Què és més rodó?

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallès (Sabadell), UAB

Resum

Des d'una perspectiva constructivista de l'aprenentatge, les definicions i els teoremes no són el principi, sinó el final d'un procés que l'alumnat de matemàtiques hauria d'experimentar per a construir el seu propi aprenentatge. Amb diversos episodis d'aula de primer d'ESO s'il·lustra com es poden construir la definició de cercle i la de grau de rodonesa que s'usaran per a esbrinar quin ou és més rodó, el de guatlla o el de gallina. Mitjançant la guia del seu professor, la interacció social amb els seus col·legues i successives aproximacions d'exemples i contra exemples, els estudiants són capaços de concretar i de construir tant la definició de cercle com la del grau de rodonesa. El treball es tanca amb una anàlisi de les implicacions didàctiques del procés de cara a cursos posteriors de l'ESO.

Paraules clau

aprenentatge matemàtic, constructivisme, cercle, grau de rodonesa.

Abstract

From a constructivist viewpoint of learning, definitions and theorems are not the beginning but the end of a process that mathematics students should experience in order to build their own learning. By means of several experiences in a first year secondary education classroom, we show how the definitions of circle and degree of roundness are created. Both definitions are used to find out which of the following is rounder, a quail egg or a chicken egg. Under the guidance of the teacher, the social interaction with classmates and successive approximations of examples and counterexamples, students are able to specify and create both the definition of circle and the degree of roundness. The work finishes with an analysis of the didactic implications of the process with respect to future secondary education courses.

Key words

mathematical learning, constructivism, circle, degree of roundness.

Introducció

A l'Institut Vallès de Sabadell, els crèdits de síntesi de l'ESO es desenvolupen al voltant de lectures. Des de les diferents àrees es plantegen activitats d'ensenyament i aprenentatge adreçades a comprendre la narració i els elements que la componen i que l'alumnat treballa en grups de quatre o cinc persones.

El crèdit de síntesi de primer d'ESO es basa en la *Historia de una gaviota y del gato que le enseñó a volar*, de l'escriptor xilè Luis Sepúlveda. L'obra relata la història d'un ou de gavina orfe del qual una comunitat de gats de carrer s'ha de fer càrrec amb la idea de salvar el germen de vida que inclou i educar-lo segons és propi de la seva natura d'au. Això implica que els gats hauran d'ensenyar a volar la gavineta, tot i que no tinguin ales ni sàpiguen fer-ho.

La novel·la ve a ser la crònica d'un procés d'aprenentatge entre diferents, ja que «es fácil querer a los iguales, difícil amar a los diferentes» (p. 103-104). D'una banda, la gavina ha d'aprendre a volar. D'altra banda, els seus progenitors adoptius han d'aprendre a ensenyar-li allò que ni saben fer i que no forma part de la seva natura. El paradigma del coneixement enciclopèdic és present en la insistència amb què el gat Sabelotodo reitera una vegada i una altra que «todo está en la enciclopedia». L'enciclopèdia servirà als gats per a conèixer les necessitats alimentàries del pollet de gavina, però no l'ensenyarà a volar ni els gats aprendran la manera d'ensenyar-li-ho. Al final, la gavina haurà d'arriscar-se: «Al borde del vacío comprendió lo más importante...» (p. 136). A volar, se n'aprèn volant, igual que, de matemàtiques, se n'aprenen fent-ne.

Les activitats de matemàtiques del crèdit es plantegen transversalment, sobretot amb tecnologia i llengua. Però la més destacada és possiblement l'adreçada a esbrinar quin ou és més rodó, un ou de gallina o un de guatlla? L'ou és protagonista de la primera part de la novel·la. La seva forma és rodona, malgrat que no es tracta d'una esfera. Per tant, no és perfectament rodó. Així es planteja fins a quin punt ho és, de rodó. És a dir, cal quantificar el grau de rodonesa d'un ou.

A la pràctica, és impossible disposar d'ous de gavina. Per això es treballa amb ous reals i bullits de gallina i de guatlla. En sessions de classe de tecnologia, es mesuren els ous, se'n dissenyen «nius geomètrics» ben ajustats amb forma de prisma recte (capsa) o de cilindre (tub amb tapes) circumscrits. La quantificació de la rodonesa s'assoleix mitjançant els passos següents:

1. Mesurament de la llargària i l'amplària dels ous de guatlla i de gallina.
2. Càlcul de la ràtio entre la llargària i l'amplària de cada ou.
3. Càlcul de la mitjana aritmètica de les ràtios.
4. La mitjana aritmètica més propera a 1 determina l'ou més rodó.

Prèviament a la realització de les activitats, es desenvolupen diverses sessions de classe en què es reflexiona sobre la rodonesa fins a arribar a una quantificació del grau de rodonesa d'un rectangle. Això significa que els quatre passos esmentats no es dicten a l'alumnat — no se li diu que ho faci així— , sinó que són el resultat d'un procés constructiu que duu a terme amb la guia del professor. Però abans de mostrar el desenvolupament d'aquest procés, vegem quin és el marc teòric que l'inspira.

L'aprenentatge matemàtic

Constructivisme

Jean Piaget i Lev Vigotski foren les persones més influents en la concepció constructivista de l'aprenentatge. El sistema de Piaget (1970) es basa en estructures cognitives corresponents a quatre estadis de desenvolupament del nen: sensor i motriu (0-2 anys), preoperacional (2-7 anys), operacional concret (7-12 anys) i operacional formal (a partir dels 12 anys). Els processos d'assimilació i acomodament fonamenten l'aprenentatge. L'assimilació suposa interpretar els esdeveniments mitjançant estructures cognitives ja existents, mentre que l'acomodament significa canviar una estructura per donar sentit a l'entorn. El desenvolupament cognitiu consisteix en una constant adaptació a l'entorn mitjançant una successió d'assimilacions i acomodaments. La de Piaget és una perspectiva constructivista de l'aprenentatge que es pot facilitar amb activitats i situacions que posin l'estudiant davant reptes que necessitin assimilació i acomodament. Cadascuna d'aquestes activitats haurà de tenir en compte l'estadi de desenvolupament cognitiu del nen en relació amb la seva maduresa. Observeu que Piaget situa el pas del tercer al quart estadi, de les operacions concretes a l'abstracció de les operacions formals, al voltant dels 12 anys, l'edat en què una persona inicia l'ESO.

Però Piaget no dóna un paper rellevant a l'entorn social del nen. L'amoïna més l'individu. Per a Vigotski (1978), en canvi, la interacció social juga un paper fonamental en el desenvolupament cognitiu. El grau d'habilitat que el nen pot assolir amb ajut amplia l'abast del que pot aconseguir per si sol creant l'anomenada «zona de desenvolupament proper» (ZDP), sense la qual el desenvolupament cognitiu no pot ser mai complet.

A més, Vigotski considera dos tipus de conceptes: els científics, que es construeixen de dalt a baix i que de bon principi són abstractes, però que mitjançant l'aplicació a fenòmens concrets guanyen significat, i els espontanis, que es creen de baix cap amunt i que estan lligats a les situacions concretes i són rics en significat, però potser massa locals i deslligats els uns dels altres.

S'aprecia en Vigotski una concepció estàndard i platònica de les idees científiques, ja que les considera com ens d'estrats superiors que s'aprenen mitjançant aplicacions a situacions reals. Hom diria que si Vigotski hagués d'ensenyar les matemàtiques de l'àmbit acadèmic ho faria a partir de definicions i teoremes que després s'aplicarien a situacions contextualitzades. D'altra banda, que consideri possible l'aprenentatge de conceptes a partir de situacions concretes i cap amunt ens porta a la importància que dóna al context en l'aprenentatge i que la dificultat en aquest tipus d'aprenentatge és lligar l'après fins a construir amb tot plegat conceptes de tipus científic. Això és quelcom que a matemàtiques es produeix quan, arran d'una situació concreta, se'n fan generalitzacions de les quals es treuen resultats i teoremes universals. Aquesta és la part més creativa de les matemàtiques.

L'educador acadèmic pot desenvolupar un paper molt rellevant en la perspectiva de Vigotski, però observeu que la ZDP d'una persona no té per què limitar-se al seu mestre o professor, sinó que pot abastar els seus companys de classe i altres persones afins del seu àmbit social i familiar. Si Piaget estudiava el nen de ben a prop, aïllat de l'entorn social com acostuma a passar en un laboratori, Vigotski s'adona que no pot arrabassar l'individu del context social que l'envolta.

