La irraonable efectivitat de les matemàtiques

per Richard W. Hamming

Si bé el costat material de l'univers ha estat àmpliament explorat, el costat lògic –perquè la nostra ment és tan efectiva fent prediccions– ho ha estat molt menys. Després de descriure breument què és aquesta activitat que anomenem matemàtica i de desfer alguns mites que s'hi refereixen, es proposen algunes explicacions parcials de la seva extraordinària efectivitat en el camp de la ciència. Aquest article va ser publicat a la revista *The American Mathematical Montly* (vol. 87 núm. 2) i ha estat traduït pel nostre col·laborador J. Puigbò.

Richard W. Hamming es va doctorar a la Universitat d'Illinois l'any 1942 i ha destacat professionalment en el camp de la informàtica. Ha estat president de l'Association for Computing Machinery i és premi Turing.

Introducció

És evident, pel títol, que aquesta és una discussió filosòfica. No m'excusaré de filosofar, encara que sé molt bé que una gran majoria de científics, enginyers i matemàtics tenen poc respecte per aquesta activitat; en lloc d'excuses faré aquest petit pròleg per justificar l'enfocament.

L'home, pel que sabem, s'ha preguntat sempre sobre ell mateix, sobre el món que el rodeja i sobre el sentit de la vida. Tenim molts mites del passat que ens diuen com i per què Déu, o els déus, varen fer l'home i l'univers. Aquestes són les explicacions que anomenaré *feològiques.* Tenen una característica principal en comú: no val la pena de preguntar per què les coses són com són, ja que se'ns dóna, principalment, una descripció de la creació de la forma que els déus van decidir fer-la.

La filosofia es va iniciar quan l'home va començar a interrogar-se sobre el món fora d'aquest marc teològic. Un primer exemple és la descripció feta pels filòsofs que el món és fet de terra, foc, aigua i aire. Sens dubte, en aquell temps se'ls va dir que els déus havien fet les coses així i que deixessin de preocupar-se per aquest assumpte. Partint d'aquests intents primitius d'explicar les coses, es va desenvolupar lentament la filosofia i també la ciència actual. No és que la ciència expliqui "per què" les coses són com són (la gravitació no explica per què els cossos cauen), però la ciència dóna tants detalls del "com", que nosaltres sentim que entenem el "perquè". Siguem clars en aquest punt: és per la gran quantitat de detalls interrelacionats que la ciència sembla dir-nos "per què" l'univers és tal com és.

La nostra eina principal per portar a terme les llargues cadenes de raonaments exactes que la ciència requereix és la matemàtica. De fet, les matemàtiques podrien definir-se com l'eina mental dissenyada per a aquesta comesa. Moltes persones, al llarg dels temps, s'han fet en realitat, la mateixa pregunta que, jo em faig en el títol: "Per què les matemàtiques són tan irraonablement efectives?" En preguntar-nos això no fem sinó mirar més el costat lògic, i menys el material, del que és l'univers i com funciona.

Els matemàtics que treballen en els fonaments de les matemàtiques s'ocupen principalment de la consistència interna i les limitacions del sistema. No semblen interessar-se per què el món admet, aparentment, una explicació lògica. En un sentit, em trobo en la posició dels filòsofs grecs de la primera època que s'interrogaven sobre el costat material, i les meves respostes sobre el costat lògic no són probablement millors que ho van ser les seves en el seu temps. Però hem de començar en algun punt i en algun moment a explicar el fenomen que el món sembla estar organitzat d'acord amb un patró lògic que corre molt paral·lel a les matemàtiques, que les matemàtiques són el llenguatge de la ciència i de l'enginyeria.

Quan havia organitzat el pla d'aquesta conferència, havia de considerar la millor manera de comunicar les meves idees i opinions als altres. L'experiència m'ensenya que en aquest aspecte no sempre assoleixo el meu objectiu. Finalment, se'm va ocórrer que les observacions preliminars que faig a continuació serien útils.

