El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Segona part]

Gert Schubring

Resum

Aquesta segona part de l'article fa èmfasi en els autors que, d'alguna manera o altra, han adoptat un llenguatge més simbòlic en el tractament del concepte de límit. La presentació, com és natural, segueix l'ordre cronològic i posa l'èmfasi en aquelles parts que són deutores dels autors precedents i d'aquelles altres que són innovadores.

Abstract

This second part of the article does emphasis in the authors that, by some means or other, have adopted a more symbolic language in the treatment of the concept of limit. The presentation, how is natural, follows the chronological order and puts the emphasis in those parts that are debtors of the authors precedents and of those other that are innovative.

1. Stockler

El text de Stockler presenta el primer intent d'aproximació a una elaboració algebraica del concepte de límit i, en conseqüència, és d'un gran interès sistemàtic. Fou escrit a Portugal, a la perifèria de l'Europa matemàtica d'aquell temps. El llibre és, a més, un cas excepcional per l'efecte de mestratge especialitzat que provocà enfortint la reflexió sobre els fonaments de la matemàtica. L'autor pertanyia, de fet, a la primera promoció d'estudiants graduats d'estudis especialitzats en matemàtiques de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Coïmbra, que havien estat reformats en 1772, i en fou un dels estudiants més excel·lents. Francisco Borja Gração Stockler (1759-1829) és conegut com a autor de la primera presentació de la història de la matemàtica a Portugal (1819). La importància d'aquest text encara no ha estat prou reconeguda ni apreciada.

El seu volum de cent pàgines *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões* fou publicat per l'Acadèmia de Ciències de Lisboa en 1794. Stockler segueix molts dels seus predecessors en argumentar que el mètode dels límits es trobava ja a la base dels grecs, i d'una manera particular en Arquimedes. Tanmateix no l'explicitaren. Els geòmetres moderns havien generalitzat la idea de límit, però alhora havien introduït els conceptes imperfectes i repel·lents («imperfeitas, repugnantes») d'*Infinitos* i *Infinitesimos* (Stockler 1794, IV) per tal d'evitar els mètodes laboriosos dels antics. Stockler, per a establir-ne el desenvolupament, es fonamenta en sis fonts: la secció I del primer volum de *Principles of Natural Philosophy* de Newton, el text de MacLaurin, les entrades «Limite» i «Differentiel» de l'*Encyclopédie* de D'Alembert, el segon capítol del text de Cousin, la part concernent els principis del càlcul infinitesimal del text de l'abat Martin i, finalment, l'assaig premiat de L'Huilier. Això no obstant, Stockler indicava amb orgull que gairebé tots els seus resultats eren «completament nous» (ibíd., VIII). Indicava també que, en el text, havia desenvolupat els fonaments que, fins aleshores, només eren implícits en les lliçons que havia donat a la Reial Acadèmia Naval de Lisboa (ibíd., IX).

Però els coneixements precisos que Stockler té de la literatura internacional no sols són remarcables, sinó que també confirmen que el text de Martin de 1781 no fou solament significatiu en el seu país, sinó que havia estat reconegut en l'àmbit internacional. A més, la percepció de Martin constitueix una de les bases més importants de Stockler. Tanmateix Stockler sobrepassa àmpliament les seves bases en separar el concepte de límit del concepte geomètric i algebritzar-lo com una explicació operativa per a les variables, i finalment també per a funcions. I ultra tot això, hi trobem l'inici d'operacions amb desigualtats. Basant-se en els conceptes de Martin, Stockler adopta la diferenciació de L'Huilier en límits per la dreta i per l'esquerra introduint-hi, a més —per l'estatus excepcional característic del zero—, una diferenciació ulterior, que porta pràcticament la successió nul·la a l'estatus de concepte bàsic de la teoria dels límits.

Stockler inicia la presentació com gairebé tots als autors que l'han precedit, introduint els conceptes de constant i de variable, però, com Martin, fent servir el concepte de valor: les constants són ens que solament accepten un únic valor, mentre que les variables poden assumir-ne diversos (ibíd., 1). Igual que tots els autors del segle divuit, no n'explicita el recorregut. Aleshores Stockler, amb una coincidència molt gran amb Martin, defineix el concepte general de límit, formulant l'aproximació arbitrària de forma idèntica a la de Martin:

> Una quantitat constant s'anomena «Límit» d'una variable si la darrera és capaç de créixer, resp. de decrèixer —àdhuc si el valor de la variable no esdevé mai igual al de la constant— de manera que s'apropa tant a la constant que la diferència esdevé més petita que qualsevol quantitat donada per endavant, per petita que s'hagi agafat (ibíd., 2).

Stockler gairebé no empra el concepte de límit en la seva forma general, sinó en formes específiques que al començament, com L'Huilier, distingia entre límits per la dreta i per l'esquerra perquè no disposava del concepte de valor absolut. Allò que L'Huilier anomenava *limite en grandeur*, Stockler ho anomena *limite em augmento*, i el *limite en petitesse* de L'Huilier esdevé en Stockler *limite em deminuçaõ* (ibíd., 2). La innovació conceptual que depassa Martin consisteix en el fet que Stockler oposa a aquests dos conceptes de límit el que aparentment semblen conceptes complementaris d'il·limitat: les variables que, quan decreixen, no tenen límit («que naõ tem limite em deminuiçaõ»), respectivament, tampoc no en tenen quan augmenten («que naõ tem limite em augmento»).

De fet, només les variables sense límit quan augmenten se'ns mostren com a il·limitades i per consegüent, en general, no són aplicables operativament. Contràriament, en canvi, les variables que quan disminueixen no tenen límit constitueixen, a despit del nom, no sols una quantitat limitada, sinó també un concepte bàsic nou de la teoria dels límits. La raó d'aquest fet és l'estatus excepcional del zero. Com hem vist abans, Martin no reconeixia el zero com una quantitat, ni tampoc com a valor possible per a les variables. Per aquest motiu, havia inrodoït els *infiniment petits* com una variable especial que finalment s'esvaeix. Malgrat que Stockler no comenta explícitament aquesta qüestió, el zero té també una posició excepcional: tota la seva pràctica palesa clarament que el zero mai no es pot assolir com un límit. Stockler definia el concepte de límit d'una manera diferent: com el d'una variable que disminueix sense límit. Això no significa una variable que cau en l'«infinit» negatiu, sinó més aviat una variable que s'apropa al zero com si fos una barrera, quelcom que mostra no sols la limitació factual d'aquesta variable, sinó també el caràcter excepcional del zero. La inconsistència de la concepció de Stockler és el fet d'haver-se abstingut de discutir la possibilitat dels límits negatius.

Fins i tot el primer ús que fa del concepte de «variable sense límit de disminució» mostra que l'entén com si fossin variables que aquí podríem designar simplement com a successions nul·les. El primer teorema relatiu a aquestes quantitats estableix que la suma d'un nombre arbitrari de variables d'aquesta mena és també una variable d'aquesta mena. La demostració d'aquest fet mostra que l'operació d'aquestes variables pot esdevenir més petita que qualsevol quantitat per minsa que l'agafem —Stockler no suposa que aquesta quantitat hagi de ser positiva; en ell, és típic un ús consistent d'una certa àlgebra de les desigualtats que, segons Grabiner, constitueix una innovació que comparteix amb Cauchy:

> Sigui *n* el nombre de variables *z*, *y*, *x*, etc. i *k* una quantitat tan petita com puguem imaginar. Aleshores, hom pot suposar que
>
> $$z < \frac{k}{n}, \quad y < \frac{k}{n}, \quad x < \frac{k}{n},$$
>
> i igualment per a totes les altres variables, i hom obté que $z + y + x +$ etc. $< k$. QED.
> (Stockler 1794, 4).

Una altra proposició, el tercer teorema de Stockler, il·lustra la característica bàsica d'aquest concepte de límit —aparentment il·limitat— com una successió nul·la. Si dues variables diferents x i y tenen el mateix límit a, la seva diferència $x - y$ no té límit de disminució (ibíd., 7).

El desenvolupament posterior de les propietats d'aquestes successions nul·les porta eventualment Stockler a la formulació del *Principio Fundamental* de la teoria dels límits, que mostra que les successions nul·les poden esdevenir el concepte realment bàsic d'aquesta teoria. Una variable que posseeixi un límit pot ser considerada com una suma, respectivament com una diferència, d'una constant —i.e., el límit— i d'una successió nul·la:

> Tota quantitat capaç de límit és necessàriament, amb el grau de precisió que sigui, igual al seu límit més o menys una quantitat variable que no té límit de disminució (ibíd., VI).

Amb aquests conceptes fundacionals, Stockler desenvolupa una concepció totalment algebraica de les operacions amb límits. En contrast amb els seus predecessors que havien focalitzat el seu treball operant amb raons geomètriques, Stockler concep el comportament del límit algebraicament i ens presenta, de forma sistemàtica, la seva operativitat: per a cada una de les operacions aplicables com ara l'addició, la subtracció, la multiplicació, la divisió i l'obtenció d'una potència —i també per a lligams d'aquesta mena entre dues o més variables, entre una constant i una variable, etc. Les demostracions dels teoremes individuals s'ofereixen, d'una manera consistent, mitjançant operacions algebraiques amb desigualtats. Com a exemple, citarem alguns d'aquests teoremes:

> Si dues variables són successions nul·les, la suma, la diferència i el producte, també; resultats anàlegs valen per al producte d'una variable i una constant, i per a la divisió d'una variable per una constant Tota quantitat capaç de límit és necessàriament, amb el grau de precisió que sigui, igual al seu límit més o menys una quantitat variable que no té límit de disminució (ibíd., 3-10).

Una potència a^x, on $a < 1$ és una constant i x una variable amb valors positius sense límit d'augment, proporciona una successsió nul·la (ibíd., 22).

El límit, tant *em augmento* com *em deminuçaõ*, de la suma —resp. la diferència, resp. el producte— d'una constant a i una variable x amb límit b és igual a la suma/diferència/producte de a per b. Demostra els anàlegs per a dos o més variables (ibíd., 28 i s.).

Aquests teoremes condueixen immediatament a proposicions d'intercanviabilitat de límits, i addicionalment foren suportats i generalitzats amb la creació d'un signe per al concepte de límit. A més, els acompanyà immediatament, en la secció esmentada relativa als dos conceptes de límit que succeeixen adequadament la presentació del principi fonamental (vegeu el paràgraf anterior), de l'exposició dels convenis que concerneixen el signe per als límits —que contenien «lim», un símbol que ja havia esdevingut estàndard; tanmateix Stockler, en l'ús d'aquest signe, s'absté de diferenciar els límits per la dreta i per l'esquerra:

Si en un càlcul desitgem expressar el límit d'una variable i no hem establert encara una lletra de l'afabet per a designar-lo, escriurem les tres primeres lletres lim de la paraula *límit* abans del terme o de l'expressió que representa la variable. Per a expressar el límit de x, escriurem lim x; per a expressar el límit de xy, escriurem $\lim(xy)$; per a expressar el límit de y^x, escriurem $\lim(y^x)$; i així anàlogament (ibíd., 28 i s.).

Tant pel fet d'introduir signes com d'usar-los, novament és més explícit i precís que els seus predecessors. Si bé formula les proposicions («theorems») sense utilitzar el signe de límit, sempre l'usa, de forma operativa, en les demostracions. Aquest ús mostra alhora la intercanviabilitat de l'operació algebraica i el procés de determinació del límit. Aleshores, el resultat de $\lim x = a$ i $\lim y = b$ és que $a + b = \lim(x + y)$, i $ab = \lim(xy)$ (ibíd., 30 i s.).

Stockler estableix la intercanviabilitat també per a funcions transcendents, en particular per al logaritme: Per a $b = \lim x$ i a constant, tenim que $\lim(a^x) = a^b$, i anàlogament $\lim(y^x) = b^a$ (ibíd., 55 i s.).

Un fet nou en l'aproximació de Stockler és que no limita els límits a les variables, sinó que introdueix explícitament i discuteix els límits de funcions (ibíd., 66 i s.). En particular, com a teorema XIII, estableix explícitament la susbtituïbilitat del procés dels límits per a funcions: «El límit d'una funció Fx d'una variable x que admet un límit és igual a la funció homòloga del límit» (ibíd., 68). En la forma amb signes, Stockler expressa aquest teorema d'aquesta manera: Per a $a = \lim x$, s'obté $\lim Fx = Fa$.

En les condicions d'aquest teorema, introdueix, en el cas de les proprosicions generals, la condició que la(les) variable(s) admeti(n) límit(s): «capaz de limite» (ibíd., 11 i s.). Tanmateix no considera aquesta condició com un element de la pròpia teoria pel que fa a l'estudi del comportament de les funcions.

2. Carnot

Lazare Carnot (1753-1823) va escriure tres versions diferents del famós text *Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, en 1784, 1797 i 1813. No és gaire conegut que l'aproximació passa d'un mètode basat en el límit a un que el menysprea i, en canvi, emfasitza els infinitesimals com a superiors. Per tant, l'obra de Carnot és un dels casos rars d'un accés immediat a canvis epistemològics.

La primera versió fou escrita en 1784 per ser presentada en concurs a l'Acadèmia de Ciències de Berlín. Mentre que l'Acadèmia havia descrit el concepte de l'infinit com a «contradictori», Carnot —en una nota a peu de pàgina introductòria— assigna aquest caràcter únicament a les idees primerenques imprecises dels novells. «En realitat», continua, «res no és més simple que un concepte exacte de l'infinit» (ibíd., 174).[1] Justifica aquesta asserció —que era totalment contrària a la tradició— afirmant que el concepte d'infinit està directament relacionat amb el límit o amb les raons primeres i darreres de Newton, que mai ningú no havia refusat i que, a més, generalment romanen indefinides per mor de la seva inintel·ligibilitat (ibíd.).

És astorador que la literatura que existeix sobre que la memòria de Berlín de Carnot no discuteixi fins a quin punt contradiu obertament el concepte fonamental de la qüestió del premi. Usant la mateixa terminologia amb la qual l'Acadèmia havia fet una crida per tal que hom susbtituís l'infinit, Carnot exposa que en pot proporcionar un concepte precís, exacte i clar —si bé, admetent-lo al si de la teoria dels límits—: «Per tant, suposant el concepte de límit, hi ha una solució precisa, exacta i clara» (ibíd., 174).

El que és decisiu és que Carnot no veu res de contradictori en el concepte d'infinit, sempre que se'l concebi dins el marc de la teoria dels límits:

> Per tant, les quantitats infinitesimals no són ens imaginaris, sinó simples quantitats variables caracteritzades per la naturalesa dels seus límits (ibíd., n. 13, 182).

Aquesta notable independència de Carnot es palesa també en la seva distància de D'Alembert, el qual desijava, a l'*Encyclopédie*, excloure completament els *infiniment petits* del discurs matemàtic legítim. L'aspecte productiu és que Carnot, no solament introdueix un signe límit equivalent al de L'Huilier, sinó que l'aplica també operativament, entre d'altres, per a expressar la propietat d'esdevenir infinitament proper. La introducció del signe no es fa d'una manera encoberta, sinó explícita:

> Poso de manifest que etiqueto el límit o el valor darrer d'una quantitat arbitrària usant la mateixa quantitat precedida del signe $\mathcal{L}$ (ibíd., n. 36, 199).

Aleshores és hàbil per a formular la propietat anterior en la forma breu $\mathcal{L}\frac{A}{B} = 1$ (ibíd., n. 51, 241). Carnot aplica aquest signe del límit d'una forma extensa, en particular en les demostracions (vegeu ibíd.). També l'usa en la demostració del seu teorema que —seguint l'obra de Martin— actualment forma part del repertori estàndard de la teoria dels límits, a saber, la intercanviabilitat dels límits en les operacions matemàtiques, en el cas de la formació dels quocients:

> La raó darrera de dues quantitats arbitràries és sempre igual a la raó dels seus valors darrers o, el que és el mateix, el límit de la raó de dues quantitats arbitràries és igual a la raó dels seus límits (ibíd., n. 88, 242).

La universalitat de la proposició per a quantitats *quelquonques*, la retrobem en endavant, durant molt de temps, en els autors posteriors. Carnot expressa també aquesta proposició amb símbols:

> Per consegüent, $\mathcal{L}\dfrac{Y}{Z} = 1$ és el mateix que $\dfrac{\mathcal{L}Y}{\mathcal{L}Z} = 1$ (ibíd.).

Encara que aquesta sembla que és la seva conclusió respecte dels mètodes del càlcul infinitesimal, i encara que ambdós, el singular i el combinat, es basin en el concepte de límit, Carnot discuteix —inicialment molt sorprenentment— un *méthode des limites* separat, «vertader», que aleshores prova que és el mètode general superior.

1. Podríem considerar, potser, aquesta acceptació de l'infinit com una raó per la qual l'Acadèmia no concedí el primer premi a aquest tractat de Carnot.

Com a mètode independent, Carnot presenta la determinació del límit per als quocients de diferències:

$$\mathcal{L}\frac{\Delta x}{\Delta y},\ \mathcal{L}\frac{\Delta z}{\Delta x},\ \mathcal{L}\frac{\Delta y}{\Delta z}\ \text{(ibíd., n. 84, 239 i s.).}$$

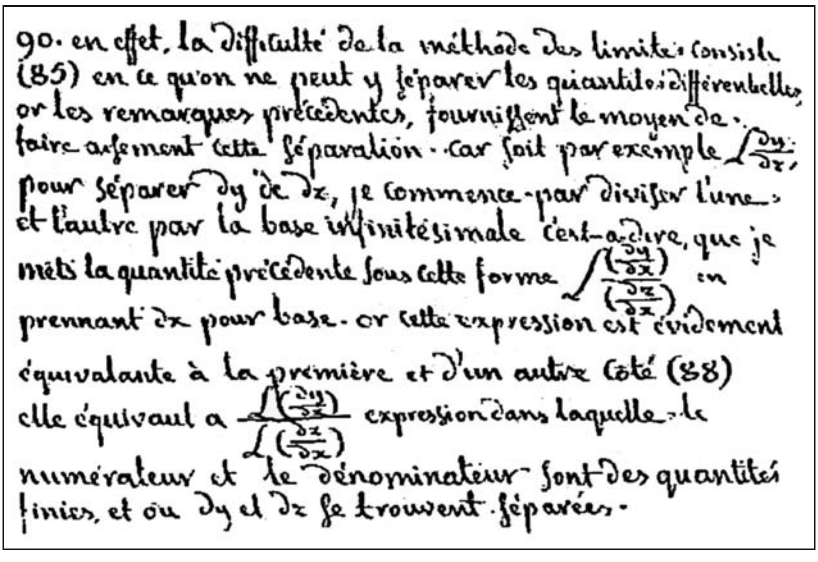
Per a Carnot, forjar un lligam entre la determinació dels diferencials i dels quocients de diferencials no és matemàticament trivial. Per això posa l'accent en el fet que les quantitats diferencials no s'esdevenen de forma separada en el mètode actual dels límits. Considera aquest vincle inherent una «dificultat» que no es troba en el que s'anomena l'*analyse infinitésimale* normal: no es poden separar les variables i executar individualment les operacions de transformació:

> Aquí s'esdevé que no es pot, com succeïa en el mètode anterior, separar les quantitats infinitament petites les unes de les altres; sempre s'han de presentar de forma conjunta, la qual cosa prevé les equacions allà on es troben de veure's sotmeses a totes les transformacions que servirien per a eliminar-les (ibíd., n. 85, 2241).

Aquesta «dificultat» confirma una vegada més, tant pel costat matematicoconceptual com pel matematicooperacional, que el concepte bàsic en l'anàlisi de Carnot és encara el geomètric de corba i no pas el de funció.

És només quan assoleix aquesta forma del mètode del límit que Carnot emfasitza que opera solament amb quantitats finites i, per tant, es restringeix als mitjans de l'àlgebra normal. Això converteix el càlcul infinitesimal en «una aplicació simple del càlcul algebraic ordinari». Com a càlcul algebraic pur amb quantitats finites «perceptibles», no es passeja per la «terra dels errors»; aquest mètode dels límits és clarament el que és general i el que s'ha de preferir.

Tanmateix, per mor de les dificultats que descriu en separar variables, Carnot no desitja atorgar-li aquest estatus de forma general. Després de desenvolupar diversos teoremes sobre límits —i, en particular, sobre substitucions (vegeu el paràgraf anterior)—, proporciona un camí per defugir aquesta dificultat: canviar la base de la diferencial. La reproducció, a la figura, d'aquesta línia de pensament presenta l'aplicació operativa del símbol de límit $\mathcal{L}$.


90. en effet, la difficulté de la méthode des limites consiste (85) en ce qu'on ne peut y séparer les quantités différentielles, or les remarques précédentes, fournissent le moyen de faire aisément cette séparation. car soit par exemple $\mathcal{L}\frac{dy}{dz}$, pour séparer dy de dz, je commence par diviser l'une et l'autre par la base infinitésimale c'est-à-dire, que je mets la quantité précédente sous cette forme $\mathcal{L}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dz}{dx}\right)}$ en prenant dx pour base. or cette expression est évidement équivalante à la première et d'un autre côté (88) elle équivaut a $\frac{\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\mathcal{L}\left(\frac{dz}{dx}\right)}$ expression dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont des quantités finies, et où dy et dz se trouvent séparées.

3. Desenvolupament de conceptes ulteriors: Garnier, Lacroix i Ampère

Retornem ara a les contribucions d'altres matemàtics pel que fa al desenvolupament de conceptes bàsics posteriors de l'anàlisi al si de l'École Polytechnique.

3.1. Garnier

Un personatge notable en aquesta contribució fou J. G. Garnier. Va ser el primer —immediatament després d'haver ensenyat el seu curs normal d'anàlisi— a imprimir les pròpies versions abreujades de lliçons adreçades als estudiants. L'arxiu de l'École Polytechnique conté diversos textos d'aquest caire que evidentment foren editats com a simples materials de curs i no per a una distribució àmplia. Un d'aquests textos, titulat *Leçons d'Analyse algébrique, Différentiele et Intégrale*,[2] per a la primera admissió d'alumnes de l'any 1800-1801, conté també una versió abreujada d'una classe encapçalada per *Course d'Analyse Différentielle, fait l'an 9*. Després d'introduir els termes conceptuals i de presentar els fonaments del càlcul diferencial, Garnier, a la secció tercera, tracta explícitament de la transició de les diferències als diferencials i aplica el *méthode des limites* com a mitjà per a fer-ho. Era la primera vegada que una aproximació d'aquesta mena tenia lloc a l'École Polytechnique, on el càlcul diferencial s'havia basat sempre en el càlcul de diferències. La secció és encapçalada per *Notions de la limite et passage du calcul aux différences finies au calcul différentiel*.

L'extensió de Garnier del concepte de límit no era un esdeveniment isolat, sinó que ja formava part dels exàmens finals. Es conserva un document de 1799 en el qual Garnier anotà les parts importants del seu programa sobre càlcul diferencial i integral com a guió per a dos examinadors: Laplace i Bonne. Aquest text revela que un dels tòpics de l'examen era que no tota funció posseeix un límit arreu. Dels dinou tòpics sobre els fonaments del càlcul diferencial, els tres primers van adreçats a la introducció del concepte de funció. I alguns dels tòpics següents tracten del concepte de límit. En són exemples:

4. Què s'entén com a límit d'una funció d'una variable.
5. No totes les funcions admeten límit.

   [...]

7. Assigna els límits de les raons o les raons darreres de

$$\frac{\text{corde}}{\text{sinus}}, \frac{\text{sin}}{\text{cos}}, \frac{\text{sin}}{\text{sin vers}}, \frac{\text{tang}}{\text{sin}}, \frac{\text{tang}}{\text{corde}}, \frac{\text{Arc}}{\text{sin}}, \frac{\text{Arc}}{\text{corde}}.$$

   [...]

12. Els límits de les raons

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \ldots, \frac{\Delta^{n-1} y}{\Delta x^{n-1}}, \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$$

   i les notacions d'aquests límits.[3]

2. Archives de l'École Polytechnique, Bibliothèque, A III a 51. Les llacunes de la paginació posen també de manifest que aquestes impressions solament eren d'ús intern.

3. AEP, Bibliothèque, III 3b, J. G. Garnier, Programm de Calcul Intégral et de Calcul differentiel, remis le 16 fructidor aux c. en LaPlace et Bonne pour servir aux examens ouverts le 12 Complémetaire, an 7.

3.2. Lacroix: El propagador del mèthode des limites

El text monumental d'anàlisi de Lacroix és no sols l'exposició més moderna i completa de l'estat de l'art en l'anàlisi, sinó també la presentació més consistent del mètode dels límits. Després de Garnier, Lacroix fou el principal professor que ensenyà càlcul i el seu breu manual es convertí en oficial.

El text principal presenta el tractament en base a un mètode únic: el dels límits. Tanmateix només utilitza formulacions textuals i evita emprar tota mena de signes i així, doncs, una algebrització independent i el desenvolupament d'un càlcul amb límits. Per tant, la forma del mètode dels límits en Lacroix representa un pas enrere si el comparem amb l'obra de Martin, L'Huilier, Carnot i, abans d'ells, de Stockler (el qual probablement no els era familiar). En resulta, doncs, que hem de caracteritzar Lacroix com un modernitzador conservador.

Això no obstant, fou indubtablement un modernitzador. L'obra de Lacroix és el primer text general, ja que el treball molt aïllat d'Euler es basa consistentment en el concepte de funció (Lacroix 1797-1799, 1 i s.). En ella justifica la necessitat del mètode dels límits per la necessitat que hi ha de clarificar la convergència o divergència dels desenvolupaments en sèrie, i formula la definició de límit següent, purament textual:

> En endavant, anomenarem límit aquella quantitat que una magnitud no pot depassar quan creix o decreix, o fins i tot una que no pugui atrapar, però a la qual s'apropa tant com desitgem (Lacroix 1797, 6).

És important observar l'actitud conservadora de parlar de «quantitats» d'una manera indeferenciada sense distingir entre constants i variables. Per a Lacroix, el mètode dels límits no és només el fonament necessari de l'anàlisi, sinó, alhora, el mitjà que permet prescindir de l'ús de les quantitats infinites.

Allò que pot ser considerat modern és l'èmfasi que Lacroix posa, en la secció dels fonaments, en el fet que no tota quantitat o funció ha d'acceptar un límit. Repetidament —com féu L'Huilier abans que ell— formula la precondició que la funció respectiva «és capaç de tenir un cert límit» (ibíd., 28). Després d'exposar els *limites*, afirma que creen una base suficient per a l'estudi del procés del límit.

3.3. Ampère

Des que Garnier deixà l'École Polytechnique en 1802, després que el *Traité éleméntaire* de Lacroix esdevingués el text estàndard, van passar alguns anys abans que la seva tasca sobre fonaments fos continuada de forma directa. Fou represa i radicalitzada per André-Marie Ampère (1775-1836), el qual, en 1804, aconseguí el seu primer lloc de treball com a *répétiteur* abans d'assolir, en 1808, el de professor d'anàlisi amb dedicació exclusiva. Encara que és més conegut com a físic, fou un matemàtic i un químic molt actiu i també destacà en filosofia. Menys coneguda encara, i fins i tot de data desconeguda, és la contribució que féu en relació amb els fonaments de la matemàtica. Les seves aportacions són evidentment el resultat de les seves reflexions filosòfiques. Van emergir també en el context de l'École Polytechnique.

Decideix també adoptar de forma explícita el mètode dels límits i proposa i demostra teoremes nous pel que fa al seu ús operatiu. Pren una direcció diferent de la de Stockler i proposa teoremes per a operar amb límits de desigualtats. Els avenços que féu es troben documentats en les notes preparatòries per al curs d'anàlisi de 1808-1809, un curs que heretà de Lacroix quan aquest abandonà la seva plaça a l'École Polytechnique per prendre possessió d'un lloc de treball nou a la Facultat de

Ciències. Aquestes notes són particularment informatives perquè confirmen la independència que manifesta respecte de Lacroix. Usa el currículum de Lacroix per afegir-hi notes pròpies que posen de manifest les seves prioritats i aproximacions. En la primera nota adverteix que el curs s'establirà segons el mètode dels límits seguint un programa general.

La innovació, la trobem en la segona de les notes d'Ampère. A més dels teoremes familiars sobre límits, que menciona solament de forma abreujada, en proposa i demostra d'altres. Tant en la formulació com en la demostració fa servir el signe lim.[4] També introdueix un signe per a «estar entre» o «ser proper entre».

> A més dels teoremes coneguts sobre límits: dos límits de la mateixa quantitat són iguals, etc., ajuntar-hi això: Si X es troba sempre entre V_1 i V_2 que tenen límit v, aleshores també $\lim X = V$.
>
> Atès que X es troba entre V_1 i V_2, aleshores resulta que $X - V$ es troba entre $V_1 - V$ i $V_2 - V$, i aquests dos esdevenen tan petits com es desitgi, per la qual cosa el límit de $X - V_1$ també. Per tant, $\lim X = V$.   c.q.f.d.
>
> Ampère continua aquesta demostració predominantment textual esbossant-ne una versió algebraica, tot introduint un signe nou per a la relació «estar entre». Aleshores escriu:
>
> $$X \,\boldsymbol{\alpha}\, \begin{matrix} V_1 \\ V_2, \end{matrix} \quad \text{d'on: } X - V \,\boldsymbol{\alpha}\, \begin{matrix} V_1 - V \\ V_2 - V. \end{matrix} \quad \text{Per tant, } \lim X = V.\ ^5$$

4. Cauchy: El límit i l'*infiniment petit*

Des de l'any 1811 en endavant, a causa d'un canvi epistemològic important, el mètode dels límits es deixà d'ensenyar a l'École Polytechnique. Fou substituït pel dels infinitesimals, les *quantités infiniment petites*, que es consideren més sintètiques i intuïtives. D'aquesta manera, a França, el procés d'algebrització del conepte de límit es va veure interromput durant molt de temps.

Fins i tot en les seves famoses notes, *Course d'analyse algébrique* de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) no contribuí a l'algebrització, encara que, per una mena de fórmula de compromís, va reintroduir l'ús dels límits i els definí d'una manera totalment retòrica sense usar símbols.

Immediatament després d'haver definit les variables, Cauchy defineix tant el «límit» com les «quantitats infinitament petites». La definició del límit és totalment textual, sense signes ni desigualtats. Usa el terme clàssic d'esdevenir arbitràriament proper —sense mencionar, per exemple, les quantitats infinitament petites:

> Quan valors successius donats de la mateixa variable s'apropen indefinidament a un valor fixat, de manera que al final l'un i l'altre difereixen tan poc com es vulgui, aquest darrer s'anomena el *límit* dels altres valors (ibíd., 4).

Novament és fonamental per a la defincció que la variable adopti «successivament» valors singulars. Seguint la tradició francesa, l'únic requisit que ha de complir la successió de valors que hem assumit és que, al final, difereixi del límit una quantitat arbitràriament petita. No es considera la possibilitat d'atènyer el límit. La definició de límit és purament textual, i s'estableix sense l'ús o introducció de signes. Cauchy no introdueix el signe «lm.» fins a la secció següent i només com una abreviatura —subratllant el seu ús amb el punt:

4. El primer autor que menciona aquesta llei d'inclusió d'Ampère és Grattan-Guinness (1990, 199).
5. Nachlaßl d'Ampère. A la part central, Ampère oblida sempre insertar la «*V*» al costat de la dreta.

> Quan una quantitat variable convergeix a un límit fixat per endavant, sovint és útil indicar aquest límit amb una notació especial, que farem col·locant l'abreviatura
>
> lim.
>
> davant de la quantitat variable que estem considerant (ibíd., 13).

De fet, Cauchy usa el signe només com una abreviatura i no adopta ni l'aproximació de Stockler ni la d'Ampère adreçada a una autonomia operativa. I precisament perquè solament és una abreviatura, al signe «lim.» de Cauchy —com en tots els seus predecessors— li manca un element completament central com a aplicació operativa: una caracterització més propera al procés del límit —o bé indicant el valor al qual s'apropa la variable independent, o bé les variables per a les quals el procés del límit té lloc. Irònicament, és Spalt (1996, 20), tan orgullós del seu mètode de «no afegir res forà a les fonts», qui, gairebé des del mateix inici del text, afegeix la notació indexada que sempre mancarà en Cauchy i en els francesos contemporanis. Malgrat els comentaris, d'altra banda copiosos, relatius a cada un dels canvis del text, és força més endavant del seu text que hi ha la reproducció d'una proposició establerta per Cauchy.

$$0 = \lim_{x=0} \left[\Theta f(x)\right] = \lim_{x=0} \left[\Theta x f'(x)\right]$$

amb l'observació «afegint, com és usual, l'índex al 'lim'» (ibíd., 144).

Això no obstant, és precisament el fet de negligir aquest índex allò que apunta un camp de problemes conceptual encara major: sense usar signes que expliquin les variables que el procés del límit afecta, és fàcil oblidar que, per exemple, s'han esdevingut dos processos de límits diferents. Així, la manca d'una explicació amb signes se'ns mostra com una indicació de la reflexió insuficient realitzada sobre el procés del límit en la seva totalitat.

La definició de límit va seguida de dos exemples: els nombres irracionals com a límits dels racionals i l'àrea del cercle com a límit al qual convergeixen les àrees de polígons inscrits amb un nombre de costats creixent.

5. Dirksen

Una major profunditat en l'horitzó conceptual dels conceptes de límit s'aconsegueix en els comentaris de E. H. Dirksen sobre la duplicació o multiplicació de les definicions de límit a causa del concepte específic de nombre i, en particular, de l'estatus especial del zero. Dirksen fou un dels lectors més diligents de Cauchy i el defensor més ferm, a Alemanya, de les innovacions en els conceptes bàsics aportades per Cauchy.

Cauchy comença el capítol sobre convergència o divergència introduint una innovació notacional important en la matemàtica francesa que serveix com a premissa per a un tractament més general de les propietats de les sèries: la indexació dels termes de la successió per tal d'identificar-los com a elements que pertanyen clarament a una successió completa. Cauchy defineix una «sèrie» com una successió il·limitada de quantitats de manera que la formació d'una quantitat a la següent s'obté seguint una llei ben determinada:

> Anomenarem *sèrie* una successió indefinida de quantitats
>
> u_0, u_1, u_2, u_3, etc.
>
> que deriven l'una de l'altra d'acord amb una llei determinada (Cauchy 1821, 123).

Contempla les quantitats com si fossin termes diversos de la successió. Cauchy completa aquesta designació amb l'expressió i notació del terme general:

> el terme que correspon a l'índex n, és a dir, u_n, s'anomena *terme general* (ibíd.).

Mentre que aquestes notacions proveeixen la claredat necessària per a l'operativitat general amb «successions», contràriament, els signes que introdueix per a les sumes parcials i la suma només són apropiats per a avaluar aspectes parcials d'aquests conceptes, mentre que d'altres no hi són ni tan solament considerats.

Cauchy usa

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + n_{n-1}$$

per a descriure la suma dels n primers termes de la successió, amb $n \in \mathbb{N}$. Amb aquesta notació per a sumes parcials, introdueix el concepte de *convergència*: com un límit de les sumes s_n quan n creix —sempre que aquest límit existeixi.

> Si, per a valors creixents de n, la suma s_n s'apropa indefinidament a un cert límit s, direm que la sèrie és *convergent*, i el límit s'nomenarà la *suma* de la sèrie (ibíd.).

En contrast amb això, si per a n creixent la suma s_n no s'apropa a cap valor, la sèrie s'anomena divergent, amb la qual cosa queda establert que aquestes sèries no tenen suma (ibíd.). En vista d'aquestes definicions, observem que:

- Cauchy només introdueix aquesta definició per a quantitats numèriques i no proporciona les definicions o consideracions relatives a les successions de funcions. Això porta a haver de fer comentaris sobre la notació.
- Les definicions de Cauchy són una vegada més predominantment textuals. Només usa signes per a les sumes. En particular, no aplica *lim* operativament ni en les seves definicions ni, més endavant, en les seves demostracions de convergència. Només usa el signe *lim* al final de l'extens capítol sobre convergència i divergència.

El signe de suma s_n o s no proporciona cap indicació pel que fa a la successió per a la qual es busca la suma, encara que una notació com ara $s_n(u_n)$ podria haver resultat apropiada. Encara que això podria no haver tingut cap mena de conseqüència negativa amb les successions simples de nombres, quan es tracta de successions de funcions aquests signes tan simples no proporcionen cap indicació de la funció i de la variable o variables que es troben en joc. I això fa que les operacions i argumentacions siguin confuses i feixugues.

De la mateixa manera que l'ús del signe *lim* es fa sense cap notació sobre el procés dels límits, ara tampoc no hi ha cap notació que indiqui el recorregut dels índexs en els signes s_n i s, tan assolible quan s'usa el signe sigma:

$$\sum_{n=0}^{m} u_n.$$

Tampoc no hi trobem la notació abreujada per a les sumes parcials:

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m, \quad m > n$$

que el signe sigma podria haver propiciat:

$$\sum_{k=n}^{m} u_k.$$

Cauchy introdueix la seva pròpia notació només per al cas especial del romanent de la sèrie a partir d'un cert índex *n*:

$$r_n = s - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \text{ (ibíd. 130 i s.).}$$

La notació de Cauchy és suficient per a introduir i aplicar el seu sistemàtic desenvolupament dels criteris de convergència com són els tests del quocient i de l'arrel (ibíd., 132 i s.). El problema només sorgeix amb el controvertit teorema de continuïtat en el qual Cauchy relaciona la convergència a la continuïtat de les successions de funcions.[6] Aquí argumenta amb funcions de variable *x*, amb increments d'aquestes funcions i amb increments d'una variable *x* d'un *infinitament petit* α. Tanmateix tot això ho fa de forma textual, perquè només posseeix signes per a les tres funcions:

$$s_n, r_n \text{ i } s,$$

però cap vincle d'aquestes ni amb *x*, ni amb α, ni amb els increments de les funcions.

En aquest context, una font excel·lent d'informació hauria estat un criticisme contemporani del teorema de continuïtat de Cauchy que focalitzés precisament aquests dèficits pel que fa als signes. Com és característic, això no tingué lloc a França, sinó a Alemanya, per part d'un matemàtic format en el context dels matemàtics de Göttingen i Berlín, i, en particular, pels qui aleshores estaven dominant la combinatòria. L'escola combinatòria, amb el seu entusiasme per les operacions algebraiques formals i buscant generalitzacions cada cop més llunyanes, només disposava d'un camí per a sotmetre a les seves combinacions cada vegada més agosarades: desenvolupar símbols apropiats i aplicar-los de forma estricta. L'autor d'aquest criticisme fou un matemàtic que, a Alemanya, actuava com el més acurat defensor i seguidor dels conceptes de Cauchy: Enno Heeren Dirksen (1788-1850), nadiu de Frísia de l'Est, que va estudiar matemàtica i astronomia a Göttingen amb Mayer, Thibaut i Gauß. Aconseguí el doctorat a Göttingen i en 1820 esdevingué professor associat de la Universitat de Berlín i en 1824 professor ordinari. Sense aconseguir en la seva recerca cap èxit innovador, el seu camp principal d'estudi fou la reflexió sobre els fonaments. La seva obra inacabada, *Organon*, de la qual solament es publicà mitja secció, és un document convincent per a una explicació i continuació del programa de rigor de Cauchy.

El criticisme de Dirksen al teorema de Cauchy el podem veure en les observacions que féu a la primera traducció a l'alemany del *Course d'Analyse*, feta per C. L. B. Huzler l'any 1828. Fins i tot, ja abans d'aquestes ressenyes de 1829, Dirksen havia introduït una innovació important en l'ús dels signes. Es troba ja desenvolupada de forma completa en una memòria de l'Acadèmia de Berlín de 1817. Pel que sé, Dirksen fou el primer que proporcionà el signe de límit amb indicacions sobre els processos del límit i les variables involucrades. Atès que, en aquella època, el romanticisme alemany era particularment dur, reemplaçà l'abreujament del llatí o del francès *limes* o *limites* per un abreujament de la paraula alemanya *Grenze*, i en resultà la notació següent:

$$\overset{x=x_0}{Gr} \cdot f(x)$$

en la qual s'establia la variable *abans* del signe límit. Per això, Dirksen presenta la seva definició de continuïtat com

$$f(x_0) = \overset{x=x_0}{Gr} \cdot f(x).$$

6. En la literatura, segons el que conec, només Pensivy (1988, 12) indica que la notació és ambigua i, per tant, que els significats no són clars. En la notació, menciona la manca d'una relació amb la variable *x*.

Vergleicht man diese Gleichung mit der ihr entsprechenden (55), so sieht man leicht, daſs, insofern beide gleichzeitig statt finden, und also jene eine nothwendige Folge von dieser, sei es unbedingt, sei es auch nur bedingungsweise, bilden soll, sein muſs

$$(68) \ldots\ldots \overset{h=\infty}{\mathrm{Gr}} \sum_{i=1}^{i=\frac{l-1}{h}} \left\{ \overset{h=\infty}{\mathrm{Gr}}.\, h \sum_{\alpha=0}^{\alpha=l-h} F(\alpha) \cos\frac{ix\pi}{l} \cos\frac{i\alpha\pi}{l} \right\}$$
$$= \overset{h=\infty}{\mathrm{Gr}} \left\{ \sum_{i=1}^{i=\frac{l-1}{h}} h \sum_{\alpha=0}^{\alpha=l-h} F(\alpha) \cos\frac{ix\pi}{l} \cos\frac{i\alpha\pi}{l} \right\}:$$

und umgekehrt, insofern diese Gleichung geltend gemacht werden darf, wird auch die Gleichung (67) als eine Folge von (55), und mithin auch von (43), auf einem directen und völlig strengen Wege, zu gewinnen sein.

Was nun die Gleichung (68) insbesondere anbelangt, so scheint ihre unbedingte Richtigkeit, aus einem allgemeinen Gesichtspunkte betrachtet, mit Grund bezweifelt werden zu können.

El fet d'especificar la variable en el signe de límit permetia a Dirksen poder diferenciar el procés del límit per a diverses variables amb l'ús de signes, i en conseqüència també conceptualment.

Pel que sé, doncs, això li va permetre de ser el primer a estudiar el procés dels límits múltiples i poder discriminar-los analíticament i amb signes. La figura presenta una secció de la memòria de Dirksen de 1827 com una evidència del procés que desenvolupà de cara al pas als límits múltiples. Alhora, mostra com discuteix la *intercanviabilitat* del pas al límit.

La intercanviabilitat és el punt central en el criticisme de Dirksen al teorema de continuïtat de Cauchy. El primer pas de Dirksen és especificar el procés singular en el pas al límit complet. I després de citar el teorema, no solament exposa els dubtes que té, sinó que formula símbols apropiats per a exposar-lo:

> Sincerament, el comentarista ha d'admetre que no li satisfà la demostració d'aquest teorema, i que, un cop feta una anàlisi més acurada, dubta fins i tot que el teorema sigui correcte. Com que hom suposa que tots els termes de la sèrie són funcions de x, obté, en la mesura que S_n designa la suma dels n primers termes,
>
> $S_n = f(x, n)$. (Dirksen 1829, columna 217).

Ara el signe posa clarament de manifest que en el procés de pas al límit hi ha involucrades *dues* variables. Emprant el seu signe per a límits, especifica inicialment el pas al límit respecte de n, que és el que involucra la convergència:

> Si ara prenc el valor especial de x, que és el que es considera en el teorema, i el designo com a a, i la suma de la sèrie que li correspon com a S, obtinc, d'acord amb la definició de la suma d'una sèrie:
>
> $S = \overset{n=\infty}{Gr} \cdot f(a, n) = f(a, \infty)$. (Ibíd).

En canvi, contràriament, la continuïtat fa referència a l'altra variable, x:

Si per a aquesta quantitat hom suposa la continuïtat en l'entorn del valor $x = a$, hom obté, d'acord amb el concepte de continuïtat:

$$S = \overset{\Delta a=0}{Gr} \cdot f(a + \Delta a, \infty) \text{ (Ibíd).}$$

L'esmentat teorema, reconstruït en aquests termes, requereix, per tant, que els dos passos al límit siguin intercanviables:

> Combinant aquesta equació amb la precedent, resulta que:
>
> $$\overset{\Delta a=0}{Gr} \cdot f(a + \Delta a, \infty) = \overset{n=\infty}{Gr} \cdot f(a, n)$$
>
> És a dir, si $f(x, n)$ representa la suma dels n primers termes de la sèrie, aleshores, si la suma de la sèrie és contínua en un entorn del valor $x = a$, resulta que:
>
> $$\overset{\Delta a=0}{Gr} \cdot f(a + \Delta a, \infty) = \overset{n=\infty}{Gr} \cdot f(a, n).$$ (Dirksen 1829, columna 217s.)