Cognició en la pràctica

Dins de l'entorn social d'un individu, hi ha altres aspectes a tenir en compte que poden ser determinants en l'aprenentatge. Això és el que fa Jean Lave quan relaciona l'aprenentatge directament amb la pràctica. En situacions reals i quotidianes, el pensament està al servei de l'acció i la gent se les enginya per a trobar solucions. Lave (1988) no veu il·lògic ni poc rigorós el pensament quotidià, sinó sensible i efectiu en el context pràctic en què es produeix. En activitats pràctiques, l'eficàcia és un objectiu primordial. Aquest és un dels aspectes que la investigació restringida al laboratori ha passat per alt. L'altre és que, en les pràctiques desenvolupades fins fa poc al laboratori (escola), la societat i la cultura hi han estat molt poc presents.

Segons Lave (1988), el context, la interacció social i la cultura en la qual es desenvolupa una activitat són aspectes crucials de l'aprenentatge: el coneixement és *situat* i no hauria de presentar-se d'una manera abstracta deslligant-lo dels seus components decisius com s'acostumava a fer fins fa poc a les aules. De fet, hem de reconèixer que idees tan elementals, però fonamentals en matemàtiques, com el cercle parteixen de la percepció sensorial de figures circulars en l'entorn. Podem definir un quadrat o un cercle, però sempre hi haurà quelcom que se'ns escapa de l'aprenentatge si mai no hem traçat un quadrat o un cercle concrets amb regle i compàs. És a l'hora de construir realment aquestes figures quan ens fem conscients d'allò que en constitueix l'essència. Heus aquí el tercer aspecte primordial de la cognició en la pràctica de Lave: el paper que juguen els artefactes i les eines en l'aprenentatge. Aquest és un aspecte que remet a Piaget. En una activitat pràctica i en la resolució de problemes pràctics poden intervenir i resultar fonamentals processos corresponents a les quatre etapes cognitives, des de la percepció sensorial fins a la formalització, aquesta última especialment en pràctiques i problemes de tipus matemàtic.

Matemàtiques: una ciència experimental

Dins de l'àmbit matemàtic, a mitjan segle XX, alguns matemàtics ja feren públic com era el procés en què es desenvolupaven les matemàtiques. George Pólya (1988) destacava l'aspecte experimental de les matemàtiques en reconèixer que, de portes endins, les matemàtiques es desenvolupen com una ciència experimental i que, d'acord amb la filosofia científica de Popper (1994), el seu producte és falsable. Una cosa és com es fan públics els resultats matemàtics i una altra de ben diferent és com s'han obtingut. Qui ha dut a terme activitat matemàtica sap que, per a resoldre un problema o una qüestió, val tot, qualsevol idea o estratègia que condueixi cap a la solució. Un cop obtinguda, el problema és aconseguir-la mitjançant el procés de validació del coneixement matemàtic que és la demostració. Però abans d'això, per a obtenir la solució, el matemàtic ha posat a prova intuïcions fallides i experiments i analogies no sempre encertats que l'han portat a fer el que Imre Lakatos (1994) anomenava «proves i refutacions». Tots aquests encerts i ensurts també formen part del desenvolupament matemàtic i representen l'ànima del seu aprenentatge. Es tracta d'aspectes menys formals i coneguts per aquells qui no es dediquen a les matemàtiques i que ja foren assenyalats per Courant i Robbins (1996) i Davis i Hersh (1988).

En un context més educatiu com el de Pólya, val la pena destacar les estratègies constructivistes que proposa en la resolució de problemes i que, tot i tenir ja dècades, segueixen vives encara perquè són precisament essencials per fer matemàtiques i perquè serveixen per a l'autoaprenentatge: comprensió del problema, elaboració d'un pla de resolució, portar-lo a terme i revisar i contrastar la solució.

L'aprenentatge significatiu

També als voltants de mitjan segle XX, Hans Freudenthal s'adonà que, en els nivells més elementals, l'aprenentatge dels nens és discontinu i que actuen d'una manera intuïtiva, informal i, sobretot, manipulant objectes. Aquestes foren les bases del canvi que suposà no sols aplicar matemàtiques, sinó donar importància a la riquesa dels contextos en l'aprenentatge. Freudenthal criticà precisament l'aleshores anomenada matemàtica moderna, perquè representava una versió antididàctica en què les definicions i els axiomes constituïen el punt de partida, qüestió que capgira el vertader desenvolupament de les matemàtiques perquè els teoremes, les definicions i els axiomes són sempre el final del procés i no el principi. Per a Freudenthal (1972), una educació matemàtica realista ha de començar amb problemes rics en context i significat sobre els quals els estudiants reflexionin progressivament del concret a l'abstracte. És una perspectiva propera als conceptes científics ascendents de Vigotski i força allunyada de Piaget.

El més significatiu d'aquesta anàlisi teòrica és que, possiblement, Vigotski plantejava el desenvolupament descendent dels conceptes científics perquè ell mateix no era un científic i no havia viscut l'ascens del concret a l'abstracte d'aquests conceptes. Però la immensa majoria dels conceptes s'han construït del concret a l'abstracte. Freudenthal s'inclina per construir els conceptes així, per aprendre així.

Què és un cercle?

El primer pas per a parlar de la rodonesa és plantejar-se què és un cercle, la figura més perfectament rodona. Un professor ja sap el que és. Pot entrar a l'aula i definir el cercle com un lloc geomètric:

> Donat un punt *P* del pla al qual direm centre, i una distància *r* anomenada radi, la circumferència amb centre *P* i radi *r* està formada per tots els punts que es troben a distància *r* del punt P.

Tot seguit, podrà plantejar algunes activitats d'aplicació d'aquesta definició seguint el model de Piaget o el dels conceptes descendents de Vigotski perquè el concepte científic sigui assimilat i paït cognitivament. Poc importa aquí el que ja pugui saber la persona o les idees preconcebudes que del cercle pugui tenir, algunes de les quals motivades pel fet d'haver incorporat el mot «cercle» al seu vocabulari natural abans de tractar-lo en l'àmbit acadèmic.

Des de la perspectiva constructivista de Freudenthal, el procés és a la inversa i parteix precisament de les concepcions i idees prèvies de la persona i de la seva manera d'expressar-les. Per a il·lustrar aquesta idea, es transcriu a continuació un episodi d'aula sobre la concepció del cercle que es produí durant una sessió de matemàtiques de primer d'ESO. El tema a tractar era el de la divisibilitat, però foren la curiositat i les ganes de saber de l'alumnat les que feren canviar el centre d'interès portant-lo a l'àmbit geomètric. Veient que l'alumnat volia aprendre, el professor, en lloc de dir això ara no toca, no va defugir l'oportunitat que l'espontaneïtat del seu alumnat oferia.

Construcció de la definició de cercle

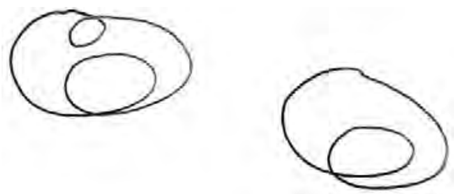
Als diàlegs següents, P assenyala les intervencions del professor i A les de l'alumnat en general, sense distingir entre alumnes ni el seu gènere. Per tant, A és, literalment, la inicial d'alumnat.

> A: El cercle perfecte no existeix.
> P: Això ho dius pel que heu fet en l'optativa de filosofia,[2] no?

En sentir l'observació de l'alumne, el professor pregunta a la classe:

> P: Sabeu què és un cercle? Doneu-me'n una definició, digueu-me què es.
> A: Una línia tancada (DEF_01).

El professor traça dues línies tancades a la pissarra:



Tothom està d'acord que no són cercles.

> A: Una línia amb infinits costats (DEF_02).

El professor traça una altra línia tancada amb «infinits costats»:

També es fa evident que aquesta, malgrat compondre's d'infinits costats, no respon a la idea de cercle que l'alumnat té al cap. La DEF_02 tampoc no és vàlida. Però, malgrat la seva incorrecció, aquesta perspectiva comporta implícitament la concepció del cercle, o almenys de la corba, com a límit dels polígons regulars. El professor pregunta:

> P: Per què ho has dit així?
> A: Perquè és com si anessis augmentant els costats, cada vegada, fins que serien infinits.

