llamando nuestra atención los elevados índices de repitencia del curso de Ecuaciones Diferenciales en los períodos académicos 2002-II al 2010-I (Ver Figura 1) y cómo esta tasa de repitencia desde el año 2002 ha crecido considerablemente o en el mejor de los casos aproximadamente ha mantenido su promedio. Estos resultados se deben en parte a que los estudiantes requieren de una trayectoria matemática sólida y por consiguiente la comprensión de conceptos fundamentales del cálculo, situación que para muchos estudiantes se convierte en obstáculo para continuar con el curso del programa académico al que están inscritos. Entre los vacíos cognitivos con los que llegan los estudiantes a esta asignatura está, por ejemplo, cuando se les enfrenta a un problema matemático, no reconocen ni diferencian constantes, parámetros, variables, cambio de una variable respecto a otra, y mucho menos plantean una ecuación que las relacione.

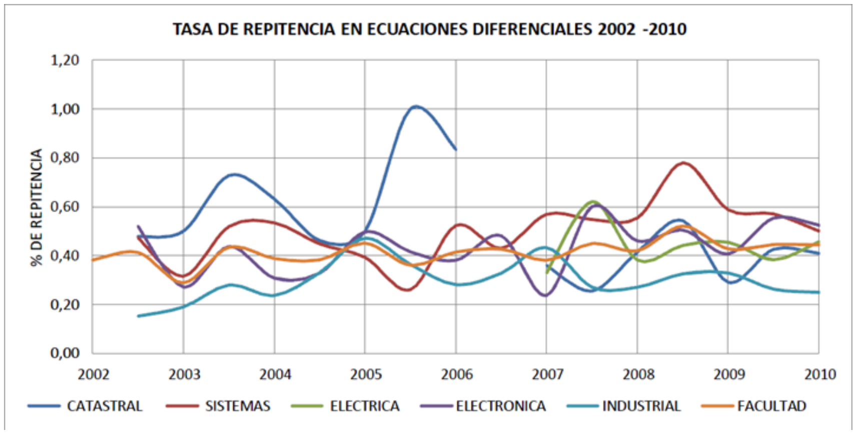


Figura 1. Tasa de repitencia en cursos de ED

1.1.2. Investigaciones relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales

De acuerdo a la revisión realizada no encontramos ninguna investigación de ED asociada a problemas de mezclas, sin embargo encontramos investigaciones asociadas a la comprensión de las ED, a continuación se exponen algunas ideas relevantes de cada una de ellas:

- La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. (Napoles, 2009)

Este trabajo presenta un enfoque histórico-problémico de un curso de ecuaciones diferenciales ordinaria que puede ser adaptado a otros entornos, como los son modelos numéricos de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Resistencia, Argentina), donde vienen aplicando este enfoque desde hace dos años. En este trabajo además se muestra un recorrido histórico de la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y cómo en muchos casos se sigue dando prioridad al enfoque algebraico como primera forma que surgió de resolver problemas que involucran ED.

- Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. (Dullius, 2009)

Este trabajo comprende cuatro estudios (Estudio Preliminar, Estudio 1, Estudio 2 y Estudio 3). En el Estudio Preliminar se realiza una investigación sobre las dificultades de aprendizaje, y en cada uno de los estudios 1, 2 y 3 se desarrolla una práctica pedagógica en la que participaron los alumnos de los cursos de Ingeniería y Química Industrial del Centro Universitario UNIVATES (Brasil), matriculados en la asignatura de Cálculo III. Esta investigación es una propuesta de enseñanza que se centra en la solución de situaciones-problema con el uso de los recursos computacionales, en que inicialmente se explora la solución de ecuaciones diferenciales, obtenidas con un software y, a continuación, el abordaje de las técnicas analíticas (metodología inversa). La metodología de las clases desarrolladas tiene como fundamento teóricos la Teoría Socio Interaccionista de Vygotsky y los materiales de instrucción utilizados fueron elaborados a partir de la Teoría del Aprendizaje significativo de Ausubel.

La recolección de información sobre el aprendizaje de los alumnos durante las clases se hizo a través de instrumentos elaborados para ese propósito, tales como: cuestionario, entrevistas, guías de actividades, test inicial y final de conocimientos y diario de campo. De un estudio a otro modificaron los materiales, instrumentos para la colecta de datos e hicieron algunos cambios en la metodología de las clases. Las discusiones que se presentan en este trabajo son provenientes de las informaciones obtenidas durante las actividades de enseñanza-aprendizaje y tienen en cuenta el marco teórico adoptado. Como resultados de esta investigación se tiene la *aplicación del material*, ya que las actividades propuestas en las guías y el uso de recursos computacionales motivaron a los alumnos al estudio de las ecuaciones diferenciales, *la interacción de los alumnos*, en grupos, con el material de instrucción y con el profesor siempre posibilitó que se dieran debates provechosos y las condiciones propicias para el aprendizaje. Finalmente indican que el uso de recursos computacionales puede ser una herramienta importante en el proceso enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

- Enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. “Una Ingeniería Didáctica y las situaciones didácticas con el apoyo del software winplot”. (Peña, García y Porras, 2011)

Esta investigación es una propuesta didáctica compuesta por 11 ejercicios estructurados que pretende encontrar las evidencias de aprendizaje que existen entre los alumnos y que se adquieren en una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias con los procedimientos organizados a base de secuencias de enseñanza apoyados por las Teorías de las Situaciones Didácticas y de la de Registros de Representación Semiótica en la que, dando énfasis a las reglas de tratamiento y conversión; el estudiante pueda transitar entre la semiosis y la nóesis ofreciendo así resultados de conocimientos significativos de ecuaciones diferenciales ordinarias en el nivel universitario entre los semestres cuarto y quinto de las carreras de ingeniería. A la vez que obtenga facilidades mediante el uso de la tecnología de las comunicaciones a través de un software computacional de carácter libre en el amplio mundo del internet y una caracterización de los participantes en un estudio de casos a lo largo de cuatro años dedicados a la aplicación de instrumentos de recolección de incidencias verificables.

1.1.3. Presentación de la EDLO1 que modela un problema de mezclas en libros de texto

De acuerdo con la revisión de algunos libros de texto de ecuaciones diferenciales (Zill y Kullen, 2008; Becerril y Elizarraraz, 2004; Edwards y Penney, 2009; Bronson y Costa, 2008; Nagle, Saff y Snider, 2005) se encontró que presentan la ecuación diferencial sin dar una justificación de su planteamiento, sea cual sea el tipo de situación problemática (crecimiento de poblaciones, decaimiento radioactivo, problemas de mezclas, entre otros.) y las condiciones iniciales al que esté sujeto el problema. Dando prioridad a la solución de la ecuación diferencial y a la solución, dejando de lado el análisis de la misma ecuación diferencial, es decir su sentido y significado.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Por los motivos presentados anteriormente consideramos que esta investigación tiene lugar en la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y por lo tanto formulamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo comprende el estudiante la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas?

1.3. OBJETIVO GENERAL

Plantear una descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.

1.3.1. Objetivos específicos

1. Elaborar un análisis preliminar desde los conceptos matemáticos inmersos en la comprensión de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas.
2. Realizar una revisión de las investigaciones en educación matemática referentes a los obstáculos de los estudiantes en la comprensión de una ecuación diferencial, en particular la que modela un problema de mezclas.
3. Realizar una descomposición genética preliminar del concepto ecuación diferencial que modela un problema de mezclas.
4. Elaborar un instrumento que permita recolectar información para identificar las construcciones y mecanismos mentales que tienen los estudiantes de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas, de acuerdo a la descomposición genética realizada.
5. Refinar la descomposición genética preliminar, de acuerdo al análisis de la información recolectada a través del instrumento.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Las investigaciones en educación matemática, específicamente las que están relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las ED, según Perdomo (2011):

> … se pueden dividir en dos grandes grupos: aquellas centradas en la detección y análisis de dificultades en el proceso de aprendizaje y las que proponen modelos de enseñanza alternativos al modo tradicional, basado en el tratamiento algebraico del concepto, la clasificación de las ecuaciones en diferentes tipos y el uso de métodos algebraicos de resolución específicos para cada tipo de ecuación. (p.3)

Según Morales Lopez y Salas Huertas (2010) en el estudio de las ED actualmente "predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver problemas que involucran ED" y que algunos docentes emplean como estrategia didáctica.

Para Nápoles Valdés, González Thomas, Brundo, Genes, y Basabilbaso (2004) en la enseñanza de las ED algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son evadidos u ocultados con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto llevando al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo. En libros de ED, como por ejemplo Zill D. (2006) o Carmona J. (2011), cuando se abordan los modelos lineales de primer orden por lo general se le da al estudiante la ED que modela este tipo de situaciones, presentándola como una fórmula, impidiendo la comprensión precisa del concepto como lo menciona Nápoles et al. (2004).

La mayoría de las investigaciones centradas en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) se ocupan del concepto de solución, en particular, las soluciones de equilibrio. Varios trabajos señalan que este concepto como elemento es el causante de varias dificultades en el tratamiento de las EDO, considerando dos posibles causas, la primera es el hecho de que el conjunto de soluciones de una ED es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos y la segunda es el uso de métodos de resolución o de cálculo en el que se consideran las variables como símbolos que se deben manipular, sin tomar en cuenta su significado (Perdomo 2011).

En la revisión que realizó Rasmussen (2001) sobre distintos trabajos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, identificaron distintas estrategias, dificultades y formas de comprender que muestran los estudiantes en relación con la creación, interpretación y coordinación de diferentes sistemas de representación y la formulación de predicciones justificadas acerca del comportamiento de las funciones solución de una ED.

En otra investigación realizada por Guerrero, Camacho y Mejía (2010) se analiza la forma en que los estudiantes utilizan sus conocimientos matemáticos para representar el campo de direcciones asociado a una EDO, y observaron que no logran vincular los sistemas de representación gráfico y algebraico, lo que les dificulta el análisis de las soluciones de una EDO cuando no se les proporciona algebraicamente.

Sin embargo, a pesar de que existen algunas investigaciones que frente a las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las ED, proponen un cambio en el modelo de enseñanza de las ED, como por ejemplo la investigación desarrollada por Artigue (1987), en la que potencia el uso de los sistemas de representación gráfico y algebraico simultáneamente, o como la de Habre (2000) y Guerra-Cáceres (2003), quienes comprueban que a pesar del uso de varios registros, los estudiantes le otorgan más importancia a los tratamientos algebraicos. Son muy pocas las que se enfocan en las construcciones mentales de los estudiantes frente al planteamiento de la ED que modela un problema, o sobre cómo (procesos que intervienen) se realiza el traspaso del registro lenguaje natural al registro algebraico cuando se le presenta una situación problema que requiera ser modelada matemáticamente por una ED. Para Duval (2006) es preciso tener en cuenta que cada vez que nos enfrentamos a un problema matemático, se requiere para su solución tener claro los diferentes registros de representación, las relaciones que se pueden establecer entre ellos y la funcionalidad de los mismos.

La implementación de recursos tecnológicos propicia el traspaso de registros ya que como menciona Dullius (2009, p.6) permite al estudiante interactuar con una representación del modelo científico (en este caso una ED) que describe el fenómeno de interés y dispone al mismo de la oportunidad de observar, explorar y analizar el comportamiento de las ED.

Dentro de la literatura que hemos revisado, no encontramos investigaciones que expongan estrategias, dificultades y formas de comprender que muestran los estudiantes en relación al planteamiento de una ED que modele un problema de mezclas dado, y mucho menos que describan una descomposición genética de la ED que modele cierto problema. En consecuencia, nuestro problema de investigación se encuentra inmerso dentro del Pensamiento Matemático Avanzado y es desde allí que tomamos una postura de lo que consideramos comprensión de un concepto matemático en el marco de la teoría APOE, con el fin de plantear la descripción de una descomposición genética de la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas.

CAPÍTULO 2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presenta la teoría APOE como el marco teórico utilizado en el análisis la información recolectada (Sección 3.2.) y la presentación de los resultados obtenidos en este trabajo. Más adelante se presentan los conceptos y definiciones que se encuentran implícita o explícitamente en un problema de mezclas, como son la razón de cambio, clasificación y orden de una ED y los modelos lineales.

2.1 LA TEORÍA APOE

Originalmente se conoce en Inglés con la sigla **APOS** que representa *Action, Process, Object, Schema*. En la literatura española se traduce por APOE (acción, proceso, objeto y esquema), sigla que será utilizada para efectos del presente trabajo. La teoría APOE es desarrollada por Ed. Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores de Research in Undergraduate Mathematics Education Community (**RUMEC**), está basada en las ideas introducidas por Piaget, específicamente en el concepto de *Abstracción Reflexiva* y la extiende a nociones matemáticas más avanzadas, usándola para describir cómo un individuo comprende un concepto matemático (Dubinsky Ed, 2000 a).

Según Piaget y García (1982, p. 10) la Abstracción Reflexiva que procede a partir de las acciones y las operaciones del sujeto se define como "el mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro" y tiene lugar a través de dos actividades relacionadas entre sí: en la primera se hace un "reflejamiento" sobre un nivel superior de lo que se ha extraído de un nivel inferior y en la segunda una "reflexión" que reconstruye y reorganiza lo que fue transferido por reflejamiento. En otras palabras, según Dubinsky, E. (1991, p. 98) la abstracción reflexiva es la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre estos objetos, a través de la interiorización y coordinación de acciones para formar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos (que ya no son físicos sino matemáticos, por ejemplo una función o un grupo). Para Trigueros "la abstracción reflexiva es comprendida en el sentido del razonamiento que hace el sujeto sobre el significado de las operaciones que realiza sobre el objeto matemático y de los resultados que produce en el propio sujeto" (2005, p.9).

Dubinsky (1991) considera que el concepto de "abstracción reflexiva" se convierte en una herramienta eficaz para los investigadores ya que les dota de una base teórica sólida para la comprensión del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). En ese sentido, Dubinsky ve la dificultad en aplicar la teoría de Piaget al PMA, debido a que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero conforme el nivel matemático aumenta, se requiere de la construcción de nuevos objetos, no físicos sino mentales, esto implica la manipulación de los mismos para construir las ideas matemáticas.

Una de las ventajas de esta teoría sobre los procesos mentales y para la cual muchos investigadores la han tomado como marco teórico y metodológico es que puede ser usada para explicar las dificultades de los estudiantes en la comprensión de un concepto matemático y proponer diferentes rutas de construcción para su aprendizaje. Para ello, en esta teoría se considera al conocimiento matemático de un individuo como: "*la tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas"* (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000a) y Asiala et al. (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para dar significado de los problemas y situaciones matemáticas; dichas construcciones no se dan sin que existan unos mecanismos de construcción que las desarrolle y las controle.