Ara Dirksen apunta, d'acord amb el segon capítol de Cauchy, l'únic que dedica a la continuïtat, que no hi ha manera d'aconseguir que la proposició pugui ser generalment vàlida a priori, i finalment formula una successió de certes funcions racionals contínues com a contraexemple.

En aquest exemple, els dos límits difereixen segons si el pas al límit de x precedeix el pas al límit de n:

$$\overset{n=\infty}{Gr} \cdot f(a, n) = 0$$

i, viceversa:

$$\overset{\Delta a=0}{Gr} \cdot f(a + \Delta a, \infty) = 1$$ (ibíd).

Això porta a resultats —conflictius— relatius a «la condició necessària per a la correcció del teorema» (ibíd., columna 219). Dirksen precisa amb molta cura les diferències dels dos passos al límit:

> La idea principal que es posa en joc aquí sembla que és que el concepte de la suma d'una sèrie per a $x = a$ pressuposa, parlant de forma estricta, que x es determina abans que n, mentre que el judici sobre la continuïtat de la suma exigeix l'oposat i el fet que, quan no esdevenen infinits, ambdós resultats poden diferir l'un de l'altre (ibíd.).

Sistemàticament, el seu desenvolupament opera amb aquests signes; en particular, fou hàbil per a conceptualitzar el procés de pas al límit per a diverses variables. Així, fou el primer matemàtic que reeixí en l'estudi dels processos múltiples d'aproximació als límits i a distingir-los simbòlicament i analítica.

En particular són notables:

- La introducció de límits dobles.

$$\overset{m=\infty}{Gr} \left[\overset{\rho=\infty}{Gr}\ b_{\rho,m} \right].$$

- L'extensió, a ells, de les operacions.
- El fet de basar aquestes operacions en una pràctica enormement desenvolupada d'operacions amb desigualtats i amb l'ús de l'ϵ:

$$\text{v. n.}\,\{a_{\mu\,(\mu+\rho)} - a_\mu\} < \frac{\epsilon}{2},\ \text{i v. n.}\,\{a_{\mu+\rho} - a_\mu\} < \frac{\epsilon}{2},\ \text{aleshores:}$$
$$\text{v. n.}\,\{a_{\mu\,(\mu+\rho)} - a_{\mu+\rho}\} = \text{v. n.}\,\{(a_{\mu\,(\mu+\rho)} - a_\mu) - (a_{\mu+\rho} - a_\mu)\} \leq$$
$$\text{v. n.}\,(a_{\mu\,(\mu+\rho)} - a_\mu) + \text{v. n.}\,(a_{\mu+\rho} - a_\mu) < \epsilon$$ (ibíd., 429).[7]

7. El signe «v. n.» és l'adaptació de Dirksen de l'expressió textual de Cauchy «valeur numérique», que indica el valor absolut dels termes que el segueixen. El signe que ha esdevingut comú per al valor absolut fou proposat per Crelle en 1823, però no s'adoptà d'una manera general fins a finals del segle dinou.

Resumint el desenvolupament conceptual, hem vist que no fou uniforme, continu, sinó que tingué lloc amb vaivens i compromisos i que estigué sotmès a diferències culturals que palesen el contrast dels punts de vista fundacionals d'algunes de les comunitats matemàtiques d'Europa (vegeu la figura).

Passos en el procés d'algebrització

Retòric	Sincopat	Simbòlic
Newton 1678		
MacLaurin 1742		
D'Alembert 1765		
De la Chapelle 1765		
R. Simson 1776	Cousin 1777	
Mar	tin 1781	
	L'Huil	ier 1784-1786
	Car	not 1784
		Stockler 1794
Lacroix 1797		[Garnier 1799]
		[Ampère 1808]
	Cauchy 1821	
		Dirksen 1829

Bibliografia

Archives de l'Académie des Sciences. París: Papers d'Ampère.

— chem. 75, *Course d'analyse*.

Carnot, L. (1785). Dissertation sur la théorie de l'infini mathématique. Dins Gellispie, Ch. C. (1971), *Lazare Carnot Savant* (p. 169-267). Princeton: Princeton Universty Press.

Cauchy, A. L. (1821). *Course d'Analyse de l'École Polythechnique. Première Partie. Analyse algébrique*. París: Imprimerie Royale.

— (1765). Limite (Mathémat.). Dins *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, tom IX (p. 542).

Cousin, J.-A.-J. (1796). *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*. París: Cl. A. Jombert. [2a edició].

D'Alembert, J. Le R. (1754). Differentiel. Dins *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, tom IV (p. 985-989).

— (1765). Limite. Dins *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, tom IX (p. 54).

Dirksen, E. H. (1829). Rezension: A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von C. L. B. Huzler, Könisberg 1828, *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik*, Band 2, 211-222.

Garçaõ Stockler, F. de B. (1794). *Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões*. Lisboa: Offic. da Academia das Sciencias.

Gellispie, Ch. C. (1971). *Lazare Carnot Savant*. Princeton: Princeton Universty Press. [Una monografia que tracta de l'obra científica de Carnot, amb una reproducció facsímil dels seus escrits no publicats sobre mecànica i sobre càlcul, i un assaig que fa referència a aquest darrer text, d'A. P. Youschkewitsch].

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, Mass.: The MIT Press.

Lacroix, S. F. (1802). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tom primer. París: Duprat. [2a edició: París, Courcier, 1806; 3a edició: París, 1820; 4a edició: París, 1828; 5a edició: París, Bachelier, 1837].

L'Huilier, Simon (1786). *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres pour l'anné 1786*. Berlín: G. J. Decker.

Martin, R. (1781). *Éléments de mathématiques*. Tolosa de Llenguadoc: Robert. Per a l'ús de les escoles de filosofia del Collège Royal de Tolosa de Llenguadoc.

Newton, I. (1972). *Philosophiae Naturalis Principia*. Vol. I. Cambridge: Cambridge University Press. [3a edició (1726), amb lectures diverses. Reunit i editat per Alexandre Koyré i I. Bernard Cohen, 1972].

Pensivy, M. (1987). Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme. *Sciences et Technqiues en Perspective*, 14.

Spalt, D. D. (1996). *Die Vernunft im Cauchy-Mythos*. Thun i Frankfurt: H. Deustch.