El professor es dirigeix a tota la classe per a expressar el pensament de la seva alumna i ajudar a consolidar la idea que, si anem augmentant el nombre de costats d'un polígon regular, la

2. El professor pensa en la matèria optativa «Pensar por pensar» que s'està duent a terme aquest curs i que consisteix a introduir la reflexió i l'argumentació sobre fenòmens que decideixen els alumnes mateixos. Al professor, li consta que en alguna sessió de l'esmentada optativa es va reflexionar sobre els ideals platònics i que precisament el cercle es va posar en discussió.

figura resultant s'assembla cada cop més a un cercle (DEF_03). Però aquesta concepció no sembla haver-los satisfet, ja que algú torna a intervenir:

> A: Una línia tancada perfectament rodona (DEF_04).

Tothom està d'acord que és una definició encertada. Però porta associada una qüestió prou rellevant per a una definició. El professor pregunta a l'autor:

> P: I com s'aconsegueix que sigui perfectament rodona?
> A: Amb el compàs!
> P: Sí. Potser fóra bo ajudar-nos del compàs per dir què és un cercle.

El compàs sembla inspirar-los:

> A: Una figura que té radi (DEF_05).

El professor treu un cordill del calaix de la seva taula, en lliga els extrems i el subjecta amb una xinxeta al suro que hi ha penjat en una paret. A través de l'extrem lliure, hi passa un retolador, tensa el fil i va preguntant, a mesura que va tacant el suro amb la punxa del retolador:

> P: Aquest punt és del cercle?
> A: Sí.
> P: I aquest?
> A: També!
> P: I aquest altre?
> P: També!
> P: Què tenen en comú tots aquests punts que faci que els considereu del cercle?
> A: La mateixa distància.
> P: Distància a on?
> A: Al punt clavat.
> P: Aleshores, ja tenim definició. Només cal concretar-la. Com es diu el punt clavat?
> A: És el centre.
> P: El centre de què?
> P: Del cercle.
> P: Per ser rigorosos, la línia obtinguda es diu circumferència. El cercle seria la zona delimitada per ella mateixa i el seu interior. I la distància, com es diu?
> A: És el radi del cercle.
> P: Molt bé. Per tant, ja tenim la definició de què és un cercle.

La definició es concreta (DEF_06) i s'escriu a la pissarra:

> Donat un punt *P* de la pissarra al qual direm centre, i una distància *d* a la qual anomenarem radi, la circumferència amb centre *P* i radi *d* està formada per tots els punts que es troben a distància *d* del punt P.

Revisió del marc teòric

No sols el professor va actuar de guia en l'aprenentatge, també l'alumnat (Vigotski). La definició científica de cercle s'assolí mitjançant interacció social i d'una manera ascendent, de baix a dalt (Vigotski), buscant que s'adaptés a la idea de cercle que tothom tenia al cap. Era una idea precisa de la forma a la qual mancava una expressió rigorosa. La precisió de la definició fou fruit de l'ús d'un instrument: el compàs. Però el compàs que es va fer servir no fou l'estàndard. En un compàs estàndard, el radi és invisible; en canvi, en un de cordill, el radi (cordill) és visible en tot moment. Aquesta eina no tan sols va facilitar la traça de la circumferència, sinó llur concepció i definició (Lave: cognició en la pràctica).

El compàs no solament ajudà a concretar la definició i la idea de «perfectament rodó» del cercle, sinó que establí un context real i pràctic en el qual concretar el concepte. Mitjançant el compàs, s'assoleix el primer nivell de concreció del que és un cercle, un nivell que molts dels presents a l'aula no havien assolit i que es posa de manifest en les definicions i les respostes ambigües a les preguntes del professor. Amb el compàs, el cercle guanyà claredat i, sobretot, significat, perquè era tangible. El context n'enriqueix la concepció (Freudenthal) i encara l'enriquirà més en situacions reals en què sigui protagonista, com les que s'exposaran més endavant.

Pel que fa a l'aprenentatge de l'alumnat, en lloc de donar directament la definició de cercle (perspectives de Piaget i descendent de Vigotski), el professor optà per reconstruir-la a partir del que sabien o recordaven els seus alumnes (perspectiva ascendent de Vigotski, pràctica de Lave i significativa de Freudenthal). La definició fou reconstruïda mitjançant interacció social guiada pel professor (Vigotski), que sabia on volia arribar i on portar el pensament dels seus alumnes.

Pel que fa al desenvolupament matemàtic, l'atansament envers la definició fou mitjançant proves, refutacions i contraexemples de les definicions que anaven sorgint (Pólya i Lakatos). La sisena definició és la que, a hores d'ara, continua vigent. Però d'aquí uns anys tornarà a canviar quan el cercle se situï en un entorn més algèbric i abstracte com el de la geometria analítica del pla. Aleshores, aquests alumnes arribaran a la setena definició de cercle (DEF_07):

Cercle C amb centre al punt $P = (a,b)$ i radi r : $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\right\}$.

El grau de rodonesa

La qüestió del grau de rodonesa tenia a veure amb el crèdit de síntesi al voltant de la lectura esmentada a la introducció. El problema de la quantificació de la rodonesa d'un rectangle es treballa en un parell de sessions els objectius de les quals són que l'alumnat aprengui que:

1. La rodonesa d'una figura és independent de la seva grandària.
2. Tot i no ser rodons, els rectangles més rodons són els quadrats.
3. El grau de rodonesa d'un rectangle no està vinculat a la diferència entre la llargària i l'amplària, sinó al quocient o ràtio entre ambdues dimensions.

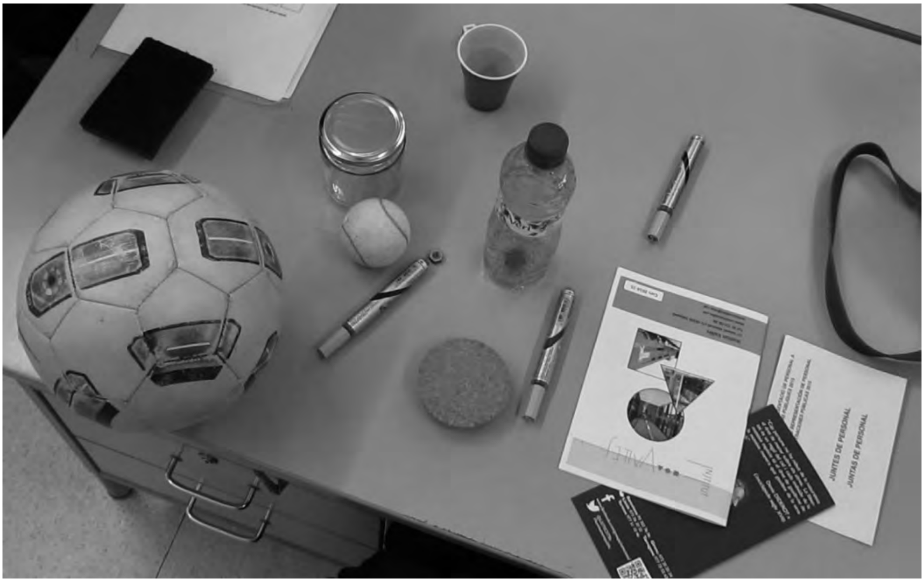
Des d'una perspectiva tradicional, això es pot fer per decret. Es poden definir la circumferència i el cercle, declarar què és rodó i què no ho és, i dictar què s'ha de fer per a decidir si un objecte o figura és més o menys rodó que un altre. Tot plegat, es pot fer en cinc minuts. Ara bé, si l'alumnat n'aprèn alguna cosa, el més probable és que el que aprengui sigui només acumulació de coneixement irreflexiu: empassant-se allò que el professor ordena empassar-se. Un altre concepte científic per assimilar i aplicar a casos concrets. Des d'una perspectiva constructivista i significativa de l'aprenentatge, es corre el risc de patir un empatx.

L'episodi següent és la crònica dels fets d'aula produïts en posar l'alumnat en les situacions (Lave) sobre les quals reflexionarem tots plegats, alumnes i professor (Vigotski) fins a arribar a assolir els quatre objectius esmentats en relació amb la rodonesa d'un rectangle. L'aprenentatge de l'alumnat no fou fruit d'una transferència de coneixement, sinó d'una construcció social mitjançant reflexió compartida i en la qual intervingueren i interactuaren cadascun dels alumnes, el professor i els companys de classe. Tot plegat desenvolupant-se mitjançant successives experimentacions, proves, refutacions i contraexemples (Pólya, Lakatos).

La rodonesa no depèn de la grandària

El professor entra a l'aula portant una bossa de la qual treu diversos objectes i els posa damunt la seva taula (imatge 1). Havent acabat de muntar la paradeta, pregunta a la classe:

> P: D'aquests objectes, quins són rodons?



Imatge 1. Diversos objectes, uns de més rodons que d'altres.