En certa mesura aquesta discussió és altament teòrica. Haig d'esmentar, almenys per sobre, diverses teories de l'activitat general anomenada matemàtiques, així com també tocar algunes qüestions seleccionades. A més, existeixen diverses teories d'aplicacions. D'aquesta manera, i fins a cert punt, això ens porta a una teoria de teories. El que potser us sorprendrà és que afagaré l'enfocament de l'experimentador en la discussió. No importa què suposem que són les teories, o què penseu que haurien de ser, o fins i tot què afirmen que són els experts en aquest tema; adoptem una actitud científica i mirem com són. Sóc conscient que molt del que diré, especialment sobre la naturalesa de les matemàtiques, molestarà molts matemàtics. El meu enfocament experimental és força estrany a la seva mentalitat i a les seves creences preconcebudes. Així siga!

La inspiració per escriure aquest article em va venir d'un altre amb un títol semblant, *L'efectivitat irraonable de les matemàtiques en les ciències naturals,*[1] d'E.P. Wigner. Notareu que he tret una part del títol i, aquells que l'hàgiu llegit, que no duplico gaire del material (no em sento capaç de millorar la seva presentació). Per altra banda, passaré relativament més temps intentant explicar la pregunta implícita en el títol. Malgrat tot, quan hagi acabat totes les meves explicacions allò que resta sense resposta és tant, que deixem la pregunta essencialment igual.

Fig. 1

L'aritmètica segons la «Margarita Philosophica»

L'efectivitat de les matemàtiques

En el seu article Wigner dóna un gran nombre d'exemples de l'efectivitat de les matemàtiques en les ciències físiques. Deixeu-me, per tant, que els extregui de les meves pròpies experiències més properes a l'enginyeria. La meva primera experiència real de la utilitat de les matemàtiques per predir coses en el món real va ser en relació amb el disseny de bombes atòmiques, durant la Segona Guerra Mundial. ¿Com era possible que els nombres que amb tanta paciència havíem computat amb els primitius ordinadors de relès s'aproximessin tant al que va succeir en la primera explosió experimental a Alamogordo? No hi hagueren, ni hi podien haver, experiments a escala reduïda per comprovar els càlculs directament. Més tard, les experiències amb míssils dirigits em van mostrar que aquest no era un fenomen aïllat: constantment, el que prediem manipulant símbols matemàtics succeeix en el món de la realitat. Naturalment, treballant com ho vaig fer per a la Bell System, vaig realitzar molts còmputs telefònics i altres treballs matemàtics sobre coses tan variades com tubs d'ones, igualació de línies de televisió, estabilitat de sistemes de comunicació complexos, bloqueig de trucades a través d'una central telefònica, per esmentar-ne solament uns quants. Per a meva vanaglòria meva podria citar la recerca en el camp dels transistors, vols espacials i disseny de computadors, però quasi totes les ciències i l'enginyeria han fet ús extensiu de les manipulacions matemàtiques amb èxits remarcables.

Molts de vosaltres coneixeu la història de les equacions de Maxwell i de com, en certa manera per raons de simetria, hi va afegir un cert terme, i, amb el temps, les ones de ràdio que la teoria predia van ser descobertes per Hertz. Es coneixen àmpliament molts altres exemples de predicció encertada d'efectes físics desconeguts partint de fórmules matemàtiques, i no cal que els repetim aquí.

Wigner posa èmfasi en el paper fonamental de la **invariància**. És bàsic en gran part de les matemàtiques i també de la ciència. Va ser la manca d'invariància de les equacions de Newton (la necessitat d'un sistema de referència absolut per a les velocitats) el que va conduir Lorentz, Fitzgerald, Poincaré i Einstein a la teoria de la relativitat restringida.

