Els cubs diabòlics

Els jocs basats en cubs tenen un gran atractiu. Recentment, l'èxit del cub de Rubik ho ha tornat a demostrar, tenint present que no es tracta pas del primer joc basat en cubs de colors. En aquest treball es parla d'un d'aquests jocs, el dels cubs diabòlics, basat en quatre cubs.

20 (412/Volum 3/juliol-agost 1983 ciència 29)

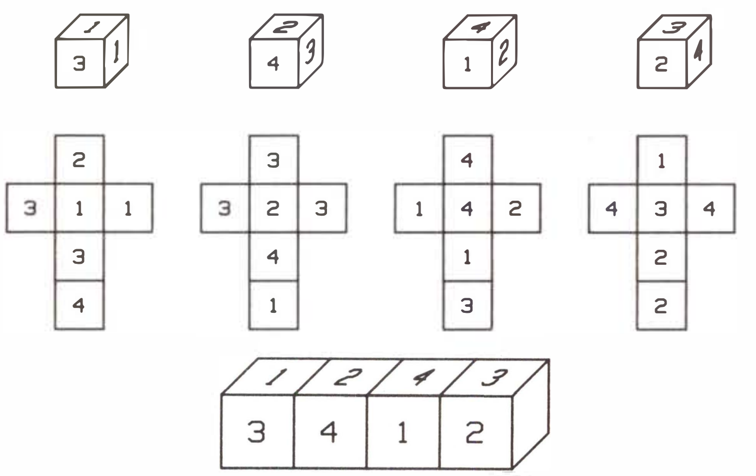


figura 1

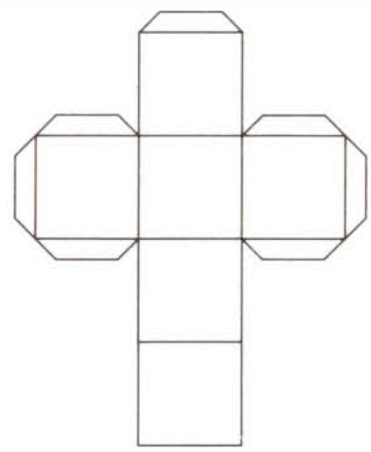


figura 2

Aquest és el nom d'un popular passatemps format per quatre cubs que tenen les cares de diferents colors (hi ha quatre colors en total). Es demana col·locar els quatre cubs en fila, un al costat de l'altre, de manera que cada una de les cares rectangulars del prisma resultant contingui els quatre colors. A la figura 1 podem veure els cubs, el seu desenvolupament i l'aspecte general del prisma; hem representat els colors per nombres, utilitzant la distribució més usual:

1: Blanc — 3: Vermell
2: Blau — 4: Verd

Els jocs constituïts per un conjunt de cubs de colors amb els quals s'ha de construir una figura no són precisament una novetat: recordem només el Mayblox, inventat pel major McMahon a principi de segle, que constava de vuit cubs amb les cares de diversos colors que calia utilitzar per construir un cub de 2x2x2 amb una cara de cada color. Tenim en aquest joc un precedent directe del cub de Rubik, amb la diferència (importantíssima!) que en el cub de McMahon les peces són independents, mentre que les del segon es mouen per blocs, diferència que explica la complexitat i dificultat característiques de l'invent del professor hongarès. No està de més afegir aquí que els cubs de McMahon han estat un dels jocs preferits de Rubik, segons ens diu ell mateix.[1] Darrerament hem presenciat alguns intents de ressuscitar el Mayblox, tant en la seva versió original d'ordre 2 com en ordres superiors (3 i 4) o amb mostres a les cares en lloc de colors llisos: tot això sembla demostrar que aquests tipus de passatemps conserven l'interès al llarg dels anys.

Bogeria instantània

Els cubs diabòlics vindrien a ser, doncs, una versió simplificada del Mayblox, amb només quatre cubs; però, de fet, el seu origen directe no sembla haver estat aquest. Encara que potser havia estat ideat abans, el joc apareix comercialment als Estats Units a final dels anys seixanta, amb el nom d'Instant Insanity (bogeria instantània); després passarà a Europa (el 1970 era un article popular als magatzems de París) i arribarà finalment aquí en diverses versions comercials. Després d'un temps, el joc va passar a un segon terme i va viure una existència discreta fins que, fa uns dos anys i seguint la febre del cub de Rubik, alguns fabricants del Japó i Taiwan han intentat fer-lo reviure.
El lector interessat a construir el seu propi joc pot fer-ho fàcilment amb daus o cubets de fusta, o copiant el model de la figura 2, que té les pestanyes per poder-lo engomar. Recomanem que la mida sigui almenys de dos centímetres.