Tothom té opinió. Alguns observen que n'hi ha que són més rodons que d'altres. No hi ha cap mena de dubte que els objectes ben rodons són les pilotes de futbol i de tennis. D'altres es consideren rodons, però no del tot: pot, retoladors, got. N'hi ha que no són considerats gens rodons: l'esborrador i els fulls de paper. En sintonia amb la perspectiva ideal platònica de la qual s'ha parlat abans, n'hi ha que observen que, de ben rodó, ben rodó, no n'hi ha cap, ja que el cercle i l'esfera perfectes són impossibles de construir. El professor pregunta:

> P: Aquests objectes ben rodons, en què es diferencien?

Les respostes són diverses:

A: Uns són més grans i uns altres, més petits.
A: En la grandària.
A: Tots són ben rodons, però uns més petits que els altres.
P: Aleshores, com ho podem resumir tot això?
A: Que és igual que siguin grans o petits.
P: Quin és l'objecte més rodó?
A: Una rodona.
A: Un cercle.
P: I si dibuixem un cercle gran i un de petit, quin és més rodó?
A: Tots dos són igual de rodons.
P: Per tant, allò que és ben rodó, tant se val que sigui molt gran o molt petit.

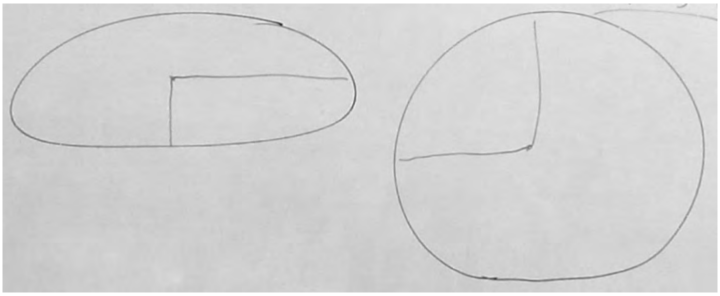
Expressat en un llenguatge més tècnic, podem dir que la rodonesa és independent de la grandària.[3] L'objectiu 1 s'ha assolit. A continuació, el professor vol adreçar l'alumnat cap a l'objectiu 2, que era veure que, entre els objectes que no són rodons, n'hi ha que ho són més que d'altres. Concreta la qüestió en els rectangles.

Els més rodons dels rectangles

El professor dibuixa dues figures a la pissarra. Una és una circumferència prou perfecta; l'altra és clarament ovoide. Un cop acabada la traça, pregunta a la classe quina és més rodona.

No hi ha dubtes a declarar-ne una de més rodona que l'altra. Però quan els pregunta el motiu, molts queden en silenci. Només una persona fa una aportació rellevant. El professor la invita a comunicar-ho a tothom des de la pissarra per a poder assenyalar damunt de les figures les seves idees (imatge 2). Acompanya els traços amb el comentari següent:

A: A la figura de l'esquerra, els radis són iguals; a la de la dreta, són diferents.



Imatge 2. La figura de l'esquerra no és ben rodona perquè «té radis diferents».

3. En un nivell superior, es podria aprofundir en la reflexió observant que el que fa la rodonesa és l'existència d'un radi. Això ens portaria a una conclusió paradoxal, ja que totes les circumferències serien igual de rodones. Forçant les coses, la circumferència de radi infinit (la recta) també mereixeria ser qualificada com a tan rodona com un anell. Una conclusió agosarada que podria provocar el canvi de paradigma fent revisar la concepció de rodonesa o fer-ne una revisió per a la rodonesa de corbes en què es faria necessari introduir el concepte de radi de curvatura. Aleshores, ambdues figures serien igual de rodones, però les corbes dels seus perfils, les circumferències, tindrien curvatures diferents.

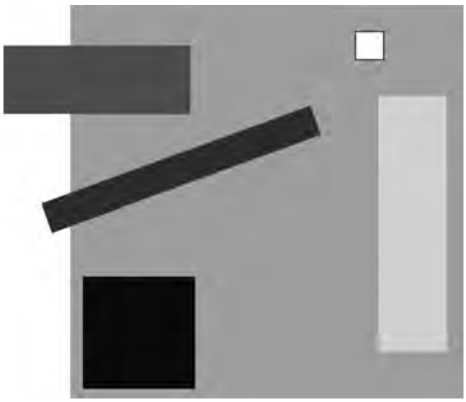
La rodonesa apareix per primera vegada relacionada amb la mesura o mesures de longituds (ROD_1). En un cercle, tots els radis són idèntics. En canvi, en qualsevol altre figura, els radis o segments que van del centre a la vora de la figura són diferents. Som davant d'una nova definició de cercle o circumferència (CIR_8): figura en la qual existeix un punt tal que tots els segments traçats des d'ell fins a la vora tenen la mateixa longitud.[4]

La persona autora havia traçat només dos dels molts «radis» possibles en cada figura; l'un era vertical i l'altre, horitzontal. Una qüestió de percepció visual s'havia transformat en una de matemàtica en la qual intervenia la mesura. Ja teníem els referents matemàtics per a quantificar la rodonesa: la relació d'igualtat o de desigualtat entre les longituds d'aquests «radis».

Quan el professor pregunta a la classe què pensa de l'explicació i l'argumentació de la seva companya, tothom està d'acord que s'entén. De fet, molt possiblement, un professor expert no ho hauria expressat d'una manera tan clara i convincent perquè mai no se li hauria acudit parlar de «radis diferents». La ment del professional matemàtic no té aquesta llibertat creativa, fa anys que fou domesticada. Això invita a una reflexió didàctica perquè potser estaria bé tenir un mot per a descriure el segment que va des del centre a la vora de la figura.[5] És a dir, un nom vinculat a figures construïdes mitjançant un punt fix anomenat centre, però amb un radi variable que canvia a mesura que l'anem girant. Aquesta persona havia creat un nou concepte matemàtic emprant incorrectament un mot matemàtic tan rigorós com és el radi d'un cercle. Però no tenia millor manera d'expressar-ho. La resta de companys i el professor ho han entès.

Passar d'aquest parell de figures ovals a un parell de rectangles és senzill. El professor mostra a la classe la imatge 3, en què apareixen diversos rectangles, i pregunta al seu alumnat:

> P: I què direm de les dues figures següents; quina diríeu que és més rodona?



Imatge 3. Diversos rectangles, alguns més «rodons» que d'altres.

4. Però, des d'aquesta perspectiva, dos punts aïllats formarien una circumferència. Els tres vèrtexs d'un triangle equilàter també. Si no acceptem aquestes conseqüències, haurem de modificar la definició restringint-la a figures connexes i tindríem la DEF_09.

5. De cara al futur acadèmic de l'alumnat, aquests radis diferents als quals fa menció la noia són el que més endavant i en un context físic s'anomenaran radis vector de posició d'un punt en moviment a l'espai.

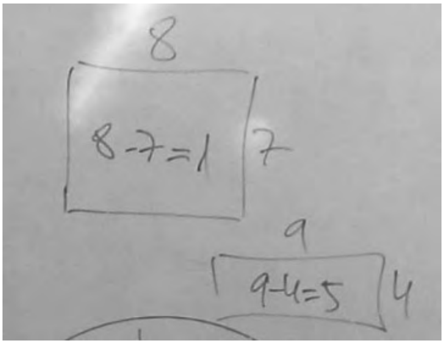
Tampoc no hi ha dubtes en el fet que, tot i tractar-se de figures que no són rodones, n'hi ha que ho són més que d'altres. Dels sis rectangles, els tres quadrats són considerats més rodons que els altres. Aleshores, té sentit preguntar-se per què.

> P: Per què dieu que els quadrats són més rodons que els rectangles?
> A: Perquè són igual de llargs i amples.
> A: Els rectangles són allargats; els quadrats, no.
> P: Això, no s'assembla al que ha explicat la persona que ha sortit a la pissarra?
> A: Els dos radis eren diferents.
> P: Quins radis?
> A: El pla i el vertical.
> P: Exacte. I què passa en un quadrat i en un rectangle?
> A: Sí, al quadrat són iguals; als rectangles, diferents.

El professor tanca la qüestió centrant-se en el fet que el determinant és la llargària i l'amplària. Un quadrat és més rodó que un rectangle perquè és igual de llarg que d'ample. El pas següent és decidir quins rectangles no quadrats són més rodons que d'altres.

Grau de rodonesa d'un rectangle

> P: Ara imaginem-nos aquests dos rectangles; un, de costats 8 i 7; l'altre, de costats 9 i 4. Quin dels dos és més rodó? (imatge 4).



Imatge 4. Dos rectangles.

Tothom està d'acord que el primer és més rodó que el segon. Però el professor vol que l'alumnat arribi a quantificar el grau de rodonesa.

> P: Això ho dieu perquè es veu que el primer està més a prop de ser quadrat que no pas el segon. Com ho podem decidir a partir de les mesures dels costats?
> A: És com allò dels radis.
> A: Sí, els costats del primer són més iguals que l'altre.
> P: Com d'iguals?
> A: 8 i 7 són més iguals que 9 i 4.
> P: Sí, però, per què?
> A: És la diferència.
> P: Quin càlcul hem de fer?
> A: Restar. Si fas 8 menys 7, dóna 1. Si fas 9 menys 4, dóna 5.

P: I en un quadrat, què passaria?
A: Donaria igual.
P: Què vol dir que donaria igual?
A: No. Vull dir que, en un quadrat, seria 8 menys 8, que dóna zero.
P: Aleshores, com decidim el grau de rodonesa entre dos rectangles que no són quadrats?
A: Amb la resta.
A: Sí. Si dóna quasi zero.

Hem arribat a veure que amb la resta dels costats tenim una primera quantificació del grau de rodonesa que representa una segona definició del concepte (ROD_2). Aquesta idea es basa a decidir el grau d'igualtat entre dues mesures, la llargària i l'amplària del rectangle. Com més iguals siguin, més quadrat, o més «rodó», serà el rectangle.

Val la pena observar que així la igualtat no s'estableix d'una manera directa, sinó indirecta. La diferència o resta quantifica la proximitat entre dues longituds perquè quantifica la distància que les separa de zero. Implícitament, estem fent servir l'equivalència següent:

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0.$$

Que dos nombres siguin iguals equival a dir que la seva diferència és nul·la. Aquesta serà la primera forma de quantificar la rodonesa d'un rectangle de costats a i b, essent $a > b$ (llargària a i amplària b). Com més a prop de zero estigui $a - b$, més quadrat (rodó) serà el rectangle.

El grau de rodonesa d'un rectangle

Però el professor sap que això no és veritat i posa a prova aquesta decisió:

P: Ara, ordeneu els rectangles següents, del més rodó al menys rodó.

El professor els dóna les mides de quatre rectangles estratègics, les mesures dels costats dels quals, prenent com a unitat la dels fulls quadriculats que tenen, són: 2×1, 3×1, 5×4 i 8×6.

A: N'hi ha que donen el mateix.
A: Dos rodons i dos que no.
P: Efectivament. Si restem les longituds dels costats, els resultats són 1, 2, 1 i 2. És així?
A: Sí. Però no és veritat. El petit 3×1 és més allargat que el 8×6.
P: Això vol dir que restar els costats no serveix per a decidir el grau de rodonesa. Què podríem fer per arreglar-ho?

La classe es manté en silenci. El professor mira de reconduir la situació:

P: Pensàvem que amb la resta ja podíem decidir quin era el més rodó de dos rectangles. Però acabem de veure que la resta no s'ajusta a la nostra idea i no serveix perquè els dos rectangles anteriors, aplicant-los la resta, surten igual de rodons i no haurien de ser així. Quina altra operació o càlcul podem fer per a decidir el grau de rodonesa?
A: La divisió?
P: Provem amb la divisió. Què passa amb la divisió dels costats d'un rectangle quadrat?
A: Donarà 1.
A: Sí. Si els costats són iguals, la divisió donarà 1.

El professor observa que la divisió és una altra manera de decidir si dos nombres són iguals. Amb la resta, el resultat és 0; amb la divisió, el resultat és 1. Si abans la rodonesa s'associava amb la proximitat a zero de la resta, ara la relacionarem amb la proximitat a 1.

P: Apliquem la divisió als quatre rectangles anteriors. Què surt?
A: Les divisions donen 2, 3, 1,25 i 1,33.
P: Per tant, quin és l'ordre dels quatre rectangles, de més a menys rodó?
A: Seria 5×4, 8×6, 2×1 i 3×1.
P: L'ordre ve determinat per les desigualtats. Però, què signifiquen aquestes divisions, per què poden servir per a decidir el grau de rodonesa dels rectangles?

La classe roman en silenci. El professor recorda el significat de la divisió, que en dividir un nombre entre un altre, el resultat diu quantes vegades més gran és un que l'altre o quantes vegades cap el segon dins del primer. Això vol dir que el rectangle 3×1 és tres vegades més llarg que ample ($3/1 = 3$), que el 2×1 és el doble de llarg que ample i que els altres dos són un xic més llargs que amples ($8/6 = 1{,}33$ i $5/4 = 1{,}25$).

La conclusió, sense entrar en qüestions de proporcionalitat geomètrica, és que el grau de rodonesa es pot quantificar dividint ambdues longituds, tercera definició (ROD_3). Usem ara una altra forma equivalent de la igualtat entre dos nombres o mesures:

$$a = b \iff \frac{a}{b} = 1$$

Hem refusat el model matemàtic additiu passant a un nou model multiplicatiu, un canvi cognitiu que porta el seu temps i que culminarà a segon d'ESO amb la proporcionalitat geomètrica.

La rodonesa d'un ou

Volem arribar a decidir quin ou és més rodó, si el de guatlla o el de gallina. Acabem de trobar un referent per a quantificar la rodonesa d'un rectangle. Però els ous són objectes tridimensionals i no precisament rectangulars. Sorgeix el problema d'adaptar el model rectangular situat en el pla a una situació espacial real com és la dels ous de guatlla i de gallina. El pla és ampliar la idea de rodonesa dels rectangles a la dels ous. Per aconseguir-ho, el professor planteja la qüestió:

P: Vist el que acabem de fer, com podem dir que un ou és més rodó que un altre?
A: Vist de través, els radis són diferents.
P: Què significa, vist de través?
A: Vist de costat. L'ou és allargat.
P: Però un ou, només té llargària i amplària?
A: No, però...
P: Si observeu un ou de través, com deia la persona que ha intervingut abans, què veieu?
A: Com una rodona allargada.
A: Sí, amb dos radis, un de més llarg que l'altre.
P: Molt bé. Però si el mireu, diguem, de punxa. Aleshores, què veieu?
A: Un cercle.
P: És perfecte, aquest cercle?

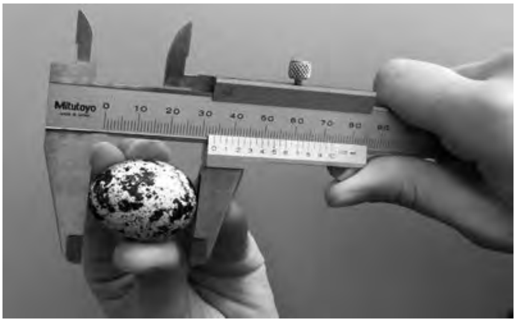
A: Es veu perfecte, ben rodó.
P: Com podríem saber si ho és o no?
A: Amb el peu de rei. Comprovant-ho.[6]
P: Molt bé. I com ho comprovaríeu?
A: Si unes quantes mides són iguals, ja seria un cercle.
A: Però totes haurien de ser iguals.
A: Vas girant. Poses el peu de rei amb la mesura i vas girant fent tota la volta. Ha de donar el mateix.
P: En efecte, si ho feu, veureu que l'ou és molt rodó perquè, un cop presa la mida del gruix de l'ou, en girar el peu de rei no haureu de canviar la mida que heu pres.[7] I aleshores, què farem per a decidir la rodonesa de l'ou?
A: Si per un costat és rodó, només fa falta mirar els altres.
P: I com són els altres?
A: Miraríem la llargària i l'amplària.

El professor tanca i recapitula observant que l'ou té tres dimensions: llargària, amplària i profunditat. Vist transversalment, l'ou apareix com un cercle aixafat amb llargària i amplària diferents. Però vist de front, apareix com un cercle perfecte. Si vist d'una banda és rodó, només cal analitzar què passa amb els altres dos. Per tant, la rodonesa de l'ou es pot reduir a la rodonesa d'un rectangle calculant el quocient o ràtio entre la llargària i l'amplària. L'ou de ràtio més proper a la unitat serà el més rodó. En cas que fos perfecte, l'ou seria rodó des de totes tres perspectives i esdevindria esfèric, una mena de pilota de ping-pong.[8]

Valor de rodonesa: una qüestió estadística

En tota la classe disposarem d'una trentena d'ous de cada tipus que caldrà mesurar i calcular-ne la ràtio entre llargària i amplària. L'últim pas serà trobar la mitjana de les ràtios de cada tipus d'ou i poder comparar la ràtio mitjana de cada tipus. La més propera a 1 determinarà l'ou més rodó.

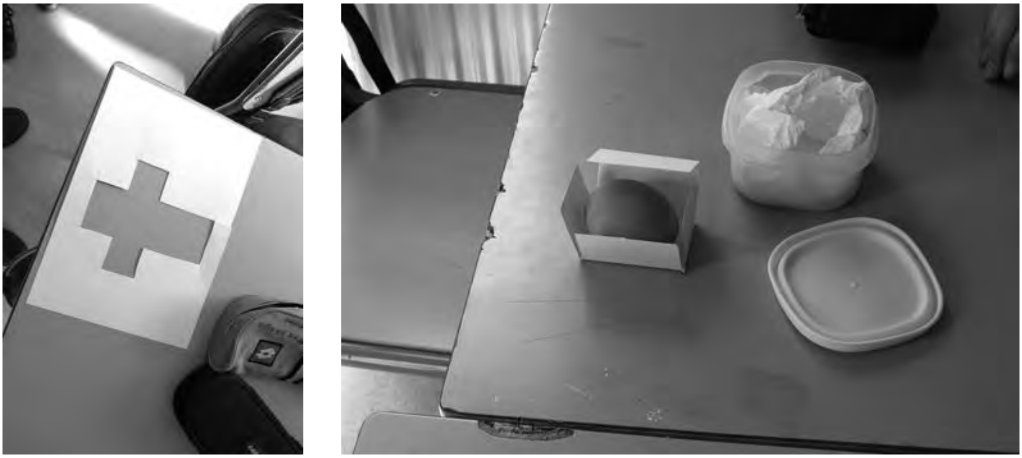
La primera part de l'activitat consisteix a mesurar la llargària i l'amplària dels ous amb peu de rei (imatge 5).



Imatge 5. Llargària d'un ou de guatlla: 33,7 mm.

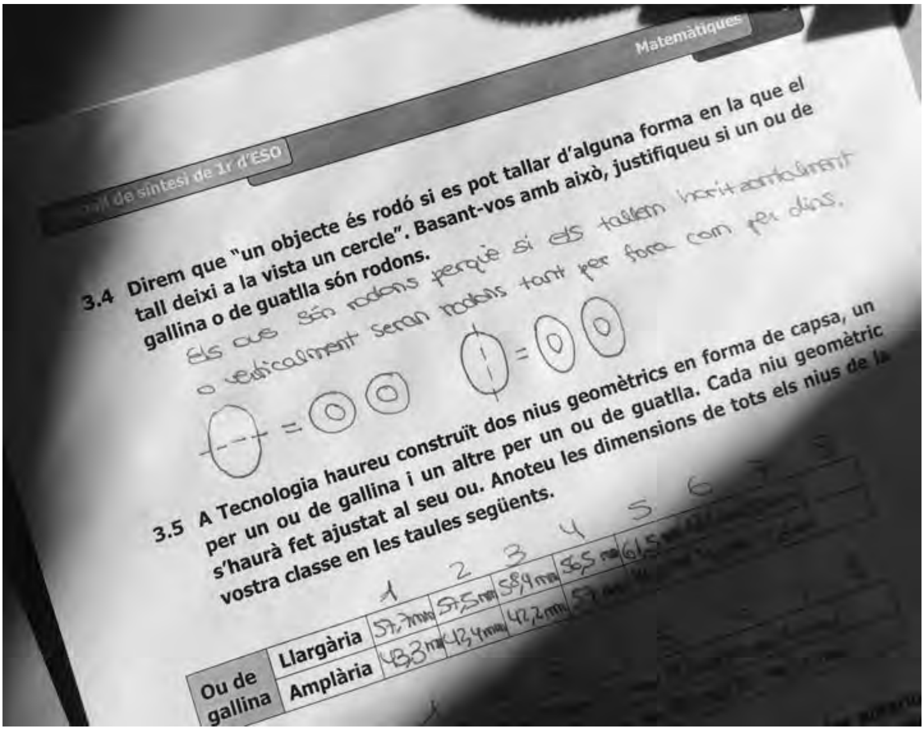
6. A l'assignatura de tecnologia han après a mesurar amb peu de rei.
7. Ja tenim una nova definició de circumferència (DEF_10): aquella figura en la qual tots els diàmetres son iguals.
8. Entre tots els ous, els de tortuga són els més rodons: esferes quasi perfectes.

En la segona fase es construeixen, també a tecnologia, les capses o nius geomètrics (imatge 6) en forma de prisma recte o cilindre per a cada ou.



Imatge 6. Desenvolupament pla del niu geomètric per a un ou de gallina.

Abans d'abordar la fase definitiva, se'ls proporciona una definició d'objecte rodó (imatge 7) basada en l'existència o no d'una secció perfectament circular. Es pretén que en justifiquin l'adequació als ous de guatlla i de gallina.



Imatge 7. Reflexió sobre el caràcter rodó dels ous en base a una secció circular.

Aquesta perspectiva resulta interessant perquè, en tallar l'ou segons un pla perpendicular a l'eix longitudinal, apareixen dos cercles, el de l'ou en si i el del rovell que, en algunes ocasions, tal com mostra la imatge 8, pot ser concèntric o desplaçar-se fins a ser tangent. Aquesta definició precisa la perspectiva un xic ambigua d'observar l'ou transversalment o frontal.

Imatge 8. Posicions relatives entre el blanc i el rovell d'ou.

La tercera fase es realitza a classe de matemàtiques. La taula següent mostra les dades corresponents a set ous de cada tipus:

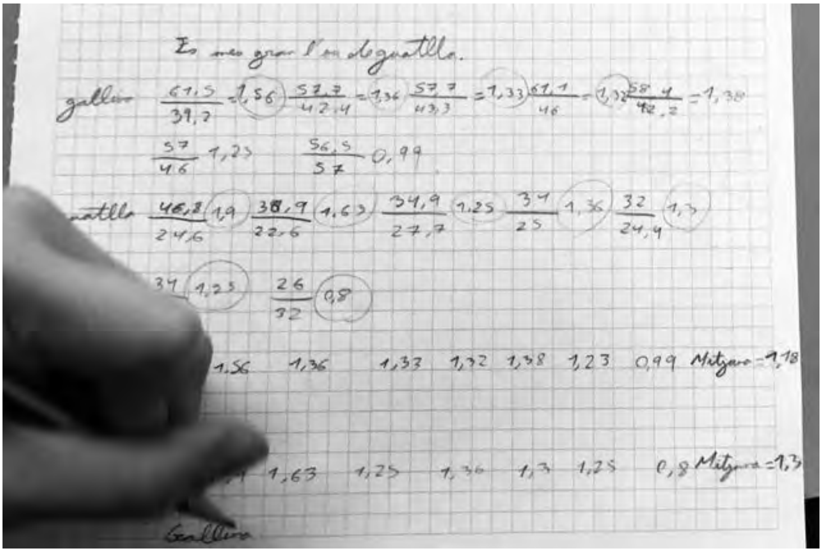
Ou de gallina	Llargària	62,1	46,5	58,1	55,2	61,5	61,1	57	
	Amplària	46,6	36,2	49,9	46	46,8	46,8	46	
	Ràtio	1,33	1,28	1,16	1,20	1,31	1,31	1,24	**1,26**
Ou de guatlla	Llargària	34,2	24,4	39,1	32	34,2	34	34	
	Amplària	26,1	21,7	25,9	25,3	24,6	25	27	
	Ràtio	1,31	1,12	1,51	1,26	1,39	1,36	1,26	**1,32**

Taula 1. Dimensions i ràtios dels ous de gallina i de guatlla.

Les ràtios obtingudes són força semblants. Però atès que 1,26 < 1,32, per menys d'una dècima la conclusió és que són més rodons els ous de gallina que els de guatlla 1,32.