2.1.1 Construcciones Mentales.

Se llaman construcciones mentales a todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permita obtener significado de ellas (Bermúdez, 2011). En la teoría APOE las construcciones mentales que se consideran son: acción, proceso, objeto y esquema. A continuación se describe cada una de ellas:

Acción: una acción es cualquier actividad mental o física que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Como resultado, las acciones tienden a ser algorítmicas por naturaleza y en forma externa (Clark et al., 1997). Aunque puede considerarse que una concepción acción es la construcción mental más elemental es importante aclarar que es necesaria para la comprensión de un concepto, debido a que las acciones son las que permiten realizar un primer contacto con los objetos matemáticos, y esto se logra a través de las experiencias del individuo al tratar con el objeto. Una acción es interiorizada por la repetición de la acción y el reflejo de la misma, esto es, la acción no se produce por alguna influencia externa, y en consecuencia se vuelve en una construcción interna llamada proceso.

Proceso: Decimos que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Sin embargo, un proceso también puede generarse por la coordinación o reversión de dos o más procesos; este mecanismo permite establecer relaciones entre los procesos (conectores lógicos) para determinar un nuevo proceso, ya sea realizando nuevas transformaciones o deshaciendo las secuencias de dichas transformaciones. Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto (Meel David E, 2003).

Objeto: Si un individuo puede reflexionar de manera más general sobre un proceso particular, y lo concibe como una totalidad y si puede efectuar transformaciones sobre el mismo, se dice que ha alcanzado una concepción objeto. Esto es, una vez encapsulado el proceso, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky et al., 1994). Esta etiqueta creada permite al individuo (estudiante) nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido; por lo tanto si el individuo es capaz de desencapsular el objeto y regresar al proceso que permitió llegar hasta él entonces podrá utilizar las características propias de la naturaleza del objeto para realizar nuevas transformaciones a partir de él.

Esquema: Según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema viene dada por la capacidad del individuo de determinar si se puede utilizar en el tratamiento de una situación matemática particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre esas estructuras, pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o utilizarse como una estructura dinámica que asimila otros objetos relacionados o esquemas. Los esquemas son entonces construcciones mentales que contienen la descripción, organización y ejemplificación de las estructuras mentales que un individuo ha construido en relación a un concepto matemático.

2.1.2. Mecanismos de construcción

Para desarrollar y realizar las construcciones mentales el grupo de investigadores RUMEC han caracterizado cinco clases de abstracción reflexiva, denominados *mecanismos de construcción*, estos son: la interiorización, la encapsulación, la coordinación, la desencapsulación y la reversión.

- Interiorización: es la construcción mental de un proceso vista como la traducción de una serie de acciones producto de las percepciones externas del individuo para construir procesos internos. Esto es, las acciones son interiorizadas en procesos.
- Coordinación: es el acto cognitivo de relacionar dos o más procesos y usarlos con el fin de construir un nuevo proceso. Piaget (1978), (citado por Dubinsky, 1991) usa “coordinaciones de acciones” para referirse a todas las

formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos (Bermúdez, 2011).

- Inversión: cuando el proceso se ha adquirido internamente, al sujeto le es posible deshacerlo, para construir un nuevo proceso original.
- Encapsulación: es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático que puede ser transformado por otras acciones o procesos. En tal caso se dice entonces que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo, Bermúdez (2011).
- Desencapsulación: es el proceso mental que consiste en regresar del objeto al proceso desde el cual fue encapsulado.
- Tematización: según Asiala et al. (1996), (citado por Bermúdez, 2011) "*es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como"un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto".* En relación con este mecanismo, Piaget y García (1982, p. 103), definen la tematización como: *"el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización"*.

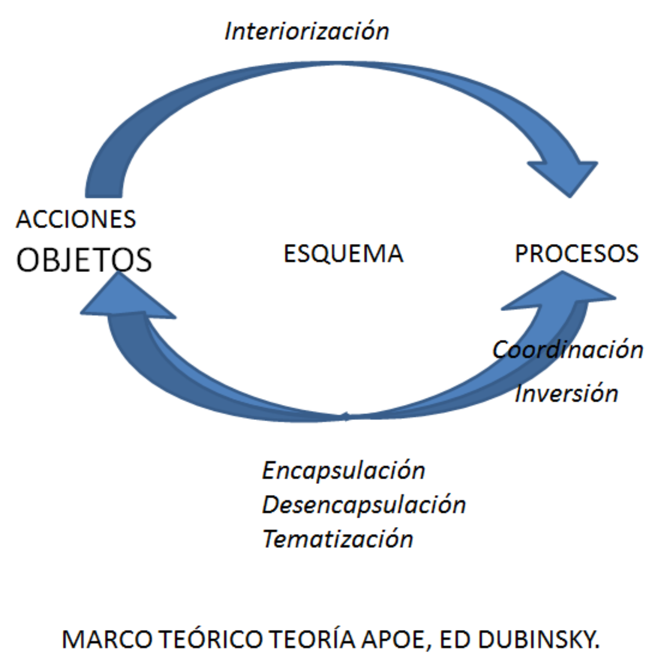


Figura 2. Marco Teórico de la Teoría APOE, Ed Dubinsky.

Hasta este punto se han expuesto dos de tres elementos fundamentales de la teoría APOE, las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un individuo realiza para comprender determinado concepto matemático. El tercer elemento es el que establece el vínculo entre las construcciones mentales y los mecanismos de construcción y se llama descomposición genética.

2.1.3 Descomposición Genética.

En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen en relieve las construcciones mentales que un estudiante puede requerir en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como *descomposición genética* del concepto. Los investigadores en principio plantean en base a su experiencia en el aula una descomposición genética del concepto a estudiar. Luego producto de la misma investigación se refina de modo que se dé cuenta de mejor manera de lo que se observa que hacen los estudiantes cuando trabajan con ese concepto.

Las descomposiciones genéticas pueden verse como una ruta estructurada de cómo se construyen los conceptos matemáticos en la mente de un individuo. Para Asiala et al (1996, p. 7), la descomposición genética de un concepto se define como el "*conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno*", otra idea sobre el significado de la descomposición genética es "la descomposición genética representa una vía posible en que un estudiante pueda lograr el desarrollo de una comprensión conceptual, así como una guía para el desarrollo de una actividad constructiva. En específico, la descomposición genética proporciona al maestro una trayectoria general que puede llevar al estudiante a construir una comprensión adecuada" (Meel, 2003, p. 268). Es importante aclarar que no puede hablarse de una única descomposición genética de un concepto, ya que ésta depende de la formulación que han hecho los investigadores, y por tanto pueden haber varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto (Trigueros, 2005, p.8).

La descomposición genética que se plantea con respecto a un concepto matemático en principio es preliminar, es decir es una descomposición que no ha sido validada y que ha sido diseñada basada en el análisis teórico de un concepto. Luego de desarrollar determinadas estrategias de enseñanza y aprendizaje, y realizar el análisis de los datos recogidos a través de algunos de los instrumentos de recolección que sugiere la teoría APOE en su marco metodológico, estos son: entrevistas, observaciones en clase, revisión de los libros de texto, juegos de computador, estudios epistemológicos e históricos, exámenes, (Arnon, et al, 2014, p.95), la descomposición genética es refinada, la cual debe incluir las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante realiza para aprender el concepto en cuestión.

2.1.4 Investigaciones en el marco de teoría APOE.

Las investigaciones encontradas que tienen como fundamento teórico APOE no están directamente relacionadas a la comprensión de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas, sin embargo fueron de gran ayuda, ya que en muchas de ellas se ilustraba el diseño de una descomposición genética. Las descomposiciones genéticas consultadas están relacionadas a conceptos del cálculo, del álgebra lineal, de álgebra abstracta y de lógica. La mayor parte de ellas han sido publicadas (véanse, por ejemplo, Dubinsky, 1986; Dubinsky et al., 1986, 1988, 1992; Vidakovic, 1994; Asiala et al., 1997a, 1997b; Trigueros, 2001; Oktac y Trigueros, 2004, entre otras) y muchas ya han pasado por un proceso de refinamiento.

2.2 MARCO CONCEPTUAL

Los conceptos y/o definiciones que se presentan en esta sección fueron escogidos por dos razones; la primera corresponde a que estos conceptos y/o definiciones son los que se utilizan en un curso usual de ED; la segunda es que en los libros de texto que generalmente se sugieren para el curso de ED, estos presentan dichas definiciones.

Los conceptos y/o definiciones matemáticas utilizadas para este trabajo son: razón de cambio, ecuación diferencial (orden y clasificación), ecuación diferencial lineal, modelo matemático y problemas de mezclas. Cada uno de los anteriores se explica a continuación:

2.2.1 Razón de Cambio.

Swokowski (1989, p.112) define la razón de cambio como sigue:

DEFINICIÓN 2.2.1.1 Sea $w = g(t)$, donde g es derivable y t representa el tiempo.

$i)$ La tasa (o razón) media de variación de $w = g(t)$ en el intervalo $[t, t+h]$ es

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

$ii)$ La tasa (o razón) de variación de $w = g(t)$ con respecto a t es

$$\frac{dw}{dt} = g'(t) = lim_{h\to 0} \ \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

Según $ii)$ de la definición 2.2.1.1, si la variable t cambia, entonces w cambia a razón de $\frac{dw}{dt}$ unidades por unidad de cambio de t. Por ejemplo, supóngase que se llena un vaso con agua, a medida que el tiempo pasa el volumen V de agua en el vaso aumenta, por lo tanto se puede afirmar que el volumen V es una función del tiempo t. La derivada $\frac{dV}{dt}$ es la tasa de variación (o razón de cambio) del volumen con respecto al tiempo.

2.2.2 Definición y clasificación de una ED.

Zill (2008, p.5) define una ecuación diferencial como sigue:

DEFINICIÓN 2.2.2.1 Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

En otras palabras, encontrar una función $y(x)$ representa el mismo problema que encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

A esto se le llama ecuación diferencial, ya que es una ecuación que involucra una función desconocida y que está siendo derivada. Algunos ejemplos son:

Ejemplo 1: Decaimiento Radioactivo: $\frac{dA}{dT} = kA$

La ecuación anterior significa que la velocidad $\frac{dA}{dt}$ con que el núcleo de una sustancia decae es proporcional a la cantidad (el número de núcleos) $A(t)$ de la sustancia remanente en el tiempo t.

Ejemplo 2: Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, T (temperatura) es una función de la variable independiente t (tiempo) y T_m (temperatura del ambiente) es una constante.

Ejemplo 3: $y' + 9x = 0$ donde y denota la diferenciación de y con respecto a x.

Ejemplo 4: $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} - y = 9$ donde y es una función de la variable independiente x.

Ejemplo 5: La ED $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$.

Las ED se pueden clasificar en dos tipos:

i. Si una ED contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO), ejemplos 1, 2, 3, 4.
ii. Una ecuación en la que se presentan las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se denomina ecuación diferencial parcial (EDP), ejemplo 5.

El orden de una ED viene dado por la derivada de mayor orden, cuyos coeficientes son diferentes de cero. Por ejemplo las ecuaciones de los ejemplos 1, 2 y 3 son de primer orden mientras que las ecuaciones de los ejemplos 4 y 5 son de segundo orden.

En esta propuesta se tienen en cuenta ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como modelos de problemas de mezclas.

DEFINICIÓN 2.2.2.2 (Zill, 2008, p.52). Se dice que una ecuación diferencial de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

es una ecuación lineal en la variable dependiente y.

Es pertinente mencionar que $a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ son funciones de la variable independientes x y que $a_0(x) \neq 0$. Si se divide a ambos lados de la ecuación $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ por $a_1(x)$ se obtiene la ecuación estándar de una ecuación lineal, esta es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

2.2.3 Modelo matemático.

Se sigue de Zill (2008, p.21) la definición de modelo matemático como:

DEFINICIÓN 2.2.3.1 Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico, o incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina modelo matemático, el cual se construye con ciertos objetivos en mente.

Por ejemplo, se quiere saber la cantidad de sal presente en un tanque que contiene cierta cantidad de fluido en un tiempo t cuando se bombea salmuera al tanque con igual velocidad a como se bombea la solución (perfectamente mezclada) hacia afuera.

La construcción de un modelo matemático de un sistema pasa por diferentes etapas, inicia con la identificación de las variables responsables del cambio que se produzca en el sistema, aunque no todas se tengan en cuenta en el modelo debido a que en condiciones ideales se pueda despreciar alguna. En este primer paso se especifica el nivel de resolución del modelo. A continuación, se formula un conjunto de premisas razonables o hipótesis acerca del sistema que intenta describir, teniendo en cuenta además cualquier ley empírica aplicable al sistema.