Wigner també observa que **els mateixos conceptes matemàtics** sorgeixen en situacions totalment inesperades. Per exemple, les funcions trigonomètriques que apareixen en l'astronomia de Ptolomeu resulten ser les funcions que són invariants per translació (invariància respecte al temps). També són les funcions apropiades per als sistemes lineals. L'enorme utilitat dels mateixos fragments de matemàtiques en situacions àmpliament diferents no té (de moment) explicació racional.

A més, s'ha opinat des de fa temps que **la simplicitat** de les matemàtiques és la clau de les seves aplicacions a la física. Einstein és l'exponent més famós d'aquesta creença. Però fins i tot dins de les matemàtiques mateixes la simplicitat és notable, almenys per mi; les equacions algebraiques més senzilles, les lineals i les quadràtiques, es corresponen amb les entitats geomètriques més simples: línies rectes, corbes i còniques. Això fa possible la geometria analítica des d'un punt de

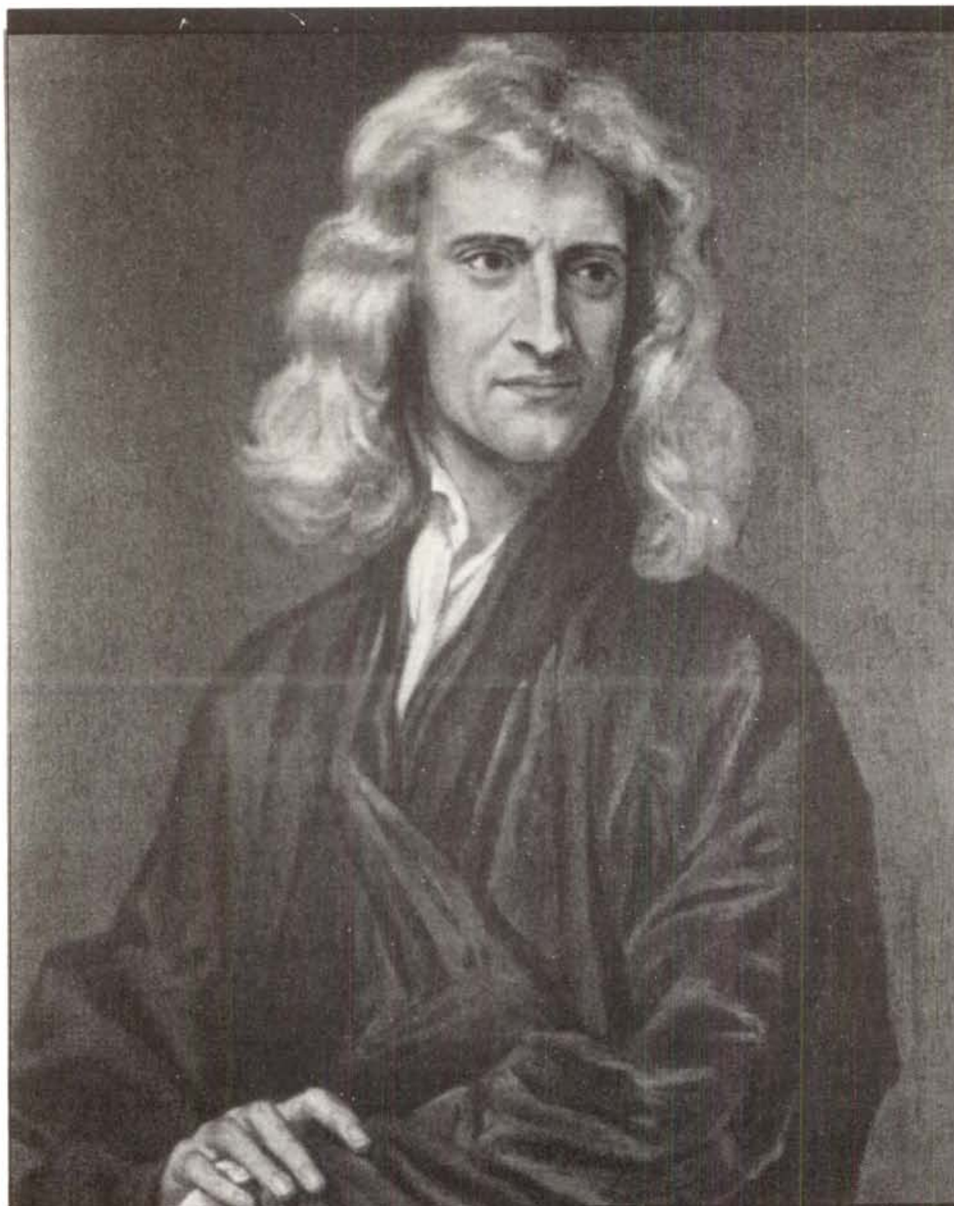

Fig. 2

Isaac Newton (1643-1727)

vista pràctic. ¿Com pot ser que matemàtiques senzilles, que no són altra cosa que un producte de la ment humana, puguin ser tan notablement útils en tantes situacions àmpliament diferents?

Gràcies a aquests èxits de les matemàtiques, existeix en l'actualitat una forta tendència cap a la matematització de totes les ciències. Es considera generalment una meta per arribar-hi, si no avui, demà. Per a aquest auditori em restringiré, quan a exemples, a la física i l'astronomia.

Pitàgores va ser el primer home del qual tenim notícia que va expressar clarament que "les matemàtiques són el camí per entendre l'univers". Ho va dir alt i clar: "El nombre és la mesura de totes les coses".

Un altre exemple famós d'aquesta actitud és Kepler. Ell creia, de manera apassionada, que la creació només podia ser entesa per mitjà de les matemàtiques. Després de vint anys de càlculs avorrits, va trobar les seves tres lleis famoses sobre el moviment dels planetes: tres expressions matemàtiques relativament simples que descrivien els moviments aparentment complexos dels planetes.