Una mica de càlcul

El primer problema que se'ns presenta naturalmente és el d'arribar a saber el nombre de maneres de col·locar per Josep M. Massó i Aguiló

els cubs. Si pensem que cada un d'ells pot reposar sobre qualsevol de les sis cares i que, en aquesta posició i mirat de davant, pot presentar-nos una de les quatre cares verticals, calcularem $6x4 = 24$ posicions per al primer cub. Podem escollir, com a primer cub, un dels quatre; com a segon, un dels tres restants; com a tercer, un dels dos que queden, i el quart queda determinat. Això vol dir que podem formar

$$(4x24) \times (3x24) \times (2x24) \times (1x24) = 4!x24^4 = 7.962.624$$

prismes diferents.
Fàcilment es comprèn que l'enumeració sistemàtica no és el procediment més raonable per trobar la solució. Utilitzant els mètodes que els són tan apreciats, els divulgadors de la ciència previndrien el lector que, si efectuava les proves al ritme d'una per segon (i seria una proesa!), i admetent que encertés la solució amb la meitat del total de proves possibles, hauria d'estar disposat a treballar quaranta-sis dies sense parar.
Aquesta no és una prespectiva gaire seductora; es fa necessària la recerca d'un algoritme que ens doni la solució de forma matemàtica o que almenys redueixi de manera enèrgica el nombre de proves a efectuar.
Un pas inicial podria ser retallar l'espai de les solucions aplicant criteris com aquests:
a) Considerarem iguals dues combinacions si una obté de l'altra per rotació del prisma sobre el seu eix llarg. Així, cada ordenació dels cubs en dóna origen a tres més i, per tant, podem dividir per quatre el nombre total de combinacions (fig. 3).
b) També considerarem iguals dues combinacions si es pot passar de l'una a l'altra per permutació de les posicions dels cubs sense variar la seva orientació. Segons això, cada combinació en representa $4!:4x3x2x1 = 24$ (fig. 4).

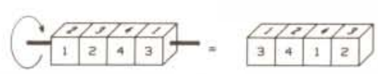


figura 3

figura 4

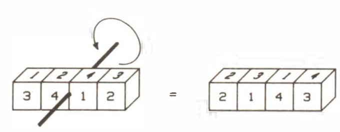


figura 5

c) De manera similar, direm que dues combinacions són iguals quan pot passar-se de l'una a l'altra fent girar el prisma sobre el seu eix curt, de manera que la que era cara superior passi a inferior, etc. (fig. 5). En virtut d'aquesta transformació, dividirem el total de prismes per 2. No és necessari considerar més que un dels eixos curts, perquè la combinació del seu gir i el de l'eix llarg produeix el mateix efecte que el gir de l'altre eix.
Un cop admès que aquestes transformacions, soles o combinades, donen lloc a una ordenació que no es diferencia de l'original, passarem a calcular el nombre d'ordenacions que continuen essent distintes:

$$\frac{7.962.624}{4 \times 4! \times 2} = 41.472.$$

A aquesta xifra també pot arribar-se seguint un altre camí. Efectivament, els criteris que hem adoptat ens indiquen que és indiferent començar per un cub o per un altre, i que moltes de les posicions inicials d'aquest cub són equivalents: l'únic important és el parell de cares oposades que quedarà ocult. Només hi ha, per tant, tres maneres essencialment diferents de començar. Un cop fixat aquest primer cub, però, les posicions relatives dels altres sí que són importants; en conseqüència, el nombre total de disposicions diferents serà:

$$3 \times 24 \times 24 \times 24 = 41.472$$ (com hem vist abans).

Tot i això, 41.472 combinacions són moltes si hem d'assajar-les una a una; hem de buscar la manera de reduir-les encara més.
Si comptem el nombre de vegades que apareix cada color, podrem establir el següent quadre:

Color	Quantitat	Sobrer
Blanc	6	2
Blau	5	1
Vermell	7	3
Verd	6	2

(Els sobrers deriven evidentment del fet que només utilitzarem quatre cares de cada color.)
Si podem aïllar totes les ordenacions que compleixen la condició que no hi figurin les cares sobreres, haurem aconseguit una reducció substancial del nombre de possibles solucions. A trobar ordenacions sotmeses a aquesta condició, o alguna altra més restrictiva encara, estan orientats els quatre algoritmes que descrivim a continuació.

Quatre mètodes i una sola solució

Un dels primers intents de reducció del problema va ser el de Robert E. Levin. [2] Aquest autor va proposar

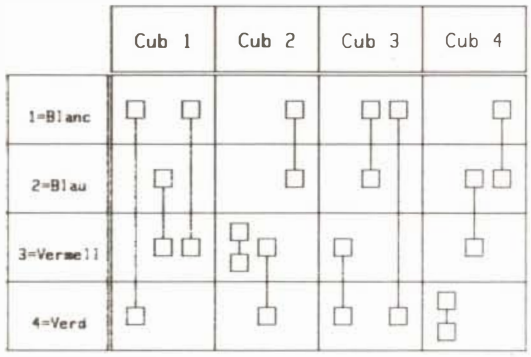


figura 6

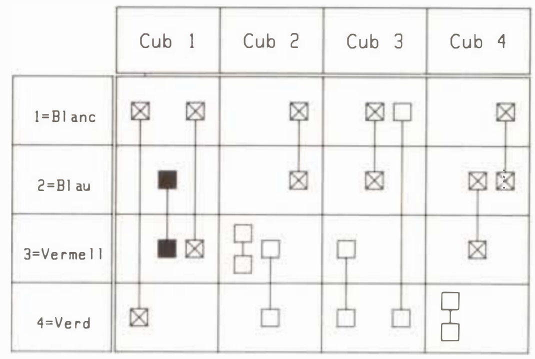


figura 7

assignar a cada color un nombre (1,2,3,4,), i a cada parella de cares oposades, la suma dels valors dels colors que la constitueixen:

Cub 1	Cub 2	Cub 3	Cub 4
1 + 4 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8
2 + 3 = 5	3 + 4 = 7	1 + 2 = 3	2 + 3 = 5
1 + 3 = 4	1 + 2 = 3	1 + 4 = 5	1 + 2 = 3

Combinant un nombre de cada columna o cub, obtindrem la representació d'una faceta rectangular del prisma i la seva oposada. De les 81 possibles, només nou sumen 20, és a dir, corresponen a dues vegades els quatre colors: $2x(1 + 2 + 3 + 4) = 20$. D'aquestes nou, cal eliminar les incompatibles, etc., fins a arribar al final. No continuem el mètode amb detall, a fi que el lector pugui acabar-lo com a exercici, i també perquè un altre algoritme que veurem després pot ser considerat com a extensió i perfeccionament d'aquest, sense que això resti importància al treball de Levin.

L'expert alemany Tom Werneck [3] presenta un mètode gràfic i atractiu. A la figura 6, els quadrats representen les cares de cada cub, i les que són oposades estan unides per una línia. Per arribar a la solució, Werneck proposa anar provant combinacions, marcant en negre les parelles de cares que decidim que quedin ocultes i amb una creu les que seran visibles, al mateix cub i als altres, com a conseqüència d'aquesta decisió. La representació gràfica permet adonar-se fàcilment dels camins que ja no poden portar a la solució i abandonar-los.

Encara que l'autor no parla de prova sistemàtica, és clar que cal actuar amb algun ordre, per exemple utilitzant un arbre en el qual cada vèrtex representi una parella de cares oposades; anirem ocultant successivament aquestes cares i descartant les combinacions inviables, fins que en trobem una compatible amb les condicions del problema. Així, a la figura 7 ens trobem en el moment en què, havent decidit que la cara Blau-Vermell del cub 1 quedi oculta (en negre), ha quedat deerminat que les cares restants del cub 1 seran visibles (marcades amb X). També, necessàriament, les decisions successives han quedat condicionades: veiem així que, quedant ocult el Blau del cub 1, tots els altres Blaus s'han de veure, ja que n'hi ha d'haver quatre; etc.

Aquest assaig sistemàtic pot ser una mica pesat i, malauradament, no ens dóna encara la solució exacta, sinó un conjunt de cinc projectes de solució (fig. 8), que no són més que ordenacions en les quals les cares ocultes són les correctes en nombre, però no necessàriament en posició relativa. Ens resta ara investigar aquests cinc candidats per determinar quins d'ells corresponen a una distribució compatible amb les restriccions del problema. Werneck recomana el tempteig; però això pot ser bastant fatigós: pensem que, deixant un cub fix, hem d'examinar les diferents posicions que poden adoptar els altres tres, girant sobre l'eix llarg (4 girs de 90°) i el curt (2 girs de 180°); en total $(4x2) \times (4x2) \times (4x2) = 512$ proves. Es veu clar que, en fixar les cares que han de quedar ocultes, el que hem fet és dividir les possibilitats d'ordenació per tres per cada un dels cubs, deixant-les en $41.472 : 3^4 = 512$.

¿És possible trobar la solució sense haver de recórrer a l'enumeració exhaustiva? Us proposem ampliar el mateix mètode gràfic que hem utilitzat fins aquí. Agafarem una a una les cinc distribucions possibles que tenim, i assignarem arbitràriament a les cares visibles del primer cub les lletres A, B, C, D, representant les facetes llargues del prisma. Això limita les possibilitats de col·locació de les lletres als cubs restants, ja que les quatre lletres han de figurar a cada cub i a cada color, de manera que les proves porten ràpidament a la solució o al rebuig. Per exemple, a la figura 9 es veu que el Vermell del tercer cub ha de pertànyer a la cara C; però això vol que el Verd pertanyi a D, el que és incompatible amb la primera parella del quart cub, que no pot ser A-B ni C-D. La solució única és la de la figura 10.

Nombres primers i grafs

Veurem ara un altre procediment, utilitzat per Averbach i Chein. [4] És similar al que acabem de comentar, però fa servir el càlcul en lloc de la representació gràfica.

Assignarem als diferents colors els nombres primers 1, 2, 3, 5, i, a cada parella de cares oposades, el producte dels que representen els colors que la formen. Cada cara rectangular del prisma anirà simbolitzada pel número 30, producte dels quatre colors que conté necessàriament, i la parella de cares oposades del prisma valdrà $30x30 = 900$.

Fem la llista dels productes d'aquestes parelles de cares i haurem convertit el problema en la recerca d'una combinació que ens doni el producte 900, utilitzant una parella de cada cub. La condició final serà que aquest producte, que correspondrà a dues facetes del prisma, permeti formar-ne un altre que representi les altres dues. Ara veiem per què hem assignat a cada color un nombre primer: necessitem que els productes siguin inequívocs, de manera que puguem descompondre'ls en factors sense ambigüitat.

Establirem, doncs, la taula:

Cub 1	Cub 2	Cub 3	Cub 4
1 x 5 = 5	3 x 3 = 9	3 x 5 = 15	5 x 5 = 25
2 x 3 = 6	3 x 5 = 15	1 x 2 = 2	2 x 3 = 6
1 x 3 = 3	1 x 2 = 2	1 x 5 = 5	1 x 2 = 2

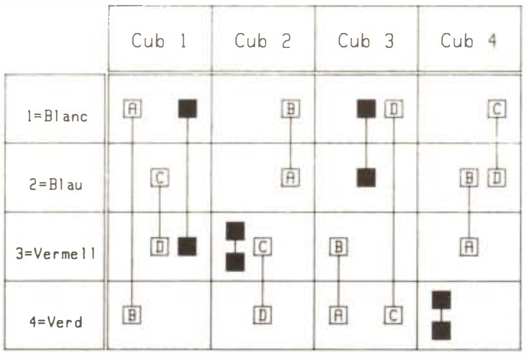


figura 10

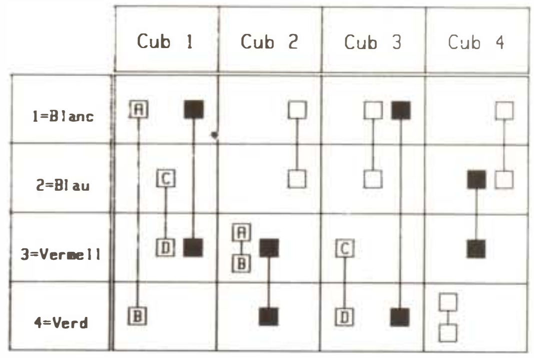


figura 9

Ara hauríem de formar la llista dels productes possibles, que són $3^4 = 81$; però els autors ens proposen una drecera: componem una altra taula, com segueix:

Cub 1 x Cub 2	Factor que falta fins a 900	Cub 3 x Cub 4
5 x 9 = 45	20	15 x 25 = 375
5 x 15 = 75	12	15 x 6 = 90
5 x 2 = 10	90	15 x 2 = 30
6 x 9 = 54	-	2 x 25 = 50
6 x 15 = 90	10	2 x 6 = 12
6 x 2 = 12	75	2 x 2 = 4
3 x 9 = 27	-	5 x 25 = 125
3 x 15 = 45	20	5 x 6 = 30
3 x 2 = 6	150	5 x 2 = 10

Només ens cal buscar a la tercera columna els factors que ens demana la segona. És fàcil descobrir que les úniques combinacions possibles són:

75 x 12 = 900 — (1-5), (3-5), (1-2), (2-3)

10 x 90 = 900 — (1-5), (1-2), (3-5), (2-3)

90 x 10 = 900 — (2-3), (3-5), (1-5), (1-2)

Si les examinem, veurem que la 1.ª i la 2.ª són incompatibles, perquè totes dues utilitzen la parella (1-5) del cub 1; també ho són la 1.ª i la 3.ª, per la parella (3-5) del cub 2; només podem formar simultàniament les combinacions 2.ª i 3.ª, que constitueixen la solució, que és única, com haurà vist el lector que hagi seguit l'algoritme anterior fins al final.

S'entén que la solució és única d'acord amb els criteris que hem adoptat més amunt; si en prescindim, la solució anirà afectada pel factor 4 per rotació sobre l'eix llarg del prisma; pel factor 2, per rotació sobre l'eix curt, i, a més, per permutació dels cubs, pel factor 4!, de manera que, essent única, en genera 4x2x4! = 192.

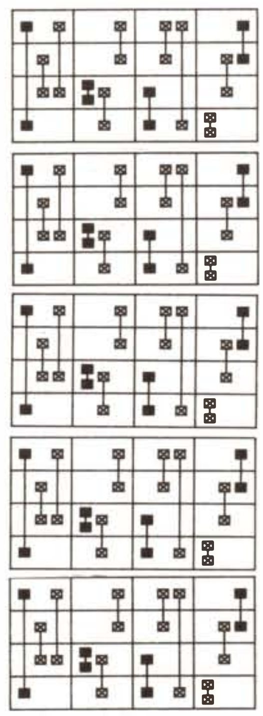
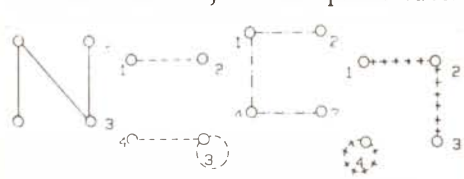
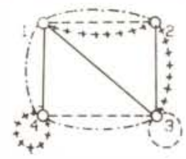


figura 8

Superposem els quatre grafs, i n'obtindrem un altre que és la representació simbòlica del conjunt dels quatre cubs:



La mateixa referència [4] presenta una altra aproximació al problema, basada en la representació en forma de graf de les relacions entre les cares. Efectivament, si simbolitzem cada color per un punt (o vèrtex), l'oposició de dues cares podrà ser representada per una línia (aresta) que uneixi els colors (vèrtexs) apropiats. Així, els quatre cubs tindrien aquesta imatge (hem utilitzat ratllats diferents per a cada cub, a fi de poder-los identificar en el pas següent, quan se superposen):



Hem de buscar un conjunt de quatre arcs de ratllat diferent (és a dir, que pertanyin als quatre cubs) i que continguin dues vegades cada color; o sigui, que passin dues vegades per cada vèrtex. Aquesta darrera condició demana que el conjunt formi una o més cadenes reentrants, o, dit d'altra manera, un o més cicles.

Sense gaire esforç s'arriba a aquests únics cicles vàlids:

que corresponen una altra vegada a les tres combinacions que ja coneixem. Aplicant el mateix criteri d'incompatibilitat que abans, descobrirem que l'unica solució possible deriva de la utilització dels cicles primer i tercer, que no tenen cap aresta comuna.

Deixem al lector curiós l'exercici de dissenyar altres conjunts de cubs amb distribucions de colors diferents d'aquesta habitual i d'aplicar els algoritmes que hem descrit a la resolució d'aquestes variants.

Josep M. Massó i Aguiló

Notes

1. *George Marx s'entretient avec Ernö Rubik*, a la revista "Impact", vol. 32, n.º 4, oct-des. 1982.
2. Robert E. Levin: *Solving Instant Insanity*, "Journal of Recreational Mathematics", n.º 2(3), 1969.
3. Tom Werneck: *Zauber Pyramide, Teufelstonne, Tower, Trikki 4*, Munic, 1981.
4. Bonnie Averbach & Orin Chein: *Mathematics. Problem Solving Through Recreational Mathematics*, San Francisco, EUSA, 1980.