Debido a que las suposiciones que se plantean de un sistema con frecuencia implican una tasa de cambio de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones pueden implicar una o más ecuaciones que involucran derivadas. En el caso particular, en los problemas de mezclas, el modelo matemático es una ED o un sistema de ED. Una vez formulada la ED o si es el caso un sistema de ED, el paso a seguir es intentar resolverlo. Si se puede resolver, entonces se considera que el modelo es razonable siempre y cuando la solución encontrada sea consistente con los datos proporcionados por las condiciones del sistema Esta solución del sistema presenta lo que se conoce como estado del sistema. Desde luego, si los resultados dados por la solución no concuerdan con los datos proporcionados por las condiciones del sistema, se debe considerar replantear el modelo, incrementar la resolución del sistema o formular premisas alternativas sobre los elementos causantes del cambio en el sistema. Los pasos del proceso de modelación se muestran en el siguiente diagrama:

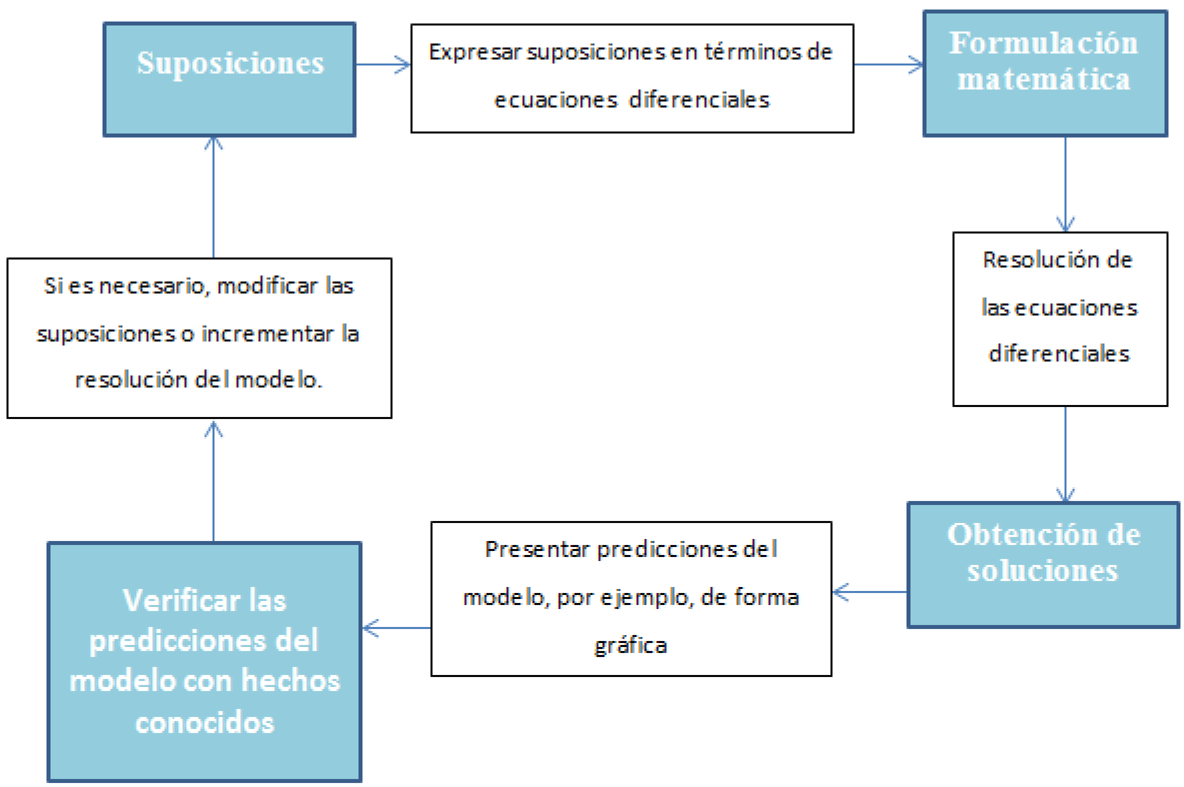


Figura 3. Pasos del proceso de modelación. Tomada de Zill (2008, p.21).

Es claro que incrementar la resolución implica que se eleve la complejidad del modelo matemático y aumente la probabilidad de que no sea posible obtener una solución explícita.

2.2.4 Problemas de mezclas.

Los problemas que se utilizan en este trabajo requieren encontrar la cantidad de una sustancia en cualquier instante de tiempo, teniendo en cuenta algunas consideraciones como las siguientes:

- La distribución uniforme de una sustancia adicionada a compuesto (o mezcla) se entenderá como la división en partes iguales de la sustancia en dicho compuesto (o mezcla), es decir por cada unidad de medida en el compuesto encontramos la misma cantidad de sustancia
- La sustancia que entra al "recipiente" es mezclada o distribuida uniformemente con otra sustancia que se encuentra en el "recipiente".
- La velocidad de entrada puede ser: (Caso 1) mayor, (Caso 2) menor o (caso 3) igual que la velocidad de salida de la solución.
- Se dan algunas condiciones iniciales que relacionan las variables que están íntimamente relacionadas en el problema, cantidad de sustancia y el tiempo.

Podemos separar un problema de mezclas en tres etapas que no necesariamente se dan en forma lineal, más bien en forma simultánea, estas etapas son:

- La primera etapa implica la entrada de un compuesto A (o mezcla) que contiene cierta sustancia, en un recipiente que contiene otro compuesto B (o mezcla).
- La segunda etapa implica la distribución uniforme del compuesto A en el compuesto B lo cual genera una mezcla C dicha mezcla tiene una cantidad igual de sustancia en cualquier lugar que se tome.
- La tercera etapa consiste en la salida de la mezcla C del recipiente.

Variación de la cantidad de concentración con respecto al tiempo	=	*Velocidad de entrada de concentración*	-	*Velocidad de salida de concentración*

esto es, en notación formal:

$$\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$$

Esta ED no varía en ninguno de los casos 1, 2 y 3, lo que cambia de un problema a otro es la función Volumen $V(t)$ que se encuentra implícita en la velocidad de salida de concentración v_{SC}.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Para la realización de este trabajo se contó con la participación de estudiantes de una Universidad Pública de la ciudad de Bogotá que inscribieron la asignatura de ED en el programa de Tecnología en Construcciones Civiles e Ingeniería Civil. El trabajo realizado con los estudiantes se desarrolló bajo los componentes planteados en el ciclo de investigación de la teoría APOE, el cual describimos en la siguiente sección.

3.1. TEORÍA APOE COMO MARCO METODOLÓGICO

La teoría APOE plantea un ciclo de investigación que involucra tres componentes (ver Fig. 4); análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y la recolección y análisis de datos. El componente relacionado con el análisis teórico implica la elaboración de una descomposición genética preliminar, la cual describe las construcciones mentales que deben realizar los estudiantes para comprender la EDLO1 que modela un problema de Mezclas. En el segundo componente se escogen ciertas actividades basadas en la descomposición genética preliminar, dichas actividades son la base del tercer componente; la recolección y análisis de datos.

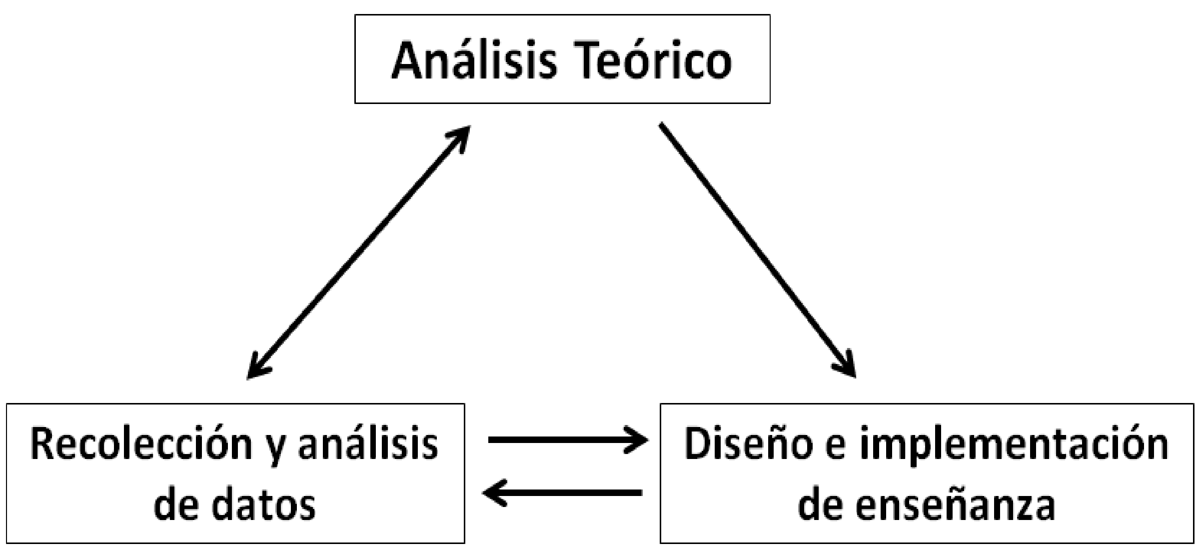


Figura 4. Ciclo de investigación (tomado y traducido de Arnon et al. 2014)

En relación a lo anterior este trabajo se dividió en 5 etapas:

1. Análisis teórico, el cual partió de la experiencia como docentes de la asignatura de ED por parte de los investigadores, también incluyó una revisión en los libros de texto de ED de la forma como se presenta la temática de los problemas de mezclas, y se realizaron reuniones con algunos pares y profesores en las que se expuso el objetivo de este trabajo y se recibieron aportes significativos. Lo anterior con el fin de elaborar una descomposición genética preliminar del concepto.
2. Diseño e implementación de enseñanza, el cual se realizó a partir de la descomposición genética preliminar, se seleccionaron y elaboraron algunos problemas y preguntas con el fin de revisar si las construcciones mentales que desarrollan los estudiantes se ajustan a las planteadas en la descomposición genética preliminar. Estos problemas y preguntas se estructuraron en una actividad desarrollada con el grupo de estudiantes que se mencionó al inicio de este capítulo.
3. Recolección de la información, la cual se realizó con base en algunos instrumentos que propone la teoría APOE, como las discusiones en clase y las pruebas escritas.
4. Análisis de la información, en el cual se revisaron los datos recolectados en las discusiones en clase y las pruebas escritas, tomando como referencia las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar.
5. Resultados, los cuales implican una descomposición genética que considera los resultados del análisis de la información. según el ciclo de investigación se obtienen con un nuevo análisis teórico que parte del análisis de la información

En las siguientes secciones se explica cómo se desarrollaron cada una de las etapas mencionadas.

3.1.1. Análisis teórico

El análisis teórico presentado a continuación se divide en tres secciones: La sección 3.1.1.1 donde se dan los prerrequisitos básicos que un estudiante debe tener para el entendimiento del concepto EDLO1 que modela un problema de mezclas, la sección 3.1.1.2 que presenta la descomposición genética preliminar de dicha ED, la cual es la base para el diseño y elaboración de actividades de enseñanza que permiten identificar las construcciones y mecanismos mentales propuestos en la DG y finalmente la sección 3.1.1.3 que se refiere a las construcciones mentales y mecanismos de construcción propuestos para la descomposición genética preliminar.

3.1.1.1. Prerrequisitos

Los prerrequisitos básicos que un estudiante debe tener cuando comienza un curso de ED y en particular para la comprensión del concepto EDLO1 que modela un problema de mezclas son:

- Interpretación de la derivada como una razón de cambio.
- Identificar la razón de cambio en una situación o contexto dado.
- Conocimiento e identificación de tipos de funciones reales (polinómicas, racionales, trigonométricas, etc.)
- Identificar relaciones funcionales expresadas en forma verbal y/o escrita.
- Realizar operaciones entre funciones reales, como: suma, resta, multiplicación, división, composición, etc.

3.1.1.2. Descomposición genética preliminar

Como se indicó en el capítulo 2, cuando se elabora una descomposición genética preliminar sobre determinado concepto matemático es fundamental la experiencia de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del mismo, además del conocimiento matemático y las investigaciones publicadas sobre él (Arnon et al. 2014). En relación a lo anterior, la descomposición genética preliminar que presentamos en este trabajo se basó en:

A. La forma inicial de resolver problemas de mezclas por parte de los investigadores y su experiencia como docentes del Curso de ED.

La experiencia como docentes del curso de ED, lleva a reflexionar sobre la forma como se comprende un concepto en la etapa de formación pregradual y la diferencia que hay cuando el concepto ha sido encapsulado. En el caso de la ecuación $\frac{dC}{dt} = v_{E.C} - v_{S.C}$,$\left(\frac{dC}{dt}\right)$ es la derivada de la concentración de sustancia con respecto al tiempo; $(v_{E.C})$ es la velocidad de entrada de la concentración; $(v_{S.C})$ es la velocidad de salida de la concentración. Se observó que un método práctico para los estudiantes implica tomar la ecuación y buscar valores para reemplazar, este es un ejercicio mecánico, incluso no es necesario saber el porqué de la igualdad. En otros casos se observó que algunos estudiantes utilizan la notación $\frac{dC}{dt}$ sin saber ésta que representa, ellos consideran que $\frac{dC}{dt}$ es el resultado de dividir la sustancia en otra variable como el volumen, tiempo, etc. y no la ven como una razón de cambio de la cantidad de sustancia con respecto al tiempo.

B. La revisión de diferentes libros de texto de ED (Zill y Kullen, 2008; Becerril y Elizarraraz, 2004; Edwards y Penney, 2009; Bronson y Costa, 2008; Nagle, Saff y Snider, 2005) que contenían problemas de mezclas en el apartado de modelos lineales.

Esta revisión se hace con dos propósitos diferentes, el primero implica analizar la forma como en los libros de texto se presenta la EDLO1 que modela un problema de mezclas; el segundo involucra los conceptos y definiciones que están inmersos en dicha ED y que toman un papel importante en la descomposición genética preliminar.

En relación al primer propósito, se encontró que en los libros de texto de ED por lo general se le proporciona al estudiante la ecuación diferencial para abordar un modelo lineal, es decir, tomamos como ejemplo en particular el libro de Zill y Kullen (2008), en este libro la EDLO1 que modela un problema de mezclas, se presenta inicialmente en la sección *ecuaciones diferenciales como modelos lineales*, en esa sección se muestra una breve descripción de diferentes modelos matemáticos (mezclas, decaimiento radioactivo, crecimiento exponencial, entre otros), en la que se encontró que solo se requirió de un párrafo de 10 renglones antes de presentar la ED que modela el problema de mezclas (Fig. 5);

Figura 1.19 Tanque de mezcla

Mezclas La mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden para la cantidad de sal contenida en la mezcla. Supongamos que un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque grande a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Observe la figura 1.19. Si $A(t)$ indica la cantidad de sal (medida en libras) que hay en el tanque en el momento t, entonces la velocidad a que $A(t)$ cambia será una tasa neta de:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Velocidad de} \\ \text{entrada de sal} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Velocidad de} \\ \text{salida de sal} \end{pmatrix} = R_{entrada} - R_{salida}. \qquad (7)$$

Figura 5. Presentación de la ED que modela un problema de mezclas

(Tomado de *Matemáticas avanzadas para ingeniería ecuaciones diferenciales,* Zill y Kullen, 2008)

Posteriormente el autor presenta la forma de obtener las velocidades de entrada y salida que hacen parte de la ED (Fig. 6), indicando los procesos que se deben realizar, donde se le da mayor relevancia a los algoritmos que a los conceptos que dan sentido a la ED.