Va ser Galileu qui va dir: "Les lleis de la natura són escrites en el llenguatge de les matemàtiques". Newton va utilitzar els resultats de Kepler i Galileu per deduir les seves famoses lleis del moviment, que, juntament amb la llei de gravitació, són, potser, l'exemple més famós de l'efectivitat irraonable de les matemàtiques en la ciència. No solament van predir on serien els planetes coneguts, sinó que també van predir amb èxit les posicions de planetes desconeguts, els moviments d'estels llunyats, de les marees, etc.

La ciència es compon de lleis que originalment es basaren en una petita sèrie d'observacions atentament seleccionades, sovint no mesurades amb massa precisió al principi; més tard, però, s'ha comprovat que les lleis són aplicables a un reialme molt més ampli d'observacions i de forma molt més acurada que la que les dades originals haguessin pogut justificar. No sempre, ben cert, però amb prou freqüència perquè calgui una explicació.

Durant els trenta anys que he passat aplicant les matemàtiques a la indústria, molt sovint em preocupaven les meves prediccions. Amb les matemàtiques que feia al meu despatx predeia amb tota confiança (almenys de cara als altres) alguns esdeveniments futurs: "si feu això i allò, veureu això altre i allò altre". I en general succeïa que tenia raó. ¿Com podien saber els fenòmens el que jo havia predit (basant-me en les matemàtiques fetes pels homes) i d'aquesta manera fonamentar les meves prediccions? És ridícul pensar que així és com funcionen les coses. No, el que passa és que les matemàtiques subministren, en certa manera, un model segur per a moltes de les coses que succeeixen en l'univers. I ja que només sóc capaç de fer matemàtiques relativament senzilles, ¿com pot ser que aquestes matemàtiques tan simples siguin suficients per predir tant?

Podria continuar citant més exemples que il·lustressin l'efectivitat irraonable de les matemàtiques, però només us avorriria. De fet, sospito que molts de vosaltres coneixeu exemples que jo no conec. Per tant, deