El concepte de límit de Newton a Cauchy: entre la geometria i l'àlgebra i el paper dels signes [Primera part]

Gert Schubring

Resum

El concepte de límit és constitutiu per al càlcul diferencial i integral. Això no obstant, la seva aparició històrica no s'ha estudiat prou acuradament. Newton fou el primer que l'introduí com una alternativa a les aproximacions infinitesimals, però sense reflexions conceptuals i sense cap tècnica operacional es mantingué vinculat als contextos geometricocinètics. Aquest article estudia el desenvolupament lent del concepte durant el segle divuit, i en particular les primeres definicions i el seus passos graduals vers l'algebraïtzació. Gràcies a l'apropament a una recerca de les aportacions al si de les comunitats matemàtiques en general, ens revela que autors aparentment marginals han fet avenços considerables cap a una teoria operacional algebraïtzada dels límits. Tanmateix, aquest procés mostra que no és, en absolut, continu i que depèn d'epistemologies que difereixen d'un país —i d'una comunitat— a un altre. L'anàlisi finalitza contrastant dues aproximacions del 1820 que revelen aquestes visions diferents: Cauchy a França i Dirksen a Alemanya.

Aquesta primera part de l'article presenta el marc conceptual del que es coneix com a procés d'algebraïtzació i s'hi analitza de quina manera Newton presenta el procés en el concepte de límit —com l'usa Maclaurin com a resposta a Berkeley i d'Alembert a l'*Encyclopédie*— per endinsar-se després en el límit com a aproximació i es tanca amb els inicis de l'algebraïtzació d'aquest nou concepte: el límit. Obre la porta a la segona part que publicarem en el proper número.

Abstract

The concept of limit is constitutive for the differential and integral calculus. Yet, its historical emergence has not been closely studied. As an alternative to infinitesimal approaches, it had first been introduced by Newton, but without conceptual reflections and without an operational technique; it remained tied to geometrical-kinematical contexts. The paper studies the slow development of the concept during the eighteenth century, and in particular the first definitions and their gradual steps towards algebraization. Thanks to the approach to investigate the contributions within the contemporaneous mathematical communities at large, apparently marginal authors reveal to achieve considerable steps towards an algebraized operational theory of limits. Yet, this process proves not to be a continuous one and depending on epistemologies differing over various countries and communities. The analysis finalizes in contrasting two approaches of the 1820s revealing such differing visions: Cauchy in France and Dirksen in Germany.

This first part of the paper presents the conceptual frame of that known as the algebraization process and analizes wich way Newton presents this process in the concept of limit —how to uses Maclaurin in response to Berkeley and d'Alembert in the Enciclopèdie— to enter after in the limit as approach. It closes with the start of the algebraization of this new concept: the limit. It opens the door to the second part which will publish them in the next issue.

En la historiografia de la matemàtica hi va haver un període en el qual tots els descobriments matemàtics essencials s'atribuïen als grecs de la Grècia clàssica. Evidentment, el càlcul diferencial i integral plantejava un problema a aquesta aproximació ahistòrica, produïda per l'admiració a l'antiguitat clàssica. S'intentava de presentar el mètode d'exhaustió com quelcom equivalent.

De fet, aquest mètode només és un procediment de demostració i no proporciona cap marc conceptual per estudiar el procés de pas al límit, cosa que involucra l'infinit. Una de les formulacions clàssiques la dóna Euclides en la proposició X, 1:

> Donades dues magnituds desiguals, si de la major traiem més de la meitat, i del que en queda més de la meitat, i si aquest procés el repetim contínuament, assolirem una magnitud més petita que la menor de les dues magnituds donades (citat a Edwards 1979, pàg. 16).

Aquests mètodes per calcular límits eren rigorosos, però els matemàtics que els usaven, com ara Euclides, Arquimedes i altres matemàtics grecs, evitaven, en general, processos infinits, i en cap cas no imaginaven el pas al límit com una cosa que s'acomplís actualment. Aleshores, per tal d'evitar l'ús i l'acceptació de l'infinit, tendien a desenvolupar elements crucials d'una certa àlgebra de les desigualtats.

Avui estem convençuts que la primera conceptualització rigorosa i extensa del límit ha estat elaborada per Cauchy. Encara que s'admeti que matemàtics diversos del segle XVIII van efectuar algunes reflexions i aplicacions a la noció de límit, els resultats exitosos assolits per Cauchy s'han presentat com una innovació fonamental i com una contribució personal (Grabiner 1981, pàg. 9). Hom considera que la clau característica d'aquesta conceptualització rigorosa és l'algebraïtzació dels conceptes subjacents, fet que es detecta, en particular, per l'ús d'una certa àlgebra de les desigualtats.

Tanmateix, de fet, mai no s'explica què significa, en aquest camp conceptual, el terme *algebraïtzació*. Desitjaria, doncs, reflexionar sobre l'algebraïtzació com a procés i analitzar les contribucions fetes pels matemàtics del segle XVIII d'acord amb aquesta categoria. El paper dels símbols, dels signes, se'ns mostrarà com el pivot de tot el procés del desenvolupament d'algebraïtzació. A més, se'ns farà palès, amb tota claredat, que el desenvolupament conceptual no s'esdevingué ni d'una manera contínua ni tampoc unidireccional.

Per tal d'analitzar millor el procés d'algebraïtzació del naixement de l'àlgebra, recordaré breument els tres estadis-model de Nesselmann relatius a l'evolució de l'algebraïtzació. Amb tota seguretat, aquest model, proposat l'any 1842, no és un model generalment vàlid, però és una eina tan útil com heurística:

- L'estadi primer i inferior s'anomena àlgebra *retòrica*: el procés matemàtic sencer, amb totes les seves operacions, s'expressa amb paraules. És a dir, ni s'han introduït ni tampoc no s'empren símbols. Són les paraules del llenguatge propi les que serveixen per expressar el significat matemàtic.
- En el segon estadi, hi ha l'àlgebra *sincopada*: la presentació dels resultats matemàtics és també bàsicament retòrica, però, ara, s'introdueix, per als conceptes i les operacions que s'usen amb freqüència, sempre la mateixa abreviació —en lloc de les paraules senceres. Tanmateix, s'hauria de ser prou hàbil per retornar, en qualsevol moment, de l'abreviació al terme complet original.
- El tercer estadi, el de l'àlgebra *simbòlica*, representa totes les formes i expressions amb un llenguatge de símbols, constituït independentment del llenguatge normal. Pràcticament no hi ha retorn de les operacions fetes amb símbols al text retòric (Nesselmann 1842, pàg. 302).