La velocidad de entrada $R_{entrada}$ a la que ingresa la sal al tanque es el producto de la concentración de sal del flujo de entrada y la velocidad del fluido de entrada. Observe que $R_{entrada}$ se mide en libras por minuto

$$R_{entrada} = \underbrace{(2 \text{ lb/gal})}_{\substack{\text{Concentración de sal} \\ \text{del flujo de entrada}}} \cdot \underbrace{(3 \text{ gal/min})}_{\substack{\text{Velocidad de} \\ \text{entrada de salmuera}}} = \underbrace{(6 \text{ lb/min})}_{\substack{\text{Velocidad de} \\ \text{entrada de sal}}}$$

Ahora, como la solución está siendo bombeada hacia fuera del tanque a la misma velocidad a la que ingresa, la cantidad de galones de salmuera que hay dentro del tanque en el tiempo t es una constante de 300 galones. Por lo tanto, la concentración de sal dentro del tanque, así como en el flujo de salida, es $c(t) = A(t)/300$ lb/gal, y la velocidad de salida R_{salida} de sal es

$$R_{salida} = \underbrace{\left(\frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal}\right)}_{\substack{\text{Concentración de sal} \\ \text{del flujo de entrada}}} \cdot \underbrace{(3 \text{ gal/min})}_{\substack{\text{Velocidad de} \\ \text{entrada de salmuera}}} = \underbrace{\frac{A(t)}{100} \text{ lb/min}}_{\substack{\text{Velocidad de} \\ \text{entrada de sal}}}$$

Entonces, la velocidad neta (7) se convierte en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \text{o} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6. \qquad (8)$$

Figura 6. Presentación de la ED que modela un problema de mezclas (2)

(Tomado de *Matemáticas avanzadas para ingeniería ecuaciones diferenciales,* Zill y Kullen, 2008)

Finalmente el autor menciona que se pueden presentar tres casos diferentes, que corresponden a los mencionados en la sección 2.2.4 y con esto finaliza la presentación de este modelo matemático.

En otros libros como el de Becerril y Elizarraraz (2005) se muestra un breve proceso que se utiliza para obtener la ED que modela el tipo de problema dado, la cual es presentada al estudiante, convirtiendo de nuevo el modelo en una fórmula, paso siguiente, se utiliza esta fórmula para resolver un problema que se encuentra como ejemplo (Fig. 7), lo cual oculta los conceptos inmersos en la ED.

3.4 Mezclas

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas, en los cuales se supone que una sustancia S fluye hacia una mezcla en un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme sale del recipiente y pasa a otro. Nos interesa determinar la cantidad de la sustancia S presente en la mezcla para el tiempo t.

Si denotamos por $A(t)$ la cantidad de S al tiempo t, entonces la derivada $\frac{dA}{dt}$ es la razón de cambio de A con respecto a t. Si R_1 indica la razón, rapidez o tasa con la que S entra a la mezcla y R_2 representa la razón con la que sale, tenemos la ecuación diferencial lineal básica

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2,$$

de la cual determinaremos la cantidad $A(t)$ de S en el tiempo t. A continuación presentaremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Un gran tanque está parcialmente lleno con 200 gal de agua en las cuales se disuelven 20 lb de sal. Una salmuera que contiene 2 lb de sal por galón, se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
a) Halle el número de libras de sal en el tanque en cualquier tiempo.
b) ¿Cuánta sal está presente después de 30 min?

Figura 7. Problema de mezclas en libros de texto (3)

(Tomado de *Ecuaciones diferenciales-Técnicas de solución y aplicaciones,* Becerril y Elizarraraz, 2005)

El segundo propósito involucra los conceptos y definiciones que están inmersos en dicha ED y que toman un papel importante en la descomposición genética preliminar. Como se mencionó en la sección 2.2.3 la construcción de un modelo matemático inicia con la identificación de las variables responsables del cambio que se produzca en el sistema, por tal motivo se tomó la EDLO1 que se presentó en el ítem A de esta sección y se dividió en dos partes principales, la primera que corresponde a la razón de cambio y la segunda a las diferencias de velocidades de entrada y salida. En lo que corresponde a la razón de cambio, es necesario que el estudiante la interprete a partir de la derivada y utilice la notación de Leibniz $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ para representarla (Ver Definición 2.2.1.1) ya que esta muestra explícitamente la dependencia e independencia de variables. En relación a las diferencias de velocidades de entrada y salida de concentración de sustancia, cabe mencionar que generalmente la velocidad de entrada es una función constante, la cual el estudiante debe identificar si cumple con los prerrequisitos antes mencionados, mientras que la velocidad de salida es una función racional, dada por la función cantidad de sustancia $A(t)$ sobre la función volumen $V(t)$, ambas dependientes del tiempo.

C. Finalmente se buscaron publicaciones de investigaciones relacionadas con la comprensión de la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas.

En este caso cabe mencionar que en la bibliografía revisada no encontramos ninguna investigación asociada a problemas de mezclas, pero encontramos investigaciones asociadas a la comprensión de las ED (Dullius, 2009; Peña, García y Porras, 2011; Napoles et al., 2004) influenciadas en algunos casos por teorías de registros de representación semiótica, Teoría de las Situaciones Didácticas, Teoría socio-interaccionista de Vigotsky, etc., que coinciden en asociar una de las dificultades en el estudio de las ED a la prioridad que se da a los métodos de solucionarlas, los cuales son solo procesos algorítmicos que ocultan el concepto como tal.

La descomposición genética preliminar que se presenta en la figura 8 se propone como resultado del análisis que comprende los prerrequisitos que debe tener un estudiante al iniciar un curso de ED, nuestra experiencia docente, la revisión de la forma como los libros de texto presenta la EDLO1 que modela un problema de mezclas, y las investigaciones asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las ED (ver Sección 1.1.2).

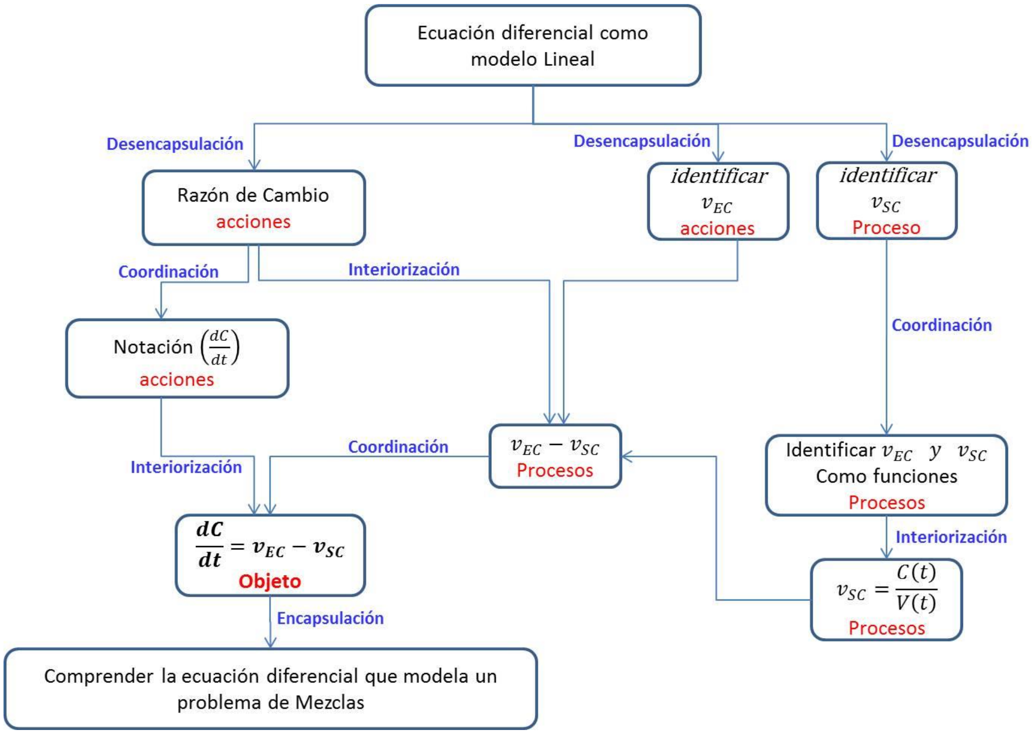


Figura 8. Descomposición genética preliminar

A continuación se presentan las construcciones mentales y mecanismos de construcción considerados en la descomposición genética preliminar, las cuales en principio permitieron establecer como un estudiante comprende la EDLO1 que modela un problema de mezclas.

3.1.1.3. Construcciones Mentales y mecanismos de construcción relacionados con la ED $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$

La descomposición genética preliminar presentada en la fig. 7 parte de la **desencapsulación** del concepto ecuación diferencial como modelo lineal en: la razón de cambio a la cual hace referencia dicha ecuación, la velocidad de entrada de concentración y la velocidad de salida. En relación a la razón de cambio, el estudiante debe realizar las acciones de identificar en el enunciado del problema la variable dependiente e independiente, así como establecer la relación entre las variables y expresarlas como una razón de cambio, lo anterior coordinado con el uso de la notación de Leibniz. Estas acciones se **interiorizan** para comprender la primera parte de la igualdad en la ecuación $\boldsymbol{\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}}$**,** y se complementan cuando se coordinan con la diferencia entre las velocidades de entrada y salida de concentración. La velocidad de entrada de concentración se considera una acción debido a que el estudiante solo requiere realizar una conversión para determinarla en el problema. Por lo contrario, identificar la velocidad de salida se considera un proceso que es coordinado con el proceso de identificar las velocidades de entrada y salida como funciones, posteriormente es interiorizado en un nuevo proceso que implica identificar las funciones ($C(t)\ y\ V(t)$) implícitas en la velocidad de salida de concentración, lo anterior permite que el estudiante comprenda cuales son los elementos que componen la ecuación diferencial $\boldsymbol{\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}}$**,** y que alcance el nivel de objeto.

Para continuar, se describen las construcciones mentales que se presentan en la comprensión de un problema de mezclas:

Acciones: Un estudiante se encuentra en un nivel de acción cuando:

a1) Identifica datos explícitos en el enunciado del problema, como por ejemplo la cantidad de líquido presente en el tanque, las velocidades de entrada y salida de líquido, la concentración de sustancia presente en cada unidad de líquido.

b1) Identifica la velocidad de entrada de sustancia en el enunciado del problema y la reemplaza en la ED: $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$, debido a que solo debe realizar una conversión a partir de la información dada en el enunciado. Por ejemplo, en el momento que un estudiante plantea la EDLO1 de un problema de mezclas, un primer acto podría implicar extraer la información que aparece en el enunciado del problema, como la velocidad de entrada de líquido y la concentración de sustancia presente en cada unidad de líquido, para obtener la velocidad de entrada de la concentración de sustancia y reemplazar esa información en la ecuación $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$, esta transformación establece un primer contacto con el objeto ecuación diferencial.

c1) Plantea la ED imitando los pasos realizados en el planteamiento de un problema anterior.

d1) Identifica la variable dependiente (concentración de sustancia) e independiente (tiempo) relacionadas en la razón de cambio y la escribe usando la notación de Leibniz.

A diferencia de la v_{EC}, la cual para el tipo de problemas que se están abordando en este trabajo siempre será constante (existen problemas en los que v_{EC}está dada por otro tipo de función), la v_{SC} es una función racional de la forma $k * \frac{C(t)}{V(t)}$ donde "k" es una constante que representa la razón a la que sale la mezcla; $C(t)$cantidad de sustancia en función del tiempo y $V(t)$ cantidad de volumen en función del tiempo. Con respecto a esta función racional se puede decir que un estudiante se encuentra en un nivel proceso cuando:

pa1) Realiza la división entre la cantidad sustancia y el volumen presente en cualquier instante de tiempo porque comprende que la definición de uniformidad posibilita encontrar la cantidad de sustancia presente en cada unidad de volumen.

pb1) Da tratamiento de función a la v_{EC}y v_{CS}. Ejemplo, la $v_{SC} = k * \frac{C(t)}{V(t)}$ es una función que depende del tiempo, pero además depende de la cantidad de concentración y el volumen en un tiempo determinado, por lo tanto el estudiante debe comprender que no hay una regla aritmética que permita conocer esa concentración, porque desconoce la función $C(t)$, lo cual es trivial mencionar, ya que si la conociera no sería necesario solucionar la ED, pero a pesar de esto se ha observado que algunos estudiantes si creen que pueden conseguir esa concentración en determinado instante de tiempo mediante alguna operación básica como regla de tres u otro tipo de algoritmo.

pc1) Identifica las funciones que componen la v_{SC} , y reconoce la función $V(t)$para cualquier comportamiento de las velocidades de entrada y salida de la mezcla (revisar sección 2.2.3.1).
Por ejemplo, cuando las velocidades de entrada y salida de mezcla son iguales, el volumen es una función constante, y no requiere ningún tipo de cálculo para ser hallado, ya que es un dato dado en el problema, pero cuando las velocidades de entrada y salida de mezcla son diferentes, el volumen aumenta o disminuye de forma lineal, por lo anterior, cuando el estudiante ha interiorizado $V(t)$ como una función que depende del tiempo no debería tener problema para establecer lav_{SC}.

pd1) Plantea la diferencia de velocidades v_{EC}y v_{SC} para hallar la velocidad con que cambia la cantidad de concentración en cualquier instante de tiempo.

Finalmente cuando el estudiante logra interiorizar, coordinar y encapsular las acciones y procesos mencionados en la ED: $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$ se considera que se encuentra en un nivel de comprensión objeto. En este trabajo no tendremos en cuenta el mecanismo de construcción tematización debido a que el alcance según la descomposición genética propuesta es un nivel de comprensión objeto con respecto a la EDLO1 y el mecanismo de tematización posibilita que se logre adquirir un nivel de comprensión esquema, el cual exige un dominio no sólo del objeto EDLO1 sino de otros objetos.

3.1.2. Técnicas de recolección de información

Según Arnon et al. (2014) este trabajo se ubica en la categoría de estudios sobre el nivel de desarrollo cognitivo, ya que el objetivo es observar el poder descriptivo y predictivo de la descomposición genética preliminar planteada en la sección 3.2.1. Según lo propuesto por la teoría APOE se han considerado como técnica para la recolección de la información, las grabaciones de audio, de discusiones en clase y una prueba escrita.

Con el objetivo de generar discusión en clase se plantearon actividades desarrolladas en dos sesiones diferentes, a continuación se explica la intención y el contenido de dichas actividades:

Con el fin de comprobar si los estudiantes identifican las variables que implican razón de cambio en un problema de mezclas, así como las velocidades de entrada y salida de sustancia, se entregó a cada estudiante 5 problemas de mezclas (Ver anexo 1) y se solicitó resaltar con color rojo (o lápiz) la información que permite encontrar la velocidad de entrada y salida de sustancia y con color verde (o lapicero) la información asociada a una razón de cambio (en caso de estar implícitamente, se solicitó escribir a que la relaciona).

I. Se elaboraron dos problemas (Ver anexo 2) con el objetivo de que el estudiante identificara las velocidades de entrada y salida en situaciones en las que no se presentaba una mezcla. Por ejemplo:
   El gobierno de Colombia entrega un presupuesto de 96.000.000 para ser distribuido como un subsidio a personas de la tercera edad y madres cabezas de hogar en una jornada especial que se realizará en un solo día permitiendo el ingreso desde las 8:00 am y cerrando la entrada a las 4:00 pm en la Plaza de Bolívar (todas las persona que se encontraban dentro de la Plaza al cerrar fueron atendidas), la Plaza se empezó a llenar con las personas que cumplían los requisitos, los cuales ingresaron a una razón aproximada de 150 personas por hora. Si el personal encargado de la jornada atendía a las personas de tal forma que estas salían después de recibir el subsidio a una razón de 100 personas por hora, responde lo siguiente:

   a) ¿Con qué velocidad aumentaba la cantidad de personas en la plaza?

   b) ¿A qué hora se desocupo la plaza?

   c) ¿Cuántas personas fueron atendidas durante la jornada?

   d) ¿Qué cantidad de dinero le correspondió a cada persona que recibió el subsidio si este fue distribuido uniformemente?

e) ¿En qué momento se encontraba la mayor cantidad de personas en la plaza?