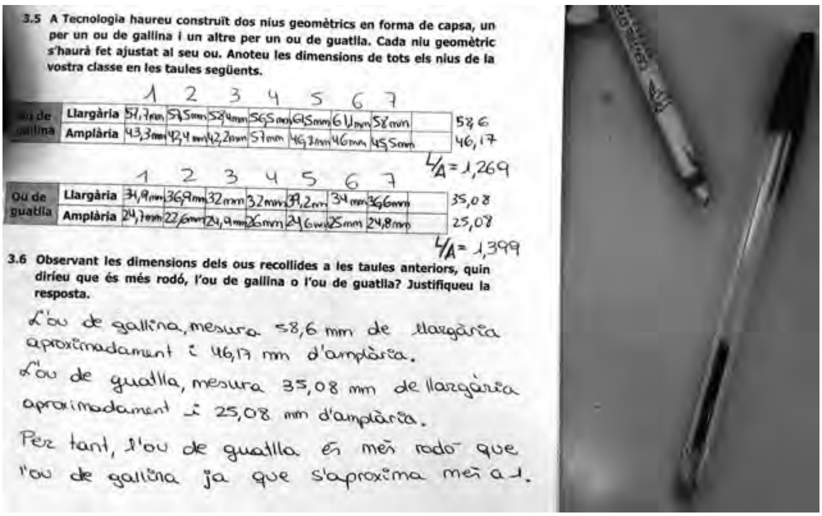
La mitjana de les ràtios no és la ràtio de les mitjanes

A l'hora de fer els càlculs de les ràtios i llurs mitjanes aritmètiques es varen produir errades significatives. La primera fou que només tres dels set grups actuaren correctament (imatge 9) calculant les mitjanes de les ràtios per tal d'obtenir la ràtio mitjana.



Imatge 9. Les mitjanes de les ràtios més properes a la unitat determinen l'ou més rodó.

Els altres quatre grups varen calcular les ràtios de les mitjanes. És a dir, que dividiren la mitjana aritmètica de les longituds entre la mitjana aritmètica de les amplàries i van obtenir una ràtio (imatge 10) que no era la mitjana de les ràtios, sinó la ràtio de les mitjanes. Això va fer que molts resultats fossin incorrectes.

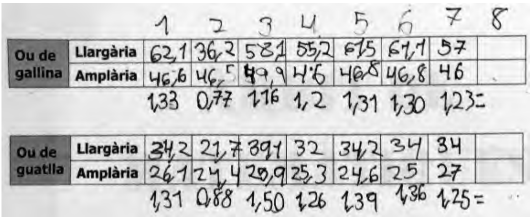


Imatge 10. Calculant la ràtio de les mitjanes en lloc de la mitjana de les ràtios.

Aquest és un fenomen que mereix atenció, però pel qual no hauríem de culpabilitzar l'alumnat abans de plantejar-ne una reflexió. La desigualtat entre la mitjana de ràtios i la ràtio de mitjanes és fàcilment observable prenent dos rectangles de dimensions 4×2 i 6×5. Les ràtios són 2 i 1,2, respectivament, i la ràtio mitjana és 1,6. En canvi, la mitjana de les llargàries és 5; la de les amplàries, 3,5, i la ràtio d'aquestes mitjanes és 1,43. Essent r_i les ràtios, i essent L_i i A_i les llargàries i amplàries, estem dient que:

$$\bar{r}_i \neq \frac{\bar{L}_i}{\bar{A}_i}.$$

Una altra errada, aquesta de tipus procedimental, fou que, a les taules de dades elaborades per l'alumnat, s'apreciaven ous en els quals l'amplària era major que la llargària, la qual cosa feia que la ràtio fos inferior a la unitat i distorsionés la mitjana de ràtios posterior (imatge 11). Aquí no hi havia excusa, ja que s'havia precisat en sessions anteriors que la llargària d'un rectangle és la major de les dues longituds independentment de la posició en què es trobi la figura.



		1	2	3	4	5	6	7	8
Ou de gallina	Llargària	62,1	36,2	58,1	55,2	61,5	61,1	57	
	Amplària	46,6	46,5	49,9	46	46,8	46,8	46	
		1,33	0,77	1,16	1,2	1,31	1,30	1,23=	
Ou de guatlla	Llargària	34,2	21,7	39,1	32	34,2	34	34	
	Amplària	26,1	24,4	20,9	25,3	24,6	25	27	
		1,31	0,88	1,50	1,26	1,39	1,36	1,25=	

Imatge 11. Confusió en les llargàries i amplàries.

Conclusions: síntesi d'un crèdit de síntesi

Construir les matemàtiques

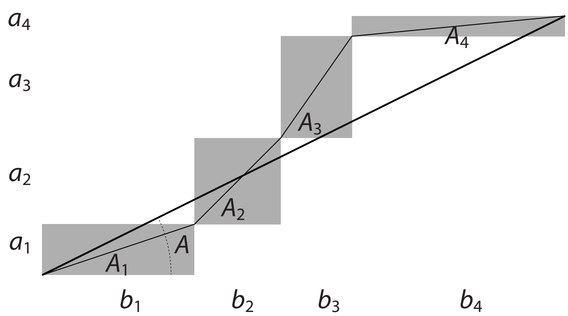
En els processos i els episodis d'aula exposats, el professor actua com a guia de l'aprenentatge del seu alumnat governant cap on van les idees i controlant la manera en què van sorgint. Partint de situacions reals es va concretant la idea de rodonesa i la seva quantificació. En el procés, també els companys formen part de l'aprenentatge i del desenvolupament cognitiu de cadascun dels membres de la classe. L'entorn social del centre educatiu afavoreix aquest desenvolupament i la posada en pràctica de l'aprenentatge constructivista de Vigotski. La construcció dels conceptes i la seva quantificació no es fa de dalt a baix, sinó de baix cap amunt, tractant d'aprofitar les idees subjectives que ja tenen els nens i les nenes per arribar a concretar-les, precisar-les i fonamentar-les en noves idees més objectives. La rodonesa deixa de ser una qüestió d'aspecte de forma per a convertir-se en un aspecte quantificable de la forma.

El desenvolupament ha posat de manifest processos assenyalats per Pólya, com ara basar-nos en problemes més senzills o que ja sabem resoldre i adaptar-ne la solució o la definició a situacions més complexes, però similars. Així, hem aprofitat una idea senzilla expressada per un alumne (que els «radis» de les figures no circulars són diferents) per a definir el grau de rodonesa. Primer, d'un rectangle, una figura plana. Després, hem adaptat aquesta mateixa definició a l'ou, un objecte tridimensional. Les idees s'han anat contrastant amb contraexemples a l'estil de Lakatos fins a arribar a la versió que, a hores d'ara, considerem com a definitiva perquè no ha estat encara refusada. Així ha passat tant en la definició de cercle com en el grau de rodonesa. La definició CIR_6 del cercle i del grau de rodonesa ROD_4 basat en la proximitat de la ràtio a la unitat són les ara vigents. Però només ho seran fins que siguin posades a prova en els propers cursos.

Els dies posteriors a la realització del crèdit, es va dedicar una sessió completa de matemàtiques a reflexionar sobre tot el procés. A més d'explicar per què s'havien plantejat les activitats que havien fet i no unes altres, s'analitzaren les errades exposades abans posant un seriós èmfasi en el fet que el propi alumnat s'hauria d'haver adonat d'alguns errors i corregir-los, com ara que la llargària d'un rectangle i d'un ou són majors que l'amplària.

Implicacions per a la proporcionalitat geomètrica, la trigonometria i l'estadística

Altres implicacions per a l'aprenentatge toquen el currículum de quart d'ESO, ja que la interpretació geomètrica del fet que les mitjanes de les ràtios no sigui el mateix que la ràtio de les mitjanes ens porta a la trigonometria. Per veure-ho, n'hi ha prou a adossar per les diagonals una sèrie de rectangles de forma que tracin una línia poligonal continua (imatge 12). Aleshores, la suma de llargàries i amplàries determina la llargària i l'amplària del rectangle total definit per la sèrie:



Imatge 12. Poligonal d'hipotenuses i hipotenusa total.

Ara la ràtio entre la llargària i l'amplària de cadascun dels rectangles de la sèrie equival a la tangent de l'angle que cada diagonal forma amb la base del rectangle, és a dir, al seu pendent. La ràtio total equival al pendent de la diagonal que connecta el primer amb l'últim punt de la poligonal. El pendent d'aquesta hipotenusa és el pendent mitjà de la sèrie i no és la mitjana dels pendents dels rectangles que la formen. Expressat algebraicament:

$$\text{Ràtio mitjana} = \frac{\frac{\sum_i a_i}{n}}{\frac{\sum_i b_i}{n}} = \frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i} = \text{tg}(A) = \text{Pendent mitjà}$$

$$\text{Mitjana ràtios} = \frac{\sum_i \frac{a_i}{b_i}}{n} = \frac{\sum_i \mathrm{tg}(A_i)}{n} = \text{Mitjana pendents}$$

Una ràtio és quelcom més que un quocient o una divisió, ja que quantifica la semblança. A segon curs d'ESO, l'alumnat aprendrà que dos rectangles són semblants si les ràtios de cadascun són iguals. Es tracta d'una situació més complexa, ja que la decisió no es basa en la proximitat al valor 1 de la ràtio, sinó en la igualtat entre ràtios. Adaptant la definició vigent de rodonesa, hauríem de dir que les figures igual de rodones són semblants, que és cert en el cas dels rectangles i dels cercles.

La qüestió que les ràtios de les mitjanes no és el mateix que les mitjanes de les ràtios és prou important com per a tractar-lo en nivells superiors al de primer d'ESO dins de l'àmbit de l'estadística. I també en àmbits lingüístics, ja que la transposició dels termes d'una oració no sempre dóna lloc a una equivalència de significat, ans al contrari. Ens trobem de nou amb la relació d'igualtat en un context no matemàtic com és el lingüístic i que frega de ben a prop el de la lògica.

La relació d'igualtat

Observeu el paper que juga la relació d'igualtat, la més important a matemàtiques, en totes aquestes situacions. La persona, l'estudiant, el nen passen de decidir l'existència de relacions d'igualtats comparant percepcions sensorials (visuals, tàctils, sonores...) com és corrent en la vida quotidiana a decidir-les segons un valor numèric concret (com la igualtat que ha d'haver-hi entre els diners lliurats per a pagar una compra i el canvi rebut) i establir gradacions d'igualtat segons la proximitat d'aquest valor numèric a 0 o a 1:

$$a = b \iff a - b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

Són diferents nivells de relació d'igualtat corresponents als estadis cognitius de Piaget i que, amb l'ajut i la guia del professor, el nen pot anar construint (Vigotski), tal com s'ha posat de manifest.

Encara es pot establir una altra equivalència a la igualtat $a = b$ pensant en operacions més complexes que la resta o el quocient, però resulten inapropiades i fora de context:

$$a = b \iff \log_b a = 1.$$

Grau de rodonesa al món real i pràctic

També en cursos superiors, com ara a tercer d'ESO, el grau de rodonesa encara es pot precisar més basant-lo en una ràtio no esmentada fins ara i que és el referent que es fa servir per a quantificar la rodonesa de les pilotes amb les quals es practiquen diversos esports. La idea és que és més rodona la figura plana que més omple el cercle o és més rodó l'objecte tridimensional que més omple l'esfera. Ara la ràtio no és entre longituds, sinó entre les àrees de la figura i del cercle que la circumscriu (al pla) i entre els volums de l'objecte i de l'esfera que el circumscriu (l'espai). Es tracta d'una nova definició de grau de rodonesa (ROD_5) expressable amb un percentatge. Arribar-hi no serà difícil posant a prova la definició ROD_04 amb polígons irregulars estrellats.

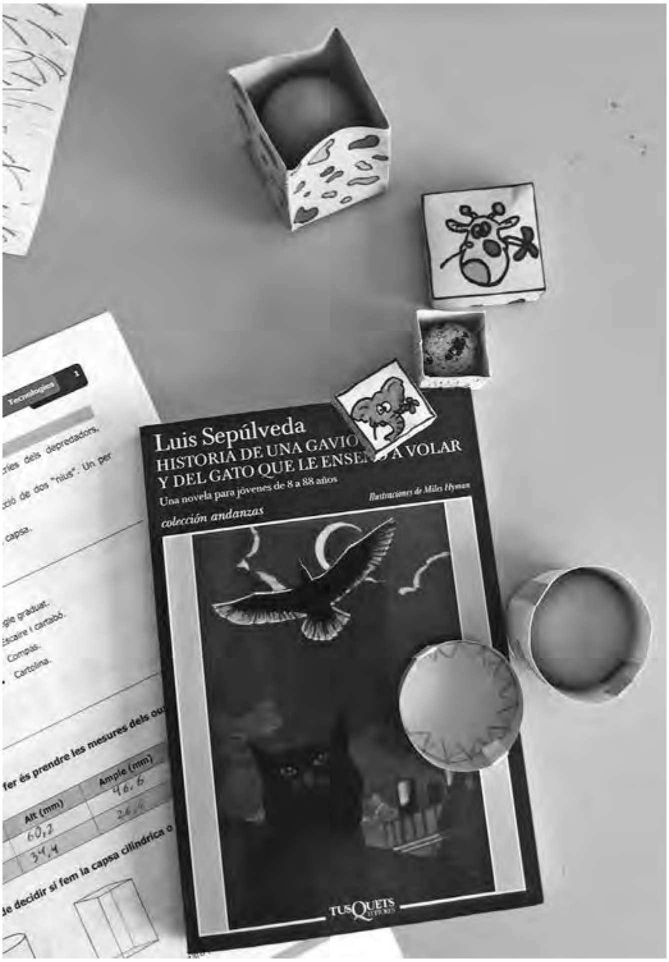
La qüestió serà rellevant perquè és aquesta definició la que s'empra per a quantificar la rodonesa d'una pilota de futbol, un icosaedre truncat que s'obté tallant els vèrtexs d'un icosaedre i que ocupa un 86,74% del volum de l'esfera circumscrita (ràtio de 0,8674). Un cop inflada, la ràtio entre ambdós volums augmenta fins a 0,95 (95%). Però aquesta no és la solució òptima. Seria millor inflar un rombicosidodecaedre. Aquest, abans d'inflar-se, ja ocupa el 94,5% de l'esfera circumscrita. El problema pràctic és l'elevat cost que tindria la seva fabricació, ja que suposaria cosir 120 arestes, trenta més que les 90 de l'icosaedre truncat. Al número 123 de la revista *Consumer-Eroski* (juliol-agost, 2008) s'explica com es controla la qualitat de les pilotes de futbol:

> «Para determinar la esfericidad de un balón se hincha y se mide su diámetro en 16 puntos diferentes para calcular el diámetro medio. Después, se calcula la diferencia entre el diámetro máximo y el mínimo. Así, el número que se obtiene es la diferencia en porcentaje entre el diámetro máximo y mínimo sobre el diámetro medio. A los balones oficiales para las competiciones de la FIFA se les exige que no superen el 2%. Umbro, con un 2,2%, no es lo suficientemente redondo. Matt (2%) y Joma (1,9%) mostraron valores de esfericidad aceptables, pero elevados. Las esferas más perfectas fueron las de Astore (1,3% de esfericidad) y Diadora (1,3%).»

Sorando (2004) observa que aquest mètode es basa en una mesura inusual de la dispersió, ja que no empra la desviació mitjana ni la desviació típica, que són els paràmetres de dispersió més habituals. L'esfericitat o grau de rodonesa de les pilotes de futbol es quantifica mitjançant la dispersió estadística de setze mesures i calculant la seva mitjana aritmètica. Restant la mida més petita a la més gran, s'obté el rang d'aquesta distribució de dades. El que es valora és aquest rang com a percentatge sobre la mitjana.

Només vola qui gosa fer-ho

Al final de la novel·la, la gavina educada pels gats es troba dalt d'un campanar acompanyada pel gat que assumí la seva cria i per un humà que els ha ajudat. Un cop en aquesta situació, la qüestió és volar o no, saltar o no, arriscar-se o no. El gat que ha ajudat la gavina ho expressa dient que només vola qui gosa fer-ho. Aprendre és arriscar-se. Procurar que els altres aprenguin, també. Mai no hauríem de defugir el desig d'aprenentatge, sinó aprofitar la seva curiositat mirant de transformar-la en creativitat, la seva i la nostra. No tinguem por que els resultats no siguin sempre perfectament rodons ni que ho siguin definitivament. Les imperfeccions i les aproximacions successives als conceptes i teoremes són part essencial del desenvolupament de les matemàtiques.



Imatge 13. La rodonesa per aprendre a volar.

Referències

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Courant, R., Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Revisió de Ian Stewart. Oxford: Oxford University Press.

Davis, P., Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática*. Barcelona: Labor, Ministerio de Educación y Ciencia.

Freudenthal, H. (1972). *Mathematics as an Educational Task*. Springer.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Every day Life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1970). *The Science of Education and the Psychology if the Child*. Nova York: Grossman.

Pólya, G. (1988). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Nova Jersey: Princeton Science Library. University Press.

Popper, K. (1994). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.

Sepúlveda, L. (1996). *Historia de una gaviota y del gato que la enseñó a volar*. Barcelona: Tusquets.

Sorando, J. M. (2004). Matemáticas en los deportes, a Matemáticas en tu mundo. http://catedu.es/matematicas_mundo/index.html.

Vigotski, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.