1. Newton

El primer ús del concepte de límit per al càlcul es troba en l'obra de Newton. De fet, com és ben conegut, Newton emprà diversos mètodes com a fonaments del càlcul nou. La noció de límit apareix en la seva aproximació via el que s'ha anomenat raons primera i darrera.

L'avantatge i l'atractiu d'aquest mètode era, con accentuà Newton, que usava només quantitats finites, i així aconseguia un acord amb la metodologia geomètrica dels grecs, la qual cosa el salvava de la crítica.

> Amb quantitats finites [...] instituir l'anàlisi d'aquesta manera i investigar les raons primeres i darreres de les quantitats finites ixents i evanescents està en harmonia amb la geometria dels antics, i volia mostrar, a més, que, en el mètode de les fluxions, no hi ha cap mena de necessitat d'introduir, al si de la geometria, figures infinitament petites (Newton 1969, 1929).

Newton, en el seu *Principia Mathematica* (1687), reflectia explícitament la idea continguda en el concepte de les *raons primeres i darreres* per determinar, en el cas de les variables depenents del temps, el límit al qual les variables s'aproximen en un cert instant —i que, des del seu punt de vista, aconsegueixen d'assolir— com un estudi dels límits, i, per això, introduïa el terme de *limes*.

Newton introduïa aquest mètode com una alternativa als mètodes geomètrics grecs, amb el propòsit d'evitar les llargues demostracions *ad absurdum*, i com una alternativa al mètode dels indivisibles: la hipòtesi dels indivisibles semblava massa ofensiva («*durior*»), deia, i el mètode li semblava que no era suficientment geomètric. L'alternativa era determinar les sumes últimes, respectivament raons, de quantitats evanescents, respectivament de les primeres quantitats generades, i això consistia precisament a determinar els límits de les sumes respectivament de les raons:

> Això és, [reduir] els límits a aquelles sumes i raons (Newton 1969, pàg. 38; org. 1972, pàg. 87).

I emfasitzà el seu propi concepte de continuïtat afirmant que no comprenia els indivisibles, sinó que concebia quantitats esvanescents divisibles; cosa que no significa pas l'existència de les parts últimes, sinó:

> [no] indivisibles, sinó quantitats divisibles evanescents; no les sumes i les raons de determinades parts, sinó sempre els límits de les sumes i les raons (*Ibid*.).

Aquí Newton posà cura a emfasitzar que la seva pròpia expressió *raons últimes* significava efectivament *límits*, els quals eren aproximats més i més per les raons:

> Aquestes raons últimes a les quals les quantitats s'esvaeixen no són pas, de fet, les raons de les quantitats últimes, sinó els límits als quals les raons de les quantitats s'apropen més que qualsevol diferència donada (*Ibid*., pàg. 39; orig. pàg. 88).

Simultàniament, Newton declara, doncs, que els límits existeixen, i que examinar aquests valors constitueix una tasca genuïnament geomètrica perquè els límits estan fixats i determinats:

> I com que aquests límits són certs i definits, determinar-los és un problema estrictament geomètric (*Ibid*., pàg. 39; orig. pàg. 87f.).

Finalment, Newton dóna ja una pista del concepte del procés de matematització del límit que més endavant va ser formalitzat dient que les quantitats infinitament petites són variables especials; és a dir, successions nul·les. Arreu on es refereix, en les parts següents del seu text, a quantitats petites, o esvanescents, o a quantitats últimes, mai no les hem d'entendre com a quantitats fixes que tenen una determinat valor, sinó com a quantitats que disminueixen infinitament:

> Així, en tot el que segueix, per tal de ser comprès amb més facilitat, allà on s'esdevingui que mencioni quantitats finals, o evanescents, o darreres, no heu de suposar en cap cas que es tracta de quantitats d'una determinada magnitud, sinó que estan concebudes com quelcom que disminueix sempre sense fi (*Ibid*., pàg. 39; orig. pàg. 88).

Malgrat que Newton no desenvolupa un algorisme o càlcul per a la determinació dels límits, estableix un principi per fer-ho, que va ser elaborat extensament pels autors posteriors: el principi que el límit podria inferir-se del comportament que presenten les variables **en el finit**:

> Les quantitats, i les raons de quantitats, que en temps finit tendeixen de forma constant a la igualtat, i que abans de la fi del temps s'apropen una a l'altra més que qualsevol diferència donada, finalment esdeven iguals (Newton 1969, pàg. 29; orig. 1972, pàg. 73).

Aquest principi constitueix la base per decidir la identitat d'expressions en el càlcul nou.

Guicciardini anomena aquesta concepció una *teoria intuïtiva dels límits* (Guicciardini 1989, pàg. 5). En qualsevol cas, podem afirmar que Newton no va elaborar una teoria algebraïtzada del límit. No presenta cap tractament operatiu dels límits, cap designació per a les variables i els índexs límits del procés, i cap signe particular per al límit. Com mostren les citacions anteriors, les descripcions i les argumentacions són completament verbals.

2. Els límits com a resposta de Maclaurin a Berkeley

La Gran Bretanya —on es van crear els *infinitèsims*— fou el país que més ràpidament els va abandonar. Foren reemplaçats pels mètodes del límit, basats sempre, però, en processos geometricocinètics. Després dels primers intents de Thomas Bayes (1702-1761) i de Benjamin Robins (1707-1751) per aconseguir d'establir un mètode del límit (*cf. ibid*., pàg. 46 i 45), el voluminós *A Treatise of Fluxions* (1742) de l'eminent matemàtic escocès Colin **Maclaurin** formulava el refús matemàtic dels *infinitesimals* i elaborava com a base del *càlcul* un mètode geomètric del límit.