II. El primer objetivo de la tercera actividad era que el estudiante relacionara la razón de cambio con la diferencia de velocidades de entrada y salida en situaciones en las que se presentan entrada y salida no necesariamente de una mezcla o líquido (ver anexo 3).
El segundo objetivo era usar la función volumen $V(t)$en situaciones en las que se presentaba entrada y salida de líquido en un recipiente, ya que es una situación que puede presentarse en un problema de mezclas. Además se plantearon las velocidades en unidades de medida diferentes para revisar cómo desarrollaban los estudiantes dichas conversiones.
Por ejemplo: En un hotel el tanque de almacenamiento se llena (aproximadamente) a una velocidad de 20 L/min y cada hora se gastan aproximadamente 1 m^3 ¿Con velocidad cambia la cantidad de agua en el tanque? Si la capacidad del tanque es para 10.000 Litros, ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el tanque? ¿Con qué expresión se puede representar la velocidad con la que cambia la cantidad de agua en el tanque?

III. En la cuarta actividad se plantearon preguntas para generar la discusión en clase en relación a cómo los estudiantes identifican la función cantidad de sustancia $C(t)$ que es solución de la ecuación diferencial, además se plantearon preguntas que buscaban generar abstracción reflexiva en cuanto a la continuidad de la mezcla uniforme, es decir, cuando un estudiante halla un valor específico de concentración de sustancia que sale del tanque mediante una operación o algoritmo básico, se ha observado que esto sería posible solo al pausar el ingreso de concentración, distribuir la concentración uniformemente y calcular cuánta concentración hay por unidad de medida del volumen, lo cual no coincide con el planteamiento de un problema de mezclas. Algunas preguntas planteadas (las demás se

pueden ver en el anexo 4) fueron las siguientes:
La cantidad de sustancia que hay en el tanque ¿es una constante, una función, un parámetro o puede ser cualquiera de las anteriores? ¿Cuándo es constante la cantidad de sustancia que sale después de mezclarse? ¿Se puede dar un valor fijo para la cantidad de sustancia en determinado instante de tiempo?

3.1.2.1. Discusiones en clase

Las actividades mencionadas en la sección anterior se desarrollaron en clase con los estudiantes, y las respuestas eran dadas de forma oral y escrita. En mayor parte las respuestas no eran dadas de forma unánime lo que permitía abrir la discusión en clase y además saber por qué el estudiante dio esa respuesta, es decir, tenían la oportunidad de explicar cuál fue el proceso realizado para llegar a responder correcta o incorrectamente.

Estas clases fueron grabadas en audio, el cual se utilizó como instrumento de recolección de información que reemplaza la entrevista, esto debido a que se puede cuestionar a los estudiantes en el momento que participan de la discusión y es más probable que mencionen el porqué de lo que están pensando en ese momento. Consideramos que después de presentar una prueba escrita y entrevistar al estudiante pueden suceder ciertos factores que influyen o sesgan su respuesta en la entrevista, como por ejemplo, si el estudiante encuentra posteriormente la solución o resuelve el ejercicio e identifica sus errores, en el momento de responder las preguntas realizadas para identificar si se han hecho las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética.

3.1.2.2. Prueba escrita

Este instrumento de recolección de la información fue utilizado al finalizar las discusiones en clase, con el fin de revisar si en las diferentes rutas o estrategias que ellos escribían se evidencian las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar, para esto se pidió resolver uno de los ejercicios planteados en la actividad I, para determinar cuáles son las construcciones mentales de los estudiantes que plantean la ED.

3.2. ANÁLISIS DE DATOS

Este análisis se desarrolló en relación a las construcciones mentales presentadas en la descomposición genética preliminar (sección 3.1.1.2), iniciando por el audio de las discusiones en clase, después se analizaron los resultados de la prueba escrita y finalmente se revisaron los pasos propuestos por los estudiantes para plantear la EDLO1 que modela un problema de mezclas.

3.2.1. Análisis Discusiones en clase

Para analizar las discusiones en clase, se contó con la participación de 9 de los 14 estudiantes que se encontraban inscritos en un curso de ED, los 9 participantes eran los que asistían regularmente a clase. Se elaboró una tabla que presenta en la primera columna cada uno de los elementos mencionados en la descomposición genética preliminar, y en la segunda la relación de cada uno de estos con las intervenciones realizadas por los estudiantes.

Elementos de la descomposición genética	Relación con la intervención de los estudiantes
IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES Y CONSTANTES	Algunos estudiantes identifican las variables presentes en un problema pero en el momento de relacionarlas no establecen su dependencia e independencia. Los estudiantes encuentran las variables y constantes dadas de forma explícita como es el caso de las velocidades de entrada y salida de líquido (constantes), pero cuando deben identificar las variables implícitas como por ejemplo la velocidad de salida de concentración, no tienen el mismo rendimiento.
VELOCIDAD DE ENTRADA DE LA CONCENTRACIÓN	La asumen como una constante dada implícitamente en los datos del problema. La cual hallan mediante una conversión de unidades. Los estudiantes comprenden que la velocidad de entrada de la sustancia es el producto de la velocidad de entrada de líquido por la concentración de sustancia.
CONCENTRACIÓN EN EL TANQUE	Algunos estudiantes consideran que si las velocidades de entrada y salida de líquido son iguales entonces la concentración en el tanque es constante
VELOCIDAD DE	Algunos estudiantes consideran que es posible que salga una concentración constante

SALIDA DE LA CONCENTRACIÓN	de mezcla, debido a una inadecuada interpretación del fenómeno físico. En un problema de mezclas en el que se dió velocidad de entrada de concentración de forma explícita y se preguntó a los estudiantes cuánta sal estaba saliendo en un tiempo específico, ellos calcularon la concentración de la forma $k * \frac{m}{V(t)}$;donde k es la razón de salida de líquido, m es una constante que representa la cantidad de sustancia y $V(t)$ es la función volumen.
VELOCIDAD DE ENTRADA Y SALIDA DE LÍQUIDO	Las velocidades de entrada y salida de líquido son utilizadas por los estudiantes para hallar la velocidad de entrada y salida de concentración. De otra parte se aclara que al ser datos dados de forma explícita en el problema solo requieren de acciones para identificarlas.
UNIFORMIDAD	Los estudiantes al realizar una distribución uniforme asignan la misma cantidad de concentración por unidad de medida, y según lo observado comprenden que el cociente que se espera es el resultado de $\frac{C(t)}{V(t)}$.
IDENTIFICACIÓN DE RAZONES DE CAMBIO	Algunos estudiantes consideran que la razón de cambio en un problema de mezclas no es la velocidad con la que cambia la concentración de sustancia con respecto al tiempo $\left(\frac{dC}{dt}\right)$, la pueden confundir con un dato numérico dado en el enunciado del problema, como la concentración de la sustancia. Otros plantean razones que implican la variación de la cantidad de sustancia con respecto a la cantidad de líquido o el volúmen del líquido con mezcla con respecto al tiempo. La razón de cambio en un problema que implica velocidades de entrada y salida no precisamente de líquido, permite que interpreten dicha razón de cambio como la diferencia entre las velocidades de entrada y salida.
FUNCIÓN VOLUMEN	Hallar la función volumen cuando esta no es constante implica un proceso de abstracción, que según lo observado inicialmente no comprenden la mayor parte de los estudiantes. En el segundo ejercicio de la actividad III un estudiante considero una razón de cambio del volumen con respecto al tiempo $\frac{dV}{dt}$y planteó una ED y encontró una función para hallar el volumen en cualquier problema que implica velocidades de entrada y salida,

Tabla 1.Análisis de las discusiones en clase

3.2.2. Análisis de la prueba escrita

La prueba escrita implicaba la solución del siguiente problema de mezclas:

En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado *t* = 0 algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0.04 gr/m^3 de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el aire con humo a la misma velocidad. Establecer y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de humo en la habitación.

El análisis de la prueba se realizó en relación a los mismos elementos que se tuvieron en cuenta en el análisis de los audios. A continuación presentamos los resultados encontrados en la prueba escrita correspondientes a las acciones y procesos que se pueden identificar en las respuestas dadas por los estudiantes.

IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES Y CONSTANTES

De acuerdo a la descomposición genética preliminar, las variables y constantes propuestas a identificar en las acciones, son las velocidades de entrada y salida de concentración. Sin embargo de las pruebas escritas se encontraron registros que permiten observar que los estudiantes descomponen cada una de estas, como se puede apreciar en la figura 8. Lo anterior es identificado por los investigadores como acciones a incluir en la descomposición genética que se presenta en el próximo capitulo.

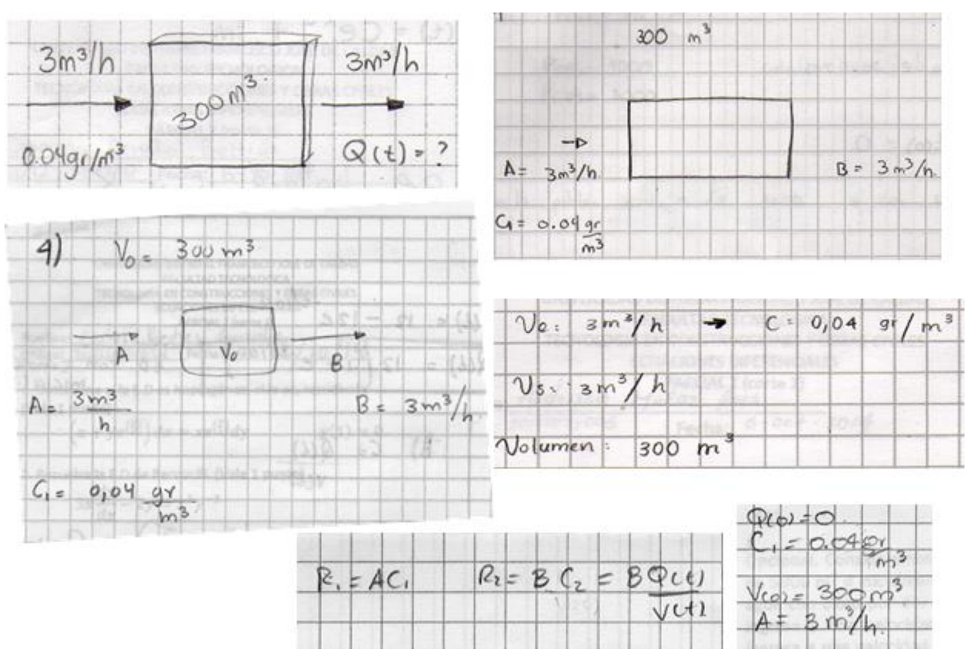


Figura 9. Identificación de variables en la prueba escrita

VELOCIDAD DE ENTRADA DE LA CONCENTRACIÓN, CONCENTRACIÓN EN EL TANQUE Y VELOCIDAD DE ENTRADA Y SALIDA DE LÍQUIDO

En relación a estos tres elementos de la descomposición genética preliminar, solo se puede mencionar después de revisar las pruebas escritas, que al ser datos explícitos que se dan en el enunciado del problema todos los estudiantes los identificaron, lo cual permite concluir que los estudiantes realizan las acciones propuestas en la descomposición genética preliminar.

VELOCIDAD DE SALIDA DE LA CONCENTRACIÓN

Según las descomposición genética preliminar uno de los procesos fundamentales para alcanzar la comprensión del objeto EDLO1 que modela un problema de mezclas, implica identificar las funciones que componen la v_{SC}. En las pruebas escritas se pudo validar que la mayoría de los estudiantes desarrollaron este proceso (Ver figura 9) y que al desarrollar este proceso plantearon de forma correcta la EDLO1 que modela el problema de la prueba.

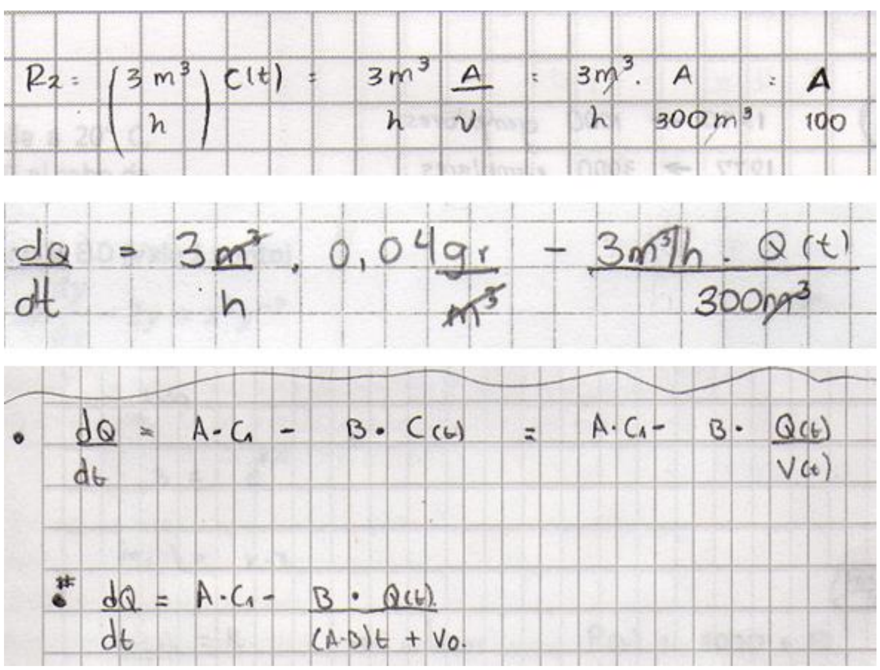
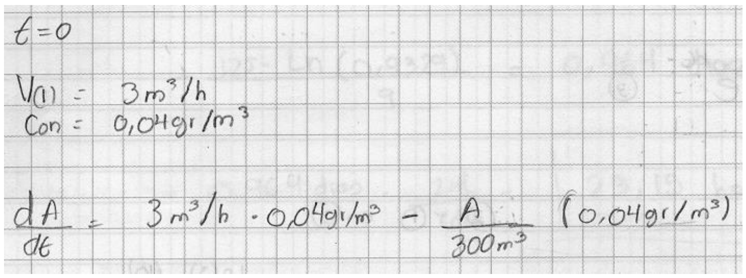


Figura 10. Identificación de velocidad de salida de la concentración en la prueba escrita

Otros estudiantes evidencian que aún se encuentran en un nivel de acciones, por ejemplo cuando plantean la ED imitando los pasos realizados en el planteamiento de un problema anterior, la dificultad se presenta cuando olvida parte de los pasos, ya que puede cometer errores como el que se muestra en la figura 10, en el que no multiplicó $\frac{C(t)}{V(t)}$ por la velocidad de salida de líquido, sino por la concentración de entrada de sustancia.



$t=0$

$V(1) = 3m^3/h$

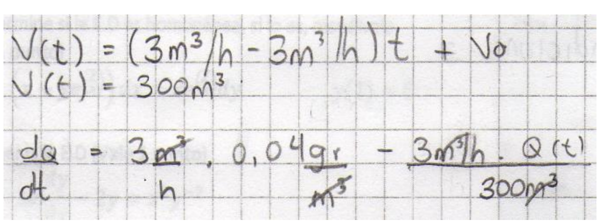
$Con = 0{,}04gr/m^3$

$$\frac{dA}{dt} = 3m^3/h \cdot 0{,}04gr/m^3 - \frac{A}{300m^3}(0{,}04gr/m^3)$$

Figura 11. Error al hallar la velocidad de salida de la concentración

FUNCIÓN VOLUMEN

Las evidencias que se encontraron en las pruebas escritas en relación a la función volumen indican que algunos estudiantes deducen la función volumen de forma directa (Ver figura 11), sin embargo hay estudiantes que consideran la razón de cambio $\frac{dV}{dt}$y la expresan en términos de una ED $\frac{dV}{dt} = A - B$ (donde A y B representan las velocidades de entrada y salida de la mezcla), la cual resuelven para hallar la función volumen (ver figura 12). Otros estudiantes solo colocan el valor del volumen ya que en el ejercicio propuesto es constante, sin utilizar alguna de las opciones mencionadas anteriormente.

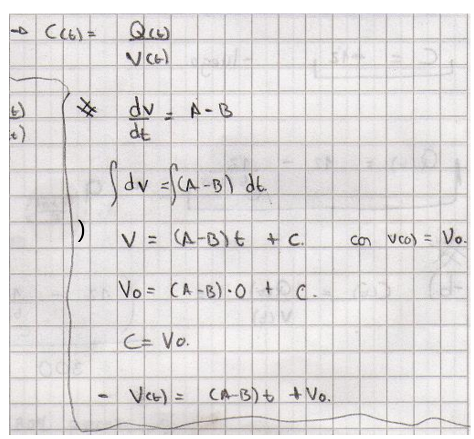


$V(t) = (3m^3/h - 3m^3/h)t + Vo$

$V(t) = 300m^3$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{3m^3}{h} \cdot 0{,}04\frac{gr}{m^3} - \frac{3m^3/h \cdot Q(t)}{300m^3}$$

Figura 12. Función Volumen (1)



$C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$

$\frac{dv}{dt} = A - B$

$\int dv = \int (A-B)\, dt$

$V = (A-B)t + C$ con $V(0) = Vo$

$Vo = (A-B) \cdot 0 + C$

$C = Vo$

$V(t) = (A-B)t + Vo$

Figura 13. Función Volumen (2)

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Finalizado el análisis de la información, se presenta en este capítulo la descomposición genética que se propone para el objeto EDLO1 que modela un problema de mezclas $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$. Primero se presenta un nuevo proceso que se incluirá en la descomposición genética, la razón por la que se hace énfasis en ese nuevo proceso es porque se considera fundamental para determinar un nivel de comprensión objeto.

4.1. PROPUESTA DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA EDLO1 QUE MODELA UN PROBLEMA DE MEZCLAS.

A partir de los fundamentos teóricos, la metodología sugerida por APOE y el análisis de la información recogida a través de los instrumentos mencionados en la sección 3.1.2, se propone una descomposición genética refinada que atiende a las observaciones dadas por el análisis de la descomposición genética preliminar y que responde a la pregunta de investigación ¿Cómo comprenden los estudiantes la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas?

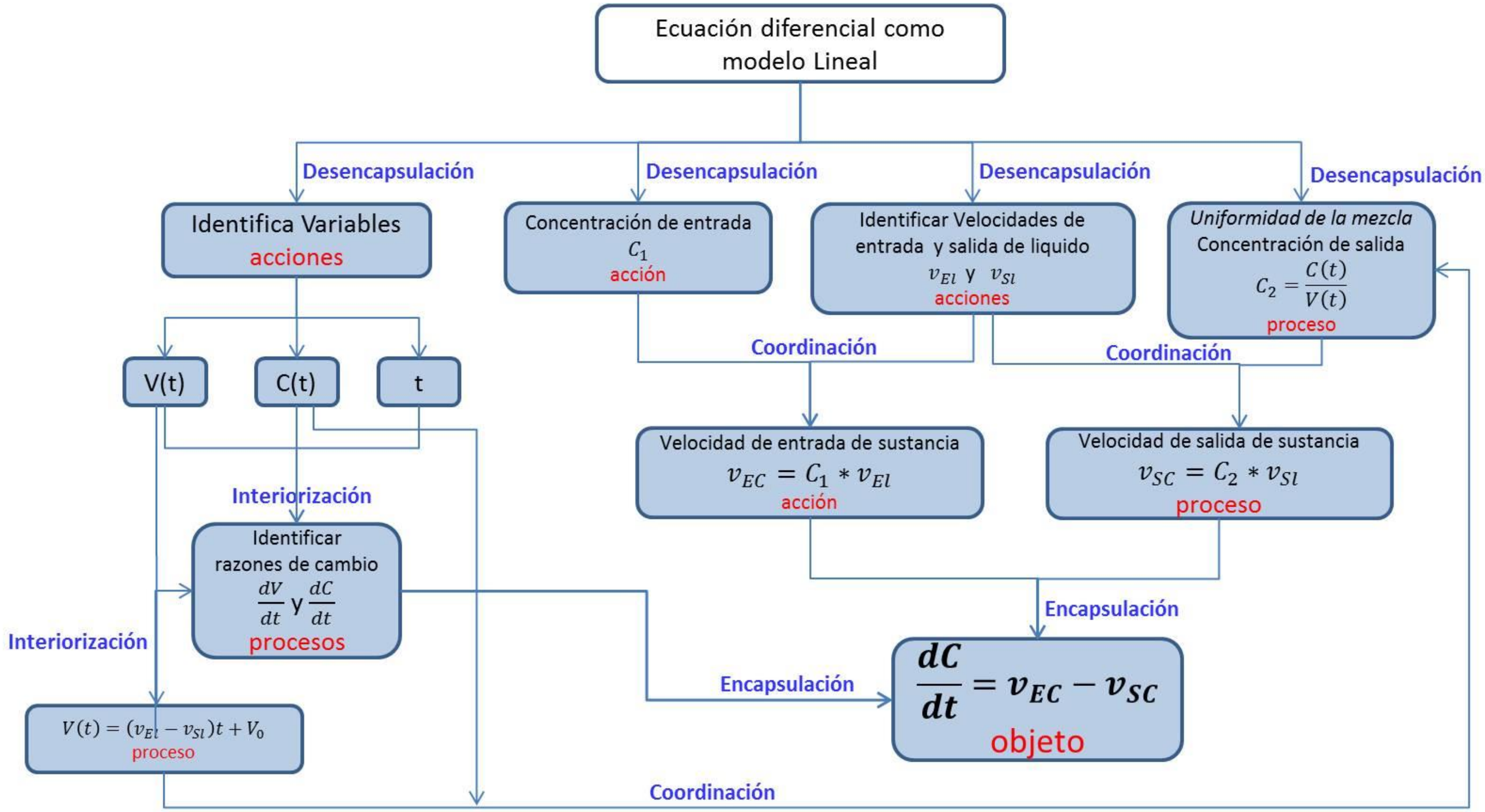


Figura 14. Descomposición Genética de la EDLO1 que modela un problema de mezclas $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$

De acuerdo con la descomposición genética preliminar y las construcciones mentales expuestas en la sección 3.1.1. y finalizado el análisis de la información recolectada, se incluyen nuevas acciones y procesos que no se habían tenido en cuenta, y como se evidencia, son fundamentales en la comprensión de la EDLO1 que modela un problema de mezclas. A continuación se exponen las construcciones mentales y los mecanismos de construcción involucrados en la Descomposición Genética Final.

4.1.1. Construcciones mentales y Mecanismos de construcción.

La descomposición genética presentada en la figura 13, al igual que la descomposición genética preliminar parte del concepto de modelo lineal y de los problemas de mezclas. Después de analizar los audios y las pruebas escritas se encontró que los estudiantes si desarrollan construcciones mentales como las mencionadas en la sección 3.1.1.3., pero además se encontraron otras construcciones mentales que no fueron tenidas en cuenta en la descomposición genética preliminar, las cuales se evidencian al comparar las figuras 7 y 13. En seguida se describe cada una de las construcciones indicadas en la figura 13.

Acciones: Un estudiante se encuentra en un nivel de acción cuando:

aa) Identifica las constantes dadas en el enunciado del problema, como la concentración de entrada y velocidades de entrada y salida de líquido. Según el análisis teórico de la prueba escrita, la primera acción que se evidencia implica extraer la información que aparece en el enunciado del problema (Ver sección 3.4.2. Identificación de variables y constantes) antes de escribir la ED que modela el problema para reemplazar los datos.

ab) Identifica las variables del problema, como volumen $V(t)$, concentración $C(t)$ y tiempo (t), implicadas en la razón de cambio. Se señalan solo estas variables a pesar de que en un problema de mezclas la velocidad de salida de la concentración v_{SC} también lo es. Según el análisis realizado, para considerar la v_{SC}, el estudiante debe estar en un nivel de comprensión proceso.

ac) Calcula la velocidad de entrada de concentración, mediante conversión de unidades y la reemplaza en la ED $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$. En particular se puede decir que aplica el algoritmo $v_{EC} = C_1 * v_{El}$.

En los audios se evidenció que los estudiantes hacían de forma adecuada la conversión de unidades, lo cual se validó con la prueba escrita, en la que se puede observar que los estudiantes hallaron correctamente v_{SC}.

ad) Plantea la ED imitando los pasos realizados en el planteamiento de un problema anterior.

En relación a esta acción se evidenció que el estudiante depende la capacidad de memorizar, ya que al no comprender el objeto, si olvida alguno de los pasos realizados en un problema antes visto, no puede avanzar o lo hace de forma incorrecta a pesar de que sabe que la ED que modela el problema es $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$.

Después de realizar el análisis se deduce que gran parte de los procesos implicados en la comprensión de la ED que modela un problema de mezclas están directamente relacionados con la v_{SC}, que como se mencionó en la sección 3.1.1.2 es una función racional de la forma $k * \frac{C(t)}{V(t)}$. Relacionar esta función con la v_{SC} e identificar las funciones que la componen son los principales procesos que se presentan a continuación.

Un estudiante se encuentra en un nivel proceso cuando:

pa) Establece la dependencia e independencia de las variables identificadas en la acción (ab).

pb) Escribe las razones de cambio implícitas en el problema de mezclas utilizando la notación de Leibniz $\left(\frac{dV}{dt}\ y\ \frac{dC}{dt}\right)$.

pc) Interpreta la uniformidad de la mezcla como igual cantidad de concentración por unidad de medida y la expresa como la función $C_2 = \frac{C(t)}{V(t)}$.

pd) Da tratamiento de función a la v_{EC} y v_{SC}.

Como se mencionó en el proceso (pb1), la $v_{SC} = k * \frac{C(t)}{V(t)}$ es una función que depende del tiempo, pero además depende de la cantidad de concentración y el volumen.

pe) Reconoce que para cualquier problema de mezclas (que se han definido en este trabajo) la función volumen está dada por $V(t) = (A - B)t + V_0$, la cual es resultado de la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$,donde A y B representan las velocidades de entrada y salida de la mezcla (Ver sección 4.1.)

pf) Iguala $\frac{dC}{dt}$a la diferencia de velocidades v_{EC}y v_{SC} para hallar la velocidad con que cambia la cantidad de concentración en cualquier instante de tiempo.

A continuación se presenta la forma como se relacionan las construcciones mentales y los mecanismos de construcción para comprender el objeto EDLO1 que modela un problema de mezclas:

1. Se desencapsula la ecuación diferencial como modelo lineal en:
    - Un conjunto de variables que deben ser identificadas en un problema de mezclas dado.
    - La concentración de entrada de sustancia.
    - Las velocidades de entrada y salida de líquido.
    - La uniformidad de la mezcla, asociada al cociente de funciones que permite hallar la concentración de salida.
2. Coordinación entre la acción de identificar las variables del problema (ab), implicadas en la razón de cambio y el proceso de establecer la dependencia e independencia de las variables identificadas (pa) para obtener el proceso de escribir las razones de cambio (pb) implícitas en el

problema de mezclas utilizando la notación de Leibniz $\left(\frac{dV}{dt}\ y\ \frac{dC}{dt}\right)$ y comprendiendo su significado.

3. Coordina la acción de calcular la velocidad de entrada de concentración (ac), con la acción que implica Identificar las velocidades de entrada y salida de líquido (aa) mediante conversión de unidades aplicando el algoritmo $v_{EC} = C_1 * v_{El}$

4. Coordina la acción que implica Identificar las velocidades de entrada y salida de líquido (aa) con el proceso de interpretar la uniformidad de la mezcla como igual cantidad de concentración por unidad de medida (pc) que expresa como $\frac{C(t)}{V(t)}$, para finalmente obtener la v_{SC}.

5. Interioriza la acción en la que identifica la variable volumen (ab) para alcanzar el proceso de comprender que la función volumen está dada por $V(t) = (A - B)t + V_0$, la cual es resultado de la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$,donde A y B representan las velocidades de entrada y salida de la mezcla (pe).

6. Coordina el proceso de dar tratamiento de función a la concentración de salida (pc) con el proceso de reconocer que para un problema de mezclas la función volumen está dada por $V(t) = (A - B)t + V_0$ (pe).

7. Finalmente cuando el estudiante escribe las razones de cambio utilizando la notación de Leibniz y comprende qué significado tiene dicha notación en relación al problema de mezclas e iguala $\frac{dC}{dt}$ a la diferencia de velocidades v_{EC} y v_{SC} (según los mecanismos mencionados anteriormente), para hallar la velocidad con que cambia la cantidad de concentración en cualquier instante de tiempo, se concluye que ha encapsulado el objeto ED $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$ que modela un problema de mezclas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Algunos temas incluidos en el curso de ED se convierten en aplicación de algoritmos que ocultan la complejidad e importancia de un objeto matemático. La descomposición genética presentada en este trabajo evidencia que un objeto matemático por muy “simple” que parezca o que algunos libros de texto presenten de forma trivial, implica un conjunto de construcciones mentales y mecanismos de construcción que los estudiantes requieren desarrollar para lograr su comprensión, como es el caso de la ED $\frac{dC}{dt} = v_{EC} - v_{SC}$.

En los libros de texto revisados no se presenta de forma explícita la razón de cambio $\frac{dV}{dt}$, en el momento de solucionar un problema de mezclas, pero como se mencionó en el análisis de los audios y la prueba escrita algunos estudiantes no solo deducen la función volumen de forma directa sino que plantean una ecuación diferencial, porque comprenden que la razón de cambio $\frac{dV}{dt}$, es igual a la diferencia entre la velocidad de entrada y velocidad de salida de mezcla, lo que permite escribir la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$, cuya solución para los problemas de mezclas definidos en este trabajo es $V(t) = (A - B)t + V_0$ donde V_0 (Volumen inicial) es la constante de integración que se halla con la condición inicial $V(0) = V_0$. En relación a lo anterior, se sugiere en un curso de ED en el que se trabajen problemas de mezclas presentar la función $V(t)$ como la solución de la ED $\frac{dV}{dt} = A - B$.

Cuando se elaboró la descomposición genética preliminar no se incluyó alguna forma en particular para hallar la función $V(t)$, aunque uno de los procesos implicaba reconocer la función $V(t)$ para cualquier comportamiento de las velocidades de entrada y salida de la mezcla, dicha forma de hallar $V(t)$ sí se incluye en la descomposición genética presentada en los resultados de este trabajo, gracias al análisis de las discusiones en clase y a la participación de los estudiantes, porque fueron ellos quienes evidenciaron ese proceso. El comentario anterior se hace para mencionar que identificar y utilizar las construcciones mentales que hacen los estudiantes al comprender un concepto, son estrategias que pueden mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos, y de esta forma intentar un cambio en la enseñanza tradicional de las ED, la cual como menciona Alvarenga (2006) solo se basa en las construcciones mentales que presenta el profesor del curso.

La metodología utilizada permitió a los investigadores detectar que el modelo predice las construcciones de los estudiantes e invitamos a otros investigadores a utilizarlo para flexibilizar y completar el modelo

El diseño de las actividades desarrolladas para generar discusiones en clase permitió que los estudiantes expresaran lo que ellos estaban pensando en ese momento acerca de los conceptos relacionados con la EDLO1 que modela un problema de mezclas. Es por esto que sugerimos el método de recolección de información relacionado con la grabación de las discusiones en clase, en el que se cuestiona al estudiante en cada una de las respuestas que plantean a las actividades seleccionadas, porque este instrumento de recolección de información puede ser visto como una opción diferente a la entrevista. Este planteamiento queda abierto a discusión, y podría ser estudiada su asertividad desde otros fundamentos o marcos teóricos diferentes a los presentados en este trabajo.

Se sugiere que se propicie la discusión en clase como una manera de fomentar la abstracción reflexiva; reflexión sobre acciones y sobre los procesos.

Se sugiere también tener presente que uno de los fines últimos es verificar si los estudiantes han aprendido o no y no debemos sesgarnos a observar si se les pueden atribuir a los estudiantes la ausencia de ciertas construcciones.

Se considera que este trabajo puede ser la base de futuras investigaciones que quieran ampliar los problemas de mezclas que son modelados por una EDLO1 a problemas que cuya solución implica el planteamiento de un sistema de ED.

REFERENCIAS

Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios. (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, 2, 1 – 32.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students` Graphical Understanding of the Derivative, Journal of Mathematical Behavior, 16, 3, 1- 32.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer New York.

Becerril Espinosa, J. V., & Elizarraraz Martínez, D. (2004). Ecuaciones diferenciales: técnicas de solución y aplicaciones.

Bermúdez, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario. (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Bronson, R., & Costa, G. B. (2008). *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill.

Clark, J., Cordero, F., Com-ill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. Journal for Mathematical Behavior, 16(4), 345 - 364.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.

Dubinsky, Ed. (2000 a). De la Investigación en Matemática Teórica a la Investigación en Matemática Educativa: un viaje personal. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 3 (1), 47 – 70.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, 273-280.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera. Pearson Educación.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6(3), 221 - 271.

Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2005). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Pearson Educación.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., & Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Acta Scientiae,6 , 41-59

Peña, M. A. L., García, S. F., & Porras, S. T. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. 4ºCongreso Internacional de Investigación CIPITECH 2011. *ÁREA 6: MATEMÁTICAS Y FÍSICA*.

Piaget, J.; García, R. (1982). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática. Educativa a Nivel Superior. Educación matemática, 17, (1), 5-31.

Zill Dennis & Cullen Michael. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.

ANEXOS

Anexo 1

Entenderemos en los ejercicios que utilizaremos como ejemplo la **Distribución uniforme** de una sustancia adicionada a un compuesto (o mezcla) como la división en partes iguales de la sustancia en dicho compuesto (o mezcla), es decir por cada unidad de medida en el compuesto encontramos la misma cantidad de sustancia.

Podemos separar un problema de mezclas en tres etapas:

- La primera etapa implica la entrada de un compuesto A (o mezcla) que contiene cierta sustancia, en un recipiente que contiene otro compuesto B (o mezcla).
- La segunda etapa implica la distribución uniforme del compuesto A en el compuesto B lo cual genera una mezcla C dicha mezcla tiene una cantidad igual de sustancia en cualquier lugar que se tome.
- La tercera etapa consiste en la salida de la mezcla C del recipiente

I. Resalte con color rojo (o lápiz) la información que permite encontrar la velocidad de entrada y salida y con color verde (o lapicero) la información asociada a una razón de cambio (en caso de estar implícitamente, escriba a que la relaciona)

1. Un depósito contiene 100 litros de una disolución salina cuya concentración es de 2.5 gramos de sal por litro. Una disolución conteniendo 2 gramos de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se hace uniformemente) sale a la misma velocidad. Encontrar la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito.

2. Se considera un tanque que contiene 1000 L. de agua, dentro del cual una disolución de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 L/min. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 5 L/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra es de 1 kg/L, determinar la concentración de sal en el tanque en cada instante.

3. Un tanque contiene 200 Litros de Agua en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera que contiene un gramo de sal por litro se bombea hacia el depósito a una velocidad de 4L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia afuera a la misma velocidad. Encuentre el número A(t) de gramos de sal presentes en el tanque en el tiempo t.

4. La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/s y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen de líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de 0.2 gr/cm^3, ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en cada instante si inicialmente no había rastro alguno del medicamento?

5. En una habitación que contiene 300 m^3 de aire limpio se va a celebrar una fiesta. En un instante dado $t = 0$ algunas personas comienzan a fumar, de modo que el humo empieza a invadir la habitación a una velocidad de 3 m^3/h, conteniendo una concentración de 0.04 gr/m^3 de monóxido de carbono. Al mismo tiempo, abrimos una ventana por la que sale el aire con humo a la misma velocidad. Establecer y resolver una ecuación diferencial para la cantidad de humo $y(t)$ en la habitación.

Anexo 2

II. El objetivo de los siguientes problemas es identificar las velocidades de entrada y salida en situaciones en las que estas sean las variables a considerar, y finalmente en un problema de mezclas.

El gobierno de Colombia entrega un presupuesto de 96.000.000 para ser distribuido como un subsidio a personas de la tercera edad y madres cabezas de hogar en una jornada especial que se realizará en un solo día permitiendo el ingreso desde las 8:00 am y cerrando la entrada a las 4:00 pm en la plaza de bolívar, la plaza se empezó a llenar con las personas que cumplían los requisitos, los cuales ingresaron a una razón aproximada de 150 personas por hora.
Si el personal encargado de la jornada atendía a las personas de tal forma que estas salían después de recibir el subsidio a una razón de 100 personas por hora, responde lo siguiente:

a) Con que velocidad aumentaban la cantidad de personas en la plaza
b) A qué hora se desocupo la plaza
c) Cuantas personas fueron atendidas durante la jornada
d) Que cantidad de dinero le correspondió a cada persona que recibió el subsidio si este fue distribuido uniformemente
e) En qué momento se encontraba la mayor cantidad de personas en la plaza

En una institución de educación superior semestralmente se matriculan aproximadamente 2350 estudiantes nuevos y a su vez semestralmente se gradúan aproximadamente (en promedio) 1200 estudiantes, si al finalizar el segundo semestre del año 2011 la universidad contaba con 7000 estudiantes:

a) Con que velocidad aumenta la cantidad de estudiantes en la universidad
b) ¿si la infraestructura de la universidad está diseñada para recibir máximo 13900, en cuanto tiempo no se podrán recibir más estudiantes?

Anexo 3

III. Responda las preguntas:

1. En la cuenta bancaria de una empresa los movimientos muestran que mensualmente los ingresos promedio son de $ 23.000.000 M/C y que sus egresos promedio son de $ 15.000.000 M/C.

    - ¿Con que velocidad cambia la cantidad de dinero en la cuenta?
    - ¿En promedio cuánto ha aumentado el dinero de la cuenta en 4 meses?
    - Escriba una fórmula para encontrar con que velocidad cambia la cantidad de dinero en la cuenta

2. En un hotel el tanque de almacenamiento se llena (aproximadamente) a una velocidad de $20\frac{L}{min}$ y cada hora se gastan aproximadamente $1m^3$ ¿Con velocidad cambia la cantidad de agua en el tanque?

    - Si la capacidad del tanque es para 10.000 Litros, ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse el tanque?
    - La velocidad con la que cambia la cantidad de agua en el tanque se puede representar como…?

Anexo 4

IV. En un problema de mezclas:

La cantidad de sustancia que hay en el tanque ¿es una constante, una función, un parámetro, puede ser cualquiera de las anteriores?

¿Cuándo la cantidad de sustancia que sale después de mezclarse es constante?

Se puede dar un valor fijo para la cantidad de sustancia en determinado instante de tiempo.

Si es una función, ¿de qué depende?

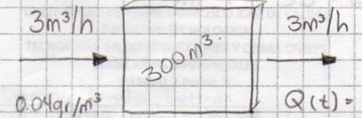
Un depósito contiene 100 litros de agua. Una disolución conteniendo 0.2 Libras de sal por litro entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la mezcla (que se hace uniformemente) sale a la misma velocidad. ¿Si en un minuto entro una libra de sal cuanta sal está saliendo al cumplirse ese minuto de tiempo?

¿Qué sucede cuando las velocidades de entrada y salida son diferentes, o cuando son iguales?, ¿aumenta o disminuye la cantidad de sustancia?. Analice cada caso por separado

Anexo 5

Pruebas escritas de los estudiantes

4.



$0{,}0002\,\frac{gr}{m^3} = \frac{x}{300m^3}$

Condición inicial $t = 0$ $Q = 0$
$Q(0) = 0$

$V(t) = (3m^3/h - 3m^3/h)t + V_0$
$V(t) = 300m^3$

$\frac{dQ}{dt} = \frac{3m^3}{h} \cdot 0{,}04\frac{gr}{m^3} - \frac{3m^3/h \cdot Q(t)}{300m^3}$

$\frac{dQ}{dt} = 0{,}12 - \frac{Q}{0{,}01}$

$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0{,}01} = 0{,}12$

$\frac{dQ}{dt} e^{\frac{t}{0{,}01}} + \frac{Q}{0{,}01} e^{\frac{t}{0{,}01}} = 0{,}12 e^{\frac{t}{0{,}01}}$

Factor Integrante $e^{\int \frac{1}{0{,}01} dt} = e^{\frac{t}{0{,}01}}$

$\frac{d[e^{\frac{t}{0{,}01}} \cdot Q]}{dt} = \int 0{,}12\, e^{\frac{t}{0{,}01}}$

$e^{\frac{t}{0{,}01}} \cdot Q = 0{,}12 \int e^{\frac{t}{0{,}01}} dt$

$e^{\frac{t}{0{,}01}} \cdot Q = 0{,}12 \cdot \frac{e^{100t}}{100} + C$

$e^{100t} \cdot Q = 0{,}0012\, e^{100t} + C$ $\quad (\cdot\, e^{-100t})$

Multiplico a ambos lados de la ecuación por e^{-100t}.

$Q(t) = 0{,}0012 + Ce^{-100t}$

Reemplazo la condición inicial $Q(0) = 0$

$0 = 0{,}0012 + C\, e^{-100(0)}$
$0 = 0{,}0012 + C\, e^{0}$
$0 = 0{,}0012 + C \cdot 1$
$C = -0{,}0012$

a) $Q(t) = 0{,}0012 - 0{,}0012\, e^{-100t}$

$0{,}0002\,\frac{gr}{m^3} = \frac{x}{300m^3}$

$0{,}0002\,\frac{gr}{m^3} \cdot 300m^3 = x$

$x = 0{,}06$

$0{,}06 = 0{,}0012 - 0{,}0012\, e^{-100t}$
$0{,}0588 = -0{,}0012\, e^{-100t}$
$\frac{0{,}0588}{-0{,}0012} = e^{-100t}$
$-49 = e^{-100t}$

$0{,}0002 = 0{,}0012 - 0{,}0012\, e^{-100t}$
$\ln 0{,}83333 = -100t$
b) $t = 1{,}8232 \times 10^{-3}$

$\int e^{\frac{t}{0{,}01}} dt$ Solución de la integral.

$u = \frac{t}{0{,}01}$
$0{,}01u = t$
$0{,}01\,du = dt$

$\int e^{u} \cdot 0{,}01\,du$

$0{,}01 \int e^{u} du = 0{,}01 e^{u} + C$

4.-)

$300\ m^3$

a.-) Cantidad de humo en la habitación

b.) Cuando deberá una persona abandonar la fiesta considerando que es peligroso con una cantidad de $0.0002\,gr/m^3$

$A = 3m^3/h$ $\qquad$ $B = 3m^3/h$

$C_1 = 0.04 \dfrac{gr}{m^3}$

$$\frac{dQ}{dt} = R_1 - R_2 \qquad R_1 = A \cdot C_1 \qquad \to C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$$
$$R_2 = B \cdot C(t)$$

$$\bullet\ \frac{dQ}{dt} = A \cdot C_1 - B \cdot C(t) = A \cdot C_1 - B \cdot \frac{Q(t)}{V(t)}$$

$$* \quad \frac{dV}{dt} = A - B$$

$$\int dV = \int (A-B)\, dt$$

$$V = (A-B)t + C. \qquad \text{con } V(0) = V_0.$$

$$V_0 = (A-B) \cdot 0 + C.$$

$$C = V_0.$$

$$- \ V(t) = (A-B)t + V_0.$$

$$* \ \frac{dQ}{dt} = A \cdot C_1 - \frac{B \cdot Q(t)}{(A-B)t + V_0}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 3 \cdot 0.04 - \frac{3 \cdot Q(t)}{(3-3)t + V_0}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.12 - \frac{3\,Q(t)}{V_0} \qquad * \text{ Con } V_0 = 300\,m^3.$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.12 - \frac{3\,Q(t)}{300} = 0.12 - \frac{Q(t)}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{100} = 0.12$$

$$P(x) = \frac{1}{100} \leadsto \text{luego.} \quad \int \frac{1}{100}\, dt = \frac{t}{100}$$

$$\text{factor integrante} = e^{\frac{t}{100}}$$

$$\frac{dQ}{dt} \cdot e^{t/100} + \frac{Q(t)}{100} e^{t/100} = 0.12\, e^{t/100}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Q(t) \cdot e^{t/100}\right) = 0.12\, e^{t/100}$$

$$Q(t) \cdot e^{t/100} = \int 0.12 \cdot e^{t/100}\, dt. \qquad \text{si } v = t/100$$
$$100\, dv = dt.$$

$$Q(t) \cdot e^{t/100} = 0.12 \cdot \int e^{v} \cdot 100\, dv$$

$$\frac{dA}{dt} = AC_1 - \frac{BA}{V(t)}$$

(4) $V_0 = 300\ m^3$

$V(t) = (A - B)\,t + V_0$

$A_1 = 3\ m^3/h$

$3\ m^3/h \cdot 0{,}04\ gr/m^3 = 0{,}12\ \frac{gr}{h}$

$C_1 = 0{,}04\,gr/m^3$

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}12 - \frac{3A}{300}$$

$V(t) = 300\ m^3$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 0{,}12$$

$$e^{\frac{1}{100}\int dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

$$e^{\frac{t}{100}}\frac{dA}{dt} + e^{\frac{t}{100}}\frac{A}{100} = e^{\frac{t}{100}}\,0{,}12$$

$$\int \frac{d\left[e^{\frac{t}{100}}A\right]}{dt} = \int e^{\frac{t}{100}}\,0{,}12$$

$$e^{\frac{t}{100}}A = 12e^{\frac{t}{100}} + C$$

$t_0 = 0$

$$A = 12 + Ce^{-\frac{t}{100}}$$

$$0 = 12 + C \qquad C = -12$$

$$A = 12 - 12e^{-\frac{t}{100}}$$

$$0{,}0002 = 12 - 12e^{-\frac{t}{100}}$$

$$+0{,}999 = e^{-\frac{t}{100}}$$

$$\ln|0{,}9999| = \frac{-t}{100}$$

$t \approx 0{,}001666$ horas

4

$V_e = 3m^3/h \rightarrow C = 0{,}04\ gr/m^3$

$V_s = 3m^3/h$

Volumen: $300\ m^3$

$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ con: $R_1 = \left(\frac{3m^3}{h}\right)\left(\frac{0.04\ gr}{m^3}\right) = 0.12\ \frac{g}{h}$

$R_2 = \left(\frac{3m^3}{h}\right) C(t) = \frac{3m^3}{h}\,\frac{A}{V} = \frac{3m^3}{h}\cdot\frac{A}{300m^3} = \frac{A}{100}$

luego: $\frac{dA}{dt} = 0.12 - \frac{A}{100}$

$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 0.12$ $\qquad F.I = e^{\int \left(\frac{1}{100}\right)dt} = e^{\frac{t}{100}}$

multiplicando por el factor integrante:

$\left(\frac{dA}{dt}\right)\left(e^{t/100}\right) + \left(\frac{A}{100}\right)\left(e^{t/100}\right) = 0.12\ e^{\left(t/100\right)}$

$\frac{d}{dt}\left[A\cdot e^{t/100}\right] = 0.12\ e^{(t/100)}$

$A\cdot e^{t/100} = \int 0.12\ e^{(t/100)}\ dt$

$A\cdot e^{(t/100)} = (0.12\ e^{t/100})(100)$

$A\cdot e^{(t/100)} = 12\ e^{t/100} + C$

$A = 12 + \frac{C}{e^{t/100}}$ $\qquad$ Con $A(0) = 0$

$0 = 12 + \frac{C}{e^{(0/100)}} \longrightarrow 0 = 12 + C$

$-12 = C$

Quedando la ecuación para hallar la cantidad de humo en cualquier instante de tiempo:

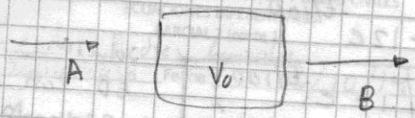
$A = 12 - 12\ e^{(-t/100)}$

Ahora, se tiene que $C = \frac{A}{V}$

$C = 12 - 12\ e^{(-t/100)}$, entonces, $C(t) = 0{,}0002$

4) $V_0 = 300\,m^3$

$Q_{(0)} = 0$



$V(t) = V_0$ cte

$V(t) = 300\,m^3$

$A = \frac{3m^3}{h}$

$B = 3m^3/h$

$\frac{dQ(t)}{dt} = R_1 - R_2$

$C_1 = 0{,}04 \frac{gr}{m^3}$

$R_2 = B \cdot \frac{Q(t)}{V(t)}$

$R_1 = A \cdot C_1$

Variación de la cantid[ad] de soluto con respecto al tiempo.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = A\,C_1 - B\,\frac{Q(t)}{V(t)}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 3(0{,}04) - \cancel{3}\,\frac{Q(t)}{\cancel{300}}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0{,}12 - \frac{Q(t)}{100}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{100}Q(t) = 0{,}12$$

Factor integrante $= e^{\int \frac{1}{100}dt}$

$= e^{\frac{1}{100}t}$

$$\int \frac{d\left[e^{\frac{t}{100}} \cdot Q(t)\right]}{dt} = \int 0{,}12\, e^{\frac{t}{100}} \quad dt$$

$$e^{\frac{t}{100}} Q(t) = 0{,}12 \int e^{t/100}\,dt$$

$U = \frac{t}{100}$

$du = \frac{1}{100}\,dt$

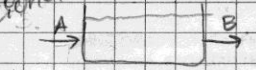
$dt = 100\,du$

$$= 12 \int e^{u}\,du$$

$$= 12\,e^{u} + c$$

$$Q(t) = \frac{12\,e^{t/100} + c}{e^{t/100}}$$

opcional



$A_T = A_1 + A_2$

$A_T = A = 144 + 216$

$A = 360\, m^3/\text{día}\left(\frac{\text{día}}{24h}\right) = 15 m^3/h.$

$C_1 = 20 \frac{gr}{m^3}$

$V_{(0)} = 5000 m^3.$

$C_1 = 20 g/m^3$

$B = 15 m^3/h.$

$V(t) = (A - B)t + V_0.$

$V(t) = 5000 m^3$

$Q(0) = 0$

$$\frac{dQ}{dt} = 300 - \frac{15\, Q(t)}{5000}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 300 - \frac{3}{1000} Q(t).$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{3}{1000} Q(t) = 300.$$

$$e^{\frac{3}{1000}\int dt} = e^{\frac{3t}{1000}}$$

$$\frac{d\left[e^{\frac{3t}{1000}} \cdot Q(t)\right]}{dt} = 300 \int e^{3t/1000}$$

$$e^{3t/1000}\, Q(t) = 100000\, e^{3t/1000} + C.$$

$$Q(t) = 100000 + Ce^{-3t/1000}$$

$$0 = 100000 + Ce^{-3(0)/1000}$$

$$C = -100000$$

a) $\boxed{Q(t) = 100000 - 100000 e^{-3t/1000}}$

b) $Q(48 \text{horas}) = 100000 - 100000 e^{-3(48)/1000}$

$Q(48) \approx 13411$ gr

$Q_0 = 13411$ gr

$$\frac{13411}{2} = 100000 - 100000 e^{-3t/1000}$$

$$6701 \approx 100000 - 100000 e^{-3t/1000}$$

$$100000 e^{-3t/1000} \approx 15$$

$$6667 \approx e^{3t/1000}$$

$$\ln|6667| = \frac{3t}{1000}$$

c). $\boxed{t = 2935\, h}$

4.

$R_1 = AC_1 \qquad R_2 = B\,C_2 = B\frac{Q(t)}{V(t)}$

$V(t) = (A - B)t + V_0$

$V(t) = 300 m^3$

$Q(0) = 0.$

$C_1 = 0.04 \frac{gr}{m^3}$

$V_{(0)} = 300 m^3$

$A = 3 m^3/h.$

$$\frac{dQ}{dt} = R_1 - R_2.$$

$$\frac{dQ}{dt} = AC_1 - B\frac{Q(t)}{V(0)} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 12 - \frac{3\,Q(t)}{300}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{100} Q(t) = 12. \rightarrow e^{\frac{1}{100}\int dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

$$\frac{d\left[e^{t/100} \cdot Q(t)\right]}{dt} = 12 e^{t/100} \Rightarrow e^{t/100}\, Q(t) = 12 \int e^{(t/100)} dt.$$

$$e^{t/100}\, Q(t) = 1200\, e^{t/100} + C.$$

$$Q(t) = 1200 + Ce^{-t/100}$$

$$0 = 1200 + Ce^{0/100}$$

$$C = -1200.$$

a) $\boxed{Q(t) = 1200 - 1200 e^{-t/100}}$

si $R_1 = 6\times10^{-4} \rightarrow C_1' = 0.0002\, gr/m^3$, entonces debería abandonar la habitación en $t=0$, ya que $C_1 \gg C_1'$, es decir, $0.04 \gg 0.0001$.

si $Q(t) = 6\times10^{-4} - 6\times10^{-4} e^{-t/100}$, si $t=0$.

$Q(0) = 0.$

$\frac{37}{15} + 20 = (22{,}26)t - 20$ $\underline{2{,}46 + 20}$

$\frac{\frac{37}{15} + 20}{22{,}26} = t$

$t = 3{,}36$

4) Volumen $300\ m^3$

$t = 0$

$V(1) = 3\ m^3/h$
Con $= 0{,}04\ gr/m^3$

$\frac{dA}{dt} = 3\ m^3/h \cdot 0{,}04\ gr/m^3 - \frac{A}{300\ m^3}\ (0{,}04\ gr/m^3)$

$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{25} - \frac{A}{300}\ (0{,}04\ gr/m^3$

$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{25} - \frac{A}{7500}$

$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{7500\,t} = \frac{3}{25}$

$FI = \left| e^{1/7500 \int dt} \right|$

$e^{1/7500\,t^2} \cdot A = \frac{3}{25} \int e^{1/7500} + c$

$A = \frac{-900\ e^{1/7500\,t} + C}{e^{-1/7500\,t}}$

$A = 900 + C\ e^{-1/7500\,t}$

$0 = 900 + C\ e^{(0)}$

$C = -900$

$0{,}0002\ gr/m^3 = 900 + 900\ e^{-1/7500\,(t)}$

$\frac{0{,}0002\ gr/m^3 + 900}{-900} = e$

$2 = t$

Rta: la muerte se produjo 2 horas antes que el teniente Morales encontrara el cuerpo.

4.) $3\,m^3/h \times 0{,}04\,gr/m^3 = 0{,}12\,gr/h$ aumenta la concentración de CO_2

$300\,m^3 - \left(\frac{1}{100}\right)$

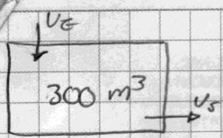
$300 - \frac{1}{100}$

$299{,}99 = m$

$V_{(t)} = 0{,}01t - 3$ → Volumen aire contaminado

$0{,}0002 = ((0{,}01t) - (3))\ 0{,}12$

$0{,}0002 = 1{,}2 \times 10^{-3} t - 0{,}36$



$t=0$
$A(t)=0$

$V_e = 3\ m^3/h \quad ; \quad 0{,}04\ gr/m^3$

$V_s = 3\ m^3/h$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3}{300} = (3 \cdot 0{,}04)$$

$$e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{t/100}$$

$$\frac{d\left[A(t)\, e^{t/100}\right]}{dt} = 0{,}12\, e^{t/100} - \frac{1}{100}$$

$$\int d[A(t)] = \int \left(0{,}12 - \frac{1}{100}\, e^{-t/100}\right) dt$$

$$A(t) = 0{,}12t + \frac{100}{100}\, e^{-t/100} + C \qquad \therefore \quad t=0, \; A(0)=0$$

$$0 = 0 + 1 + C$$

$$C = -1$$

$$\therefore \quad A(t) = 0{,}12t + e^{-t/100} - 1 \qquad A = 2 \times 10^{-4}$$

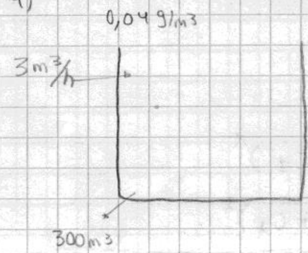
$$2 \times 10^{-4} = 0{,}12t + e^{-t/100}$$

0,00348

$$\left(\frac{\ln 14/15}{60}\right)$$

UNA TEMPERATURA DE 35°C

4)



$$\frac{dA}{dt} = \left(3\,\frac{m^3}{h} * 0{,}04\,\frac{g}{m^3}\right) - \frac{A(t)}{300\,m^3}\;3\,m^3/h$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A(t)}{100} = 0{,}12$$

$$e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

$$\frac{d\left[e^{\frac{t}{100}}\,A(t)\right]}{dt} = 0{,}12\int e^{\frac{t}{100}}\,dt \qquad u = \frac{t}{100}$$

$$du = 0{,}01\,dt \qquad \frac{du}{0{,}01} = dt$$

$$e^{\frac{t}{100}}\,A(t) = \frac{0{,}12}{0{,}01}\int e^{u}\,du$$

$$e^{\frac{t}{100}}\,A(t) = 12e^{\frac{t}{100}} + C$$

$$A(t) = 12 + Ce^{-t/100}$$

$$A(0) = 0$$

$$0 = 12 + Ce^{0}$$

$$C = -12$$

a) $\boxed{A(t) = 12 - 12e^{-t/100}}$

b) $2 * 10^{-4} = 12 - 12e^{-t/100}$

$$\frac{(2 * 10^{-4}) - 12}{-12} = e^{-t/100}$$

$$-100\,\ln\frac{-11{,}9998}{-12} = t \qquad \boxed{t = 1{,}666 * 10^{-3}}$$