El punt inicial de l'amplíssima aproximació a la justificació del *càlcul* de Newton era que refusava —com Newton (*cf*. secció 5)— suposar (l'existència de) quantitats infinitament petites i admetia només quantitats finites:

> Sempre he representat les fluxions de tots els ordres amb quantitats finites, essent la suposició de magnituds infinitament petites un *postulat* massa atrevit per a una ciència com la geometria (Maclaurin 1742, pàg. IV).

Maclaurin només admetia quantitats que tinguessin una «existència real» (*ibid*. pàg. 3). Les quantitats infinitament petites no eren quantitats admissibles; una divisió infinita no era executable. El terme clau en la discussió de Maclaurin és el terme *assignable*. La divisió en un nombre assignable de parts és admissible:

> Però [una magnitud donada] no pot ser, conseqüentment, dividida en un nombre de parts més gran que una d'assignable (*ibid*., pàg. 43).

En contrast, per exemple, amb l'argumentació de Varignon contra Rolle, Maclaurin es basava en els *geòmetres antics* per tal de justificar la no-admissió de quantitats que podien esdevenir infinitament grans o infinitament petites (*ibid*., pàg. 40). Igualment estava compleament convençut que els Antics mai no substituirien corbes per polígons (*ibid*., pàg. 3 i 33). D'aquesta manera, Maclaurin treia un dels pilars essencials del concepte del càlcul diferencial elaborat per Leibniz i pels autors francesos, tot substituint-lo per un altre concepte que, segons ell, havia estat la base de la geometria de l'antiguitat, o si més no de la geometria d'Arquimedes: el concepte de límit. Arquimedes, deia, no substitueix mai corbes per polígons, sinó que, més aviat, havia refinat els polígons circumscrits i inscrits fins al punt que li permetessin d'aconseguir proposicions relatives a les corbes inscrites enteses com a «límits».

El que resulta realment sorprenent del text més substancial de Maclaurin és que usava, com un autèntic principi (*ibid*., pàg. 10), el concepte de *límit* com quelcom tan evident que no precisava ser introduït de manera explícita o reflexiva. En el suplement posterior del primer volum, hi ha només un paràgraf breu, «Dels límits de les raons» (pàg. 420-424), però no conté cap fonamentació del mètode dels límits, sinó més aviat indicacions pràctiques per tal de calcular els límits de raons.

El que és notable, però, en l'ús pràctic del mètode dels límits de Maclaurin és el fet que sempre inclou reflexions sobre si el límit buscat **existeix** (*cf*., per exemple: *ibid*., pàg. 217 i s.), quelcom que molts dels seus successors ja no faran. La qüestió constant en aquest afer és si hi ha un *límit assignable* o, si «no té límit», és la conseqüència de la posició fundacional d'admetre solament el finit, és a dir, quantitats *assignables*.

Sempre s'ha fet notar que el *Treatise* de Maclaurin és de lectura difícil (*cf*. Guicciardini 1989, pàg. 50). Aquesta consideració, tanmateix, no és només el resultat de l'ús que fa de demostracions geomètriques indirectes. El tret característic del seu estil és més aviat que formula en la més pura tradició, de manera purament verbal —sense equacions, i sense l'ús de signes algèbrics i es confina així a si mateix exclusivament a l'estudi dels llocs geomètrics. Com declarava Maclaurin, aquest estil era intencionat a fi d'eliminar qualsevol mena de crítica tot apel·lant als mètodes tradicionals.

És, doncs, comprensible que Maclaurin, a causa del seu propi concepte geomètric de límit, contrari a l'algebraïtzació, no faci cap intent per tal d'algebraïtzar-ne el concepte: ni en la primera part, una part exclusivament geomètrica, ni tampoc a la segona, en la qual admet per exemple mètodes infinitesimals com abreviacions essencialment exactes i heurístiques. Maclaurin no introdueix cap signe propi per al *límit*, ni tampoc no estableix lleis per operar-hi. Per tal d'entendre la posició de Maclaurin pel que fa a la fonamentació, és del tot essencial adonar-se que suposa com una premissa inqüestionable que totes les variables («fluents») es basen en processos geometricocinemàtics —basats en operacionalitzacions del moviment, l'espai, i la velocitat (*cf*. *ibid*., pàg. 52 i s.). La premissa, actuant encara més acusadament que en Newton, produeix que la continuïtat i la diferenciabilitat siguin pressupostos fonamentals autoevidents sense cap necessitat de reflexió ulterior.

3. Recepció a l'*Enciclopédie* i l'expansió ulterior

Tanmateix, però, l'adopció més intensa del refús de les quantitats més petites i la substitució pel mètode del límit no s'esdevingué a causa de l'obra de Maclaurin, sinó tanmateix a causa d'un autor francès, el qual havia llegit el llibre de Maclaurin i aportà idees ulteriors pròpies. Aquest autor era **D'Alembert**, i tenia com a objectiu la claredat i el rigor conceptuals. En aquest context, D'Alembert afavorí una posició que sostenia l'algebraïtzació dels conceptes fonamentals de l'àlgebra.

L'objectiu primari de l'*Encyclopédie* consistia a clarificar els conceptes bàsics de l'anàlisi o a clarificar «*la métaphysique du calcul différentiel* » (D'Alembert, *Différentiel*, 1751, pàg. 985). La *métaphysique* més precisa i exacta del càlcul diferencial havia estat aplicada per Newton, si bé deia que no s'havia preocupat d'aprofundir-la:

> Podem dir que la metafísica d'aquest gran geòmetra [Newton] sobre el càlcul de fluxions és més exacta i més il·luminadora, en la mesura que ens permet de veure'l.
>
> Mai no considerà el càlcul diferencial com un càlcul de quantitats infinitament petites, sinó com el mètode de les raons primeres i darreres, que és el mètode de cerca de límits de raons [...]. La diferenciació de les equacions consistia només en la recerca de límits de les raons entre les diferències de les dues variables de l'equació (*ibid*, pàg. 985 i s.).

L'entrada, pròpiament dita, de *límit* a l'*Encyclopédie* és molt breu. D'una banda, es referma en la posició de principi que estableix que el càlcul diferencial establert de manera correcta només pot erigir-se sobre els *límits*:

> La teoria dels *límits és la base de la vertadera Metafísica del càlcul diferencial* (D'Alembert, *Límit*, 1765, pàg. 542).

I, alhora, en aquest punt, és el primer a introduir aproximacions per a una reflexió conceptual del concepte de límit, tot declarant que, si bé la quantitat podria aproximar-se al límit arbitràriament, mai no el podria atrapar:

> El *límit* mai no coincideix [amb la quantitat], o mai no esdevé igual a la quantitat de la qual n'és el *límit*: però, el primer s'hi apropa cada vegada més i més, i difereix d'ell tan poc com es desitgi (*ibid*.).

Aquesta determinació del concepte implica alhora la posició excepcional del zero. A més, la determinació aclareix que aquí, de bell nou, el concepte fonamental tracta d'una **quantitat geomètrica** —i no pas encara del concepte de funció. En l'entrada *Différentiel* hom pot trobar una aproximació que intenta posar de relleu l'aspecte de l'algebraïtzació. En aquesta entrada, D'Alembert distingeix entre el *límit geomètric* de quantitats com la determinació d'una certa línia de la figura, i el *límit algèbric* com el terme algèbric expressat amb lletres que fan referència a quantitats (D'Alembert, *Différentiel*, 1751, pàg. 986). El seu interès primordial, tanmateix, era el problema geomètric. El càlcul diferencial consistia a trobar l'expressió algèbrica de la raó de línies ja conegudes:

> Aquest càlcul consisteix només a determinar algèbricament el límit d'una raó quan ja ha estat expressada amb línies i a igualar aquests dos límits, per a la qual cosa pot deteminar-se una de les línies desitjades (*ibid*.).

D'acord, doncs, amb aquest domini del concepte geomètric de quantitat, a l'obra de D'Alembert no trobem cap intent de reflexionar, o establir, operacions amb límits.

El predomini geomètric de D'Alembert esdevé encara més notable pel fet que l'entrada de *límit* de l'*Encyclopédie* té una entrada paral·lela, en competència, de l'abat **De la Chapelle**! L'entrada paral·lela de l'abat, encara que no advoca per una posició essencialment diferent, tendeix clarament a una comprensió més fortament algebricooperativa del concepte de límit.

D'entrada, De la Chapelle presenta la seva noció de límit en el seu manual *Institutiones de Géométrie*, 1746, i, probablement, és el primer a aplicar de manera explícita límits en geometria elemental i no pas en anàlisi, com era el costum. La secció que fa referència a la *Solidesa dels cossos* s'inicia amb una polèmica aguda en contra del punt de vista tradicional —molt més adreçada en contra del mètode dels indivisibles que no pas en contra de les quantitats infinitament petites. De la Chapelle anomena els que hi són favorables *Indivisibilistes*, i en parla com si fossin membres d'una secta: «Sectaris de Cavalieri» (De la Chapelle, t. II, 1765, pàg. 338).

Com ja havia fet Maclaurin abans que ell, De la Chapelle no gosa tampoc presentar el mètode dels límits com una cosa novella. S'esforça també a *allitar-se* en l'autoritat del Antics i designa el mètode dels límits com si fos el mètode d'exhaustió (*ibid*., pàg. 343). Tanmateix estableix una puntualització en declarar que l'aspecte nou que acabava d'introduir consistia a afegir, al mètode, dues *proposicions* noves que li permetien presentar-lo com quelcom «indubtable».

- La primera era la proposició que establia: Si dues quantitats *A* i *B* són els límits de la mateixa quantitat *C*, les dues quantitats, *A* i *B*, són iguals. El propòsit d'aquesta *proposició* era permetre la inserció d'un límit ja determinat numèricament (*ibid*., pàg. 363).
- La segona proposició consistia a transferir la propietat de límit al producte. Si *C* és el límit d'una quantitat *A*, i *D* el límit d'una quantitat *B*, aleshores $C \times D$ és el límit de $A \times B$ (*ibid*., pàg. 360 i s.). Més endavant, aquesta proposició li era necessària per poder determinar el volum dels sòlids les superfícies dels quals estaven limitades per línies corbes.

De la Chapelle dóna una **definició** de límit, només en aquest indret —i solament en una nota a peu de pàgina:

> Hom diu que una magnitud [*grandeur*] és el límit d'una altra magnitud [*grandeur*] quan la segona es pot aproximar a la primera més que una certa quantitat donada, tan petita com hom pugui arribar a imaginar. D'això en resulta que la diferència entre una quatitat [*quantité*] i el seu límit és absolutament indeterminable (*ibid*., pàg. 360).

En aquesta definició, el fet remarcable és la indeterminació de les expressions: *grandeur* i *quantité*, ja que s'usen l'una al costat de l'altra sense cap diferència de significat. Potser més revelador encara és el fet que no s'usa el terme *variable* i que tampoc no apareix enlloc el terme *constant*.

A l'entrada *límit* de l'*Encyclopédie*, en paral·lel a la contribució de D'Alembert, De la Chapelle repeteix aquesta definició al peu de la lletra i hi afegeix, després de donar alguns exemples, les seves dues *proposicions* (De la Chapelle, *Límit*, 1765, pàg. 542). Malgrat la indeterminació d'aquesta definició de límit —D'Alembert, en no donar-ne cap, havia seguit Maclaurin—, la segona *proposició*, en particular, ofereix una aproximació a l'operativitat amb límits, i s'adreça cap a una algebraïtzació d'aquest concepte que, des del principi, havia estat usat d'una manera purament geomètrica.

4. Les primeres explicacions de *límit* com a aproximació

Com hem vist, el mètode dels *límits* fins ara s'havia proclamat més aviat com una aproximació teòrica, però en cap cas com quelcom realment per a l'ús pràctic, ni tampoc els càlculs diferencial i integral no s'havien presentat pas, com un tot, sobre aquesta base.

Les primeres elaboracions del càlcul diferencial i integral que anessin més enllà de simples mencions eclèctiques en manuals universitaris van ser presentades en dos llibres de text adreçats a un públic ampli no necessàriament connectat amb el context escolar. Un problema comú en aquests dos textos de 1777 i 1781, de J. A. L. Cousin i R. Martin, era que interpretaven el mètode dels *límits*, basant-se en les indicacions de Newton i Maclaurin, com una concepció elaborada ja pels Antics i, per tant, intentaven d'establir-ne la precisió treballant sobre conceptes de geometria elemental.

El primer text que afirma que es fonamenta exclusivament en els *límits* és l'obra *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* (1777) de Cousin. Si bé Jacques-Antoine-Joseph **Cousin** (1739-1800) —membre de l'Académie des Sciences de París— havia estat professor de matemàtiques a l'École Royale Militaire de París des de 1770 fins que la institució, fundada l'any 1755 per a l'educació dels joves nobles, fou clausurada en 1776, la seva ocupació primordial era la de professor de matemàtiques i física experimental del Collège Royal, la qual ocupà des que hi accedí el 1769 fins a la mort. Les lliçons del Collège Royal, una institució que no feia exàmens ni concedia títols, anaven adreçades al públic en general. El text de Cousin mostra que no havia estat estructurat amb propòsits docents, sinó com una mena de compendi que recollia el coneixement contemporani. El seu volum —tenia més de 800 pàgines— confirma que no s'havia pensat per a la docència.

En un llarg *Discours préliminaire*, Cousin desenvolupa la *métaphysique* del càlcul. Per fer-ho, critica tots els mètodes emprats fins aleshores: rebutja la doctrina dels *infiniment petits*, dient que ningú és capaç de formar-se una «*idée nette et précise*» d'aquestes quantitats. La solució de Leibniz de substituir quantitats infinitament petites per quantitats incomparablemente petites destrueix, afirma, l'exactitud del mètode (Cousin, 1777, pàg. V f.). El mètode de les fluxions de Newton, si bé no contradiu el rigor matemàtic, ha de confiar en els conceptes de moviment i velocitat. Això, afirma, introdueix una idea que és completament aliena a la matemàtica i que, en cap cas, no és simple. La justificació de Maclaurin —que estableix que el mètode de les fluxions és almenys tan rigorós com el mètode dels Antics— reposa sobre la teoria del moviment (*ibid*., pàg. VI f.).

En canvi, Cousin atribueix a D'Alembert el mèrit d'haver estat el primer a provar que la base real del càlcul diferencial i integral es derivava del mètode dels Anciens, el qual hom coneixia amb el nom de *Méthode des limites*. Abans de la publicació de D'Alembert, a l'*Encyclopédie*, aquest mètode, «*la vraie métaphysique*», era completament desconegut (*ibid*., VII). Ell (Cousin) intentava de presentar-lo de la manera més clara possible.

Cousin entenia el límit com una quantitat arbitrària, aproximada indefinidament per una variable sense arribar mai a identificar-s'hi —com en l'exemple del cercle inscrit o circumscrit per polígons (*ibid*., pàg. X).

Fent que una variable disminueixi prodríem aproximar arbitràriament el zero, sense assolir-lo mai: «La idea que tenim del zero és que és un límit al qual raons decreixents s'hi aproximen de manera contínua, sense atrapar-lo mai» (*ibid*., pàg. IX). Més endavant, Cousin declara explícitament que «Ni l'infinit ni el zero no són quantitats». I aclareix: «Ambdós són límits als quals certes quantitats s'aproximen contínuament, sense assolir-les mai» (*ibid*., pàg. IX).

Per operar amb límits, Cousin, com De la Chapelle, amb qui òbviament estava vinculat, estableix *dos* principis. El seu primer principi operacional és idèntic al primer de De la Chapelle (dues quantitats que són el límit de la mateixa quantitat són idèntiques). Tanmateix, Cousin substitueix el segon principi relatiu al producte de quantitats per un principi que concerneix a les relacions entre dues variables:

> Si dues magnituds, que creixen o decreixen contínuament, mantenen entre si una raó invariant, aquesta raó serà la del límit de les dues magnituds (*ibid*., pàg. X).

Cousin no dóna, però, cap justificació d'aquests dos principis, que declara que són la base de tot el mètode dels *límits*. Més endavant, no obstant això, dóna un exemple de com s'apliquen. Aproxima una circumferència i una el·lipse —ambdues corbes amb el mateix eix, i pel que fa a l'el·lipse, el llarg— i hi inscriu ambdós polígons, que tenen la raó de l'eix llarg de l'el·lipse al curt. Aquesta raó, diu, és sempre la mateixa. Per tant, els límits també, essent aquests límits la circumferència i l'el·lipse (*ibid*., pàg. XIII).

Aquestes primeres elaboracions del mètode dels límits no eren específiques per a l'anàlisi, sinó que reflectien més aviat conceptes de geometria elemental. En conseqüència, aquest estadi és comparable amb el dels indivisibles, en el qual objectes estàtics de geometria eren també tractats sense disposar encara dels conceptes de variable o de funció. Aquest caràcter paral·lel es fa també evident en la **definició** general del concepte dels *límits* del seu text principal:

> Hom diu que una magnitud en té una altra com a *límit*, quan hom imagina que l'aproxima de manera que només difereixen d'una quantitat tan petita com es vulgui, sense arribar però a coincidir mai (*ibid*., pàg. 17).

Aquí Cousin adopta el concepte vague del text de geometria de De la Chapelle, i de l'entrada posterior de l'*Encyclopédie*, sense introduir el terme de *variable*, i sense fer cap diferenciació entre quantitats variables i constants. D'altra banda, podem observar una novetat substancial.

S'adona òbviament del fet que el mètode del límit requereix que el límit tingui el seu propi signe.[1] Aleshores ho declara usant un **signe** distingit per designar el límit. No introdueix, no obstant això, un signe general, sinó únicament un signe per als límits dels quocients de diferències:[2]

> Usarem un signe per designar la raó de les diferències de dues quantitats variables. Si les dues quantitats són x, y i $\Delta x : \Delta y$ la raó de les diferències, en la resta del text usarem $dx : dy$ per designar el seu límit (*ibid*., pàg. 32).

El segon autor que hem de discutir com influït per Garção Stockler és Roger **Martin**, i el seu text *Éléments de Mathématiques* (1781). El text de Martin, d'acord amb el subtítol «*à l'usage des écoles de philosophie du Collège Royale de Toulouse*», estava clarament destinat al context universitari. I, atès que, d'altra banda, va elaborar una presentació més detallada del seu punt de vista sobre l'infinit, i del càlcul diferencial, en dos tractats adreçats a una acadèmia, podem considerar que els seus tractats estaven pensats també per a un públic més ampli. Les dues publicacions tingueren una certa influència a l'estranger.

Com Cousin, Martin estava convençut que D'Alembert, amb la seva idea de *límit*, presentada com una adaptació del mètode d'exhaustió grec, havia estat el primer a formular una justificació exacta del càlcul diferencial (Martin 1781, pàg. LVI). Difereix, tanmateix, de Cousin en la seva definició **independent** de límit:

> Per límit d'una quantitat variable entendrem el valor o estat al qual tendeix sempre quan varia, sense mai atrapar-la; però al qual, no obstant això, s'apropa tant que arriba a diferir-hi menys que qualsevol quantitat donada (*ibid*., pàg. 317).

No solament trobem formulada aquí la petitesa de la diferència gairebé amb tanta precisió com la que aconseguirà la forma estàndard, sinó que, d'una banda, relaciona clarament el procés del límit

1. «Recordem que, en el text de Schubring, *signe* significa 'símbol'». (N. del t.)
2. «El que correspon a la derivada, en termes actuals». (N. del t.)

a una variable, i, d'una altra, el *valor* (constant) de la variable com a límit, la qual cosa significa una conquesta d'innovació genuïna. Martin havia introduït el concepte de *valor* en la seva secció dedicada a l'*anàlisi*, explicant l'*anàlisi* «com el mitjà per trobar una expressió algèbrica, el valor específic de les quantitats quan es troben combinades amb d'altres». Sense haver definit de manera formal *valor*, el text de Martin no deixa mai clar que, per quantitats, entén quantitats constants que satisfan les condicions algèbriques respectives —per exemple, les arrels de les equacions (*ibid*., pàg. 132). Martin no introdueix, tanmateix, cap signe per al seu límit.

En els fonaments del mètode del límit, Martin es relaciona directament amb Cousin, i també, per tant, amb les concepcions de l'objecte que pertanyen a la geometria elemental. I, si bé no adopta el primer principi de De la Chapelle i de Cousin, adopta el segon de Cousin i el converteix en un «teorema» sense demostració. El que interessa, tanmateix, és que Martin, generalitzant aquest principi/teorema, estableix el primer principi d'intercanvi de límits. Com a teorema III, estableix la proposició següent:

> Si dues successions de variables —creixents o decreixents—, de les quals la successió que té els elements $a, c, e, g, \ldots$ porta a la quantitat u, i la segona, que consta dels elements $b, d, f, h, \ldots$, a la quantitat x, aleshores la successió de les raons dels termes respectius —i.e .: $a:b, c:d, e:f, \ldots$— porta a la raó dels dos límits.[3]

Explícitament afegeix una formulació del principi d'intercanvi de límits —que usa repetidament— i que és la següent:

> O sigui, que el límit de les raons serà la raó dels límits.

Potser s'ha observat que Martin, en el seu «teorema», designa el límit com una «quantitat» i no pas com un «valor». Per a ell això té un significat sistèmic, ja que tot seguit afirma que el teorema no se satisfà en el cas en què els límits siguin nuls. El zero, diu, no és una *quantitat* i, per tant, no hi pot haver cap raó entre dos límits d'aquesta faiçó.

Podem considerar que això era una creença bàsica de molts dels matemàtics d'aquest període. El zero era considerat, com l'infinit, una excepció, i en cap cas se li concedia l'estatus de nombre. Aquesta opinió havia presentat, des de feia molt de temps, conseqüències punyents en l'elaboració del concepte de límit.

Un fet remarcable relatiu als dos autors esmentats en aquesta secció, Cousin i Martin, és que ambdós van editar els seus textos, en segona edició, un cop acabada la Revolució Francesa, i això significa que ho foren durant l'estadi eufòric d'algebraïtzació de l'anàlisi. És revelador consultar els canvis que es produeixen en aquestes segones edicions. L'edició del text de Martin aparegué el 1802, vint anys després de la primera. Com hem vist (*cf*. Schubring, 2005, cap. II. 2.10.1, pàg. 116), Martin es trobava involucrat en la tasca parlamentària posterior a la Revolució. Pel que fa als conceptes, la segona edició és idèntica a la primera, i àdhuc en els termes i els signes involucrats. Només apareixen petits canvis en els mots.

Cousin va publicar la segona edició en 1796. És particularment remarcable una innovació relativa als signes. A la segona edició, Cousin, per primera vegada, aplica el signe *lím* i l'insereix operativament, per exemple en l'equació:

3. «És clar que encara no era una pràctica matemàtica usar la notació dels subíndexos per a designar els termes de les successions». (N. de l'a.)

$$\text{lím.}\frac{\Delta(E \cdot CK)}{\Delta E} = x \quad \text{(Cousin 1976, pàg. 135).}^{4}$$

En l'ús dels seus signes, Cousin no era, però, consistent. Els confinà a un únic capítol, el de la mecànica. En el capítol precedent, usava sempre una forma verbalitzada, com ara

$$\textit{límit de}\frac{\Delta LF}{\Delta x} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} \quad \text{(íbid., pàg. 122).}$$

5. Expansió de l'aproximació amb límits i inici de la seva algebraïtzació

Seguint aquests primers intents d'elaborar el concepte de límit, veiem un considerable creixement en la reflexió d'aquest concepte. Una de les causes es troba en el ben conegut repte de l'Acadèmia de Berlín de 1784, una competició que donà un reconeixement científic del més alt nivell al rebuig dels *infinitament petits*.

El tractat que guanyà el premi a qui resolgués la tasca que proposava l'Acadèmia de Berlín fou *Expositition élémentaire des principes des calculs supérieurs* de Simon de **L'Huilier**, del 1786, i provocà, a més, un impacte considerable. L'Huilier (1750-1840), nascut i educat a Ginebra, fou en primer lloc un mestre privat de la residència d'un príncep polonès, i després del 1795 professor de matemàtiques de l'Académie de Ginebra, un establiment d'educació superior. Els seus treballs matemàtics estaven focalitzats en tòpics de geometria elemental, en particular, políedres, poligometria, i en la determinació de llocs geomètrics. L'Huilier no era un expert en anàlisi.

En l'assaig premiat, que havia publicat per primera vegada en 1796, objectava fortament l'ús de les quantitats infinitament petites, resp. infinitament grans, i havia elaborat una mica més encara el concepte de límit. A més, entenia aquest concepte com quelcom que estava d'acord amb el mètode dels Anciens, encara que de manera apropiada:

> El mètode dels antics, conegut amb el nom de Mètode d'Exhaustió, entès de manera apropiada, és suficient per establir, d'una certa manera, els principis del càlcul nou. (L'Huilier 1786, pàg. 6).

Un moment característic del punt de vista de L'Huilier és la seva concepció del zero —i això mostra una vegada més l'íntima relació entre els conceptes de quantitats infinitament petites i el concepte de nombre, en particular l'estatus dels nombres negatius, i també del zero. Per a L'Huilier, només el «zero absolut» és més petit que qualsevol quantitat assignable («*asignable*») (*ibid*., pàg. 137). El zero és, tanmateix, l'expressió d'una «*privation de toute existence*» —de cancel·lació de tota existència (*ibid*., pàg. 126). Els nombres estan justificats només pel caràcter ontològic de l'existència de les quantitats. El zero no és admissible com a concepte relacional. És només la personificació metafísica del no-res.

Encara que L'Huilier no proporciona cap font per al seu concepte de límit, és força evident que estava influït per Cousin i per Martin. La definició de límit de L'Huilier és força més específica que la de Cousin. Empra com a concepte bàsic el de *quantitat variable*.

> Hi ha una quantitat variable, sempre inferior o superior a una quantitat que hom suposa constant; però que pot diferir d'ella menys que qualsevol quantitat que s'hagi donat més petita que ella

4. Cousin sempre escriu un punt després del signe «lím», probablement per suggerir l'abreviació del signe. (N. de l'a.)

> mateixa: aquesta *quantitat* s'anomena el *límit* en excés o en defecte de la quantitat variable (*ibid*., pàg. 7).

Si bé L'Huilier usa la definició més específica de límit de Martin, introdueix la novetat de diferenciar entre *limite en grandeur* i *limite en petiteusse*.

En introduir aquesta diferència, L'Huilier expressa la idea que els conceptes de límit que s'havien establert abans d'ell no feien atenció al fet que l'aproximació al límit pot ser tant l'efecte de variables de valors creixents com de variables de valors decreixents. Com que encara no es disposava del concepte de valor absolut, ell separava les definicions en:

- límit «per l'esquerra» —*limite en grandeur* i en
- límit «per la dreta» —*limite en petiteusse*.

Tanmateix, no fou hàbil per afegir-hi variables que mostressin alhora comportaments alternats d'aquesta faisó.

D'acord amb el seu propi camp de treball matemàtic, tant el concepte de variable com el concepte de límit estaven motivats i s'aplicaven geomètricament. El seu context primari era el de les *corbes* geomètriques, i no pas els de les funcions (*cf. ibid*., pàg. 8 i s). Malgrat que L'Huilier discuteix les funcions i els seus límits en la part introductòria, entenent les funcions, d'acord amb el teorema de Taylor en la seva expressió formal algèbrica, com sèries de potències (*ibid*., pàg. 21 i s.), aquestes parts algèbriques són col·locades eclècticament al costat del punt dominant de les corbes.

En moltes de les proposicions de la part introductòria, L'Huilier estableix com un supòsit explícit l'obtenció dels límits i no pas llur existència. Una de les formulacions típiques és: «*Soient deux quantités variables susceptibles de limites*» (*ibid*., pàg. 11). Tanmateix, en les aplicacions, no es fa cap menció de la distinció entre *susceptible* i *no susceptible*.

L'ús del límit de L'Huilier en relació amb els signes és també revelador. En la part introductòria, no usa cap símbol propi per al límit i expressa totes les seves proposicions sobre límits verbalment —e. g. per «*le limite de*». Després d'una vintena de pàgines, apareix el signe «lim.», usat també per Cousin —també designat amb la mateixa funció com «Lim»—, però solament com un indicador immotivat sense cap explicació ni justificació (*ibid*., pàg. 24). En el text subsegüent, L'Huilier usa el signe només com una abreviació ocasional, sense cap reflexió sobre l'ús del signe, o cap aplicació operativa independent. L'únic indret on menciona de manera explícita el signe és quan cal reemplaçar-lo pel quocient diferencial:

> Una notació convenient escurça els càlculs i els fa més fàcils. Així, doncs, per indicar la raó dels canvis simultanis de P i x és convenient usar $\frac{dP}{dx}$ en lloc de $\text{lím.}\frac{\Delta P}{\Delta x}$. Per tant, $\text{lím.}\frac{\Delta P}{\Delta x}$ i $\frac{dP}{dx}$ fan referència al mateix objecte (*ibid*., pàg. 31).

Però l'èxit més excel·lent de L'Huilier fou una expansió considerable de l'aplicabilitat del concepte de límit. Mentre que els seus predecessors amb prou feines van establir dues lleis bàsiques, ell féu una elaboració sistemàtica. Una aproximació de nou encuny en aquesta línia és l'intent d'inferir la llei de la derivada producte de dues funcions P i Q de x de límits respectius A i A'. Obté l'expressió

$$\text{lím.}\frac{\Delta P\,Q}{\Delta x} = PA' + QA \quad \text{(ibid., pàg. 31).}$$

Pel que fa al progrés general del concepte de límit, és important d'observar que L'Huilier comença adoptant la proposició d'intercanviabilitat relativa al procés dels límits (com un dels seus «*théorèmes*»: «La raó límit de la raó de dues quantitats variables que accepten límits és igual a la raó de llurs límits» (*ibid*., pàg. 24), i continua amb una generalització en el sentit del segon dels significats metafísics de la llei de continuïtat de Leibniz:

> Si une quantité variable, susceptible de limite, jouit constanment d'une certaine propriété, sa limite jouit de la même propriété (*ibid*, pàg. 167).

L'Huilier declarava que aquesta proposició sobre la validesa per continuïtat de les propietats de les variables era tan bona que considerava que havia de ser el *principi* guia del seu tractat, el qual, alhora, n'era el seu cor decisiu (*ibid*.).

En el tractat que va guanyar el premi, L'Huilier no anomena cap matemàtic com a suport convenient de les seves solucions. En una nota de peu de pàgina ulterior destinada a la publicació proporciona una llista d'autors rellevants per l'encert d'evitar les quantitats infinitament petites: D'Alembert i Cousin i també els alemanys Kästner, Karsten i Tempelhoff. Omet mencionar Martin, però en la reedició de 1795 (L'Huilier, 1795, pàg. 1) de l'obra premiada, i solament en aquesta ocasió, inclou una referència a Robert **Simson** (1687-1768) —del qual havia copiat gairebé al peu de la lletra les definicions fonamentals. Simson fou el primer que dedicà un text separat al concepte de límit. Aquest tractat, que solament es conserva de manera parcial, fou publicat pòstumament en la recopilació de les obres de Simson de 1776 i reeditat per Maseres en 1807 amb el títol, *De limitibus Quantitatum et Rationum*.

L'obra de Simson es limita solament a desenvolupar, i aplicar, el concepte de límit a quantitats geomètriques elementals. Això explica també la seva focalització sobre aplicacions a raons geomètriques («*rationes*»). Després de les definicions introductòries —de les quantitats constants i variables—, Simson havia donat dues definicions de límit inferior, resp. superior, d'una variable, definicions que L'Huilier s'havia apropiat directament com a base pròpia (vegeu la pàg. 17):

> III. Si quantitas mutabilis semper minor fuerit quantitate data, sed ita augeri poterit, ut major fiat quacunque quantitate data quae minor est prima quantitate data; vel si quantitas mutabilis semper major fuerit quantitate data, sed ita minui poterit, ut minor fiat quacunque quantitate data quae major est prima quantitate data; in utroque casu quantitas prima data dicatur Limes quantitatis mutabilis.
> IV. Si ratio mutabilis semper minor fuerit quam ratio data, sed ita augeri poterit, ut major fiat ratione quacunque data quae minor est ratione prima data; vel si ratio mutabilis semper major fuerit quam ratio data, sed ita minui poterit ut minor fiat ratione quacunque data quae major est ratione prima data; in utroque casu dicatur ratio prima data Limes rationis mutabilis, in primo sciliect casu dicatur Limes crescentis rationis, in altero, Limes decrescentis rationis. (Simson 1776, pàg. 3f.).

Amb aquest text veiem que L'Huilier manllevà la diferenciació entre límit superior, resp. inferior, del de Simson. Només utilitzà Martin en la clara classificació del límit com a constant.

Simson no disposava de signe per al *límit*, i escrivia el text de manera totalment verbal, sense cap mena d'algebraïtzació, i usant exclusivament raons. En aquesta línia, també discutí —circumscrivint-se al càlcul diferencial— la raó d'increments, per exemple en el cas de les secants, de la formació de rectangles, etc. Només a les acaballes del text, Simson usa $\dot{x}$ i dx per designar els límits dels increments, palesant aleshores que la seva intenció és clarificar els problemes fundacionals de l'anàlisi (*ibid*., pàg. 26).

Bibliografia

D'Alembert, J. le Rond (1754). Differentiel. Dins D. Diderot i J. d'Alembert, *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*. París: Briasson *et alii*, tom IV, pàg. 985-989.

— (1765). Limite. Dins D. Diderot i J. d'Alembert, *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*. París: Briasson *et alii*, tom IX, pàg. 542.

De la Chapelle, J. B. (1746). *Institutions de géométrie, enrichies des notes critiques sur la nature et les developpments de l'esprit humain*. París: Debure, dos vols., quarta edició: 1765.

— (1765). Limite (Mathémat.). Dins D. Diderot i J. d'Alembert, *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*. París: Briasson *et alii*, tom IX, pàg. 542.

Cousin, J.-A.-J. (1777). *Leçons de calcul différentiel et de calcul tntégral*. París: Cl. A. Jombert, segona edició: 1796.

Edwards, C. H., Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Heidelberg.

Guicciardini, N. (1989). *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge: Cambridge University Press.

Grabiner, J. V. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

L'Huilier, S. (1786). *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs, qui a remport'e le prix proposé pat l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres pour l'anné 1786*. Berlín: G. J. Decker.

Maclaurin, C. (1742). *A Treatise of Fluxions. In Two Books*. Edimburg: Ruddimans.

Martin, R. (1781). *Élemens de mathématiques*, per a l'ús de les escoles de filosofia del Collège Royal de Tolosa. Tolosa: Robert.

Nesselmann, G. H. F. (1842). *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra. Erster Theil. Die Algebra der Greichen*. Berlín. Reimpressió: Frankfurt: Minerva, 1969.

Newton, I. (1729). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*. Traducció anglesa d'Andrew Motte de 1729. La traducció revisada i acompanyada d'un aparell explanatori i històric és de Florian Cajori. Nova York: Greenwood, 1969.

Newton, I. (1726). *Philosphi Naturalis Principia*. Tercera edició, amb lectures diverses. Reunit i editat per Alexandre Koyré i I. Bernard Cohen. Volm I. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

Schubring, G (2005). *Konflikte zwischen Generalisierung. Strenge und Anschaulichkeit: zur Entwicklung der Grundbegriffe der Analysis im 18, un 19 Jahrhundert in Deutschland un Frankreich*. Springer: Nova York.

Simson, R. (1776). De Limitibus Quantitatum et Rationum. Fragmentum. Dins R. Simson, M. D., Matheseos Nuper in Academia Glasguensi Professoris, *Opera Quaedam Reliqua*. Stanhope: Glasgow, IV, pàg. 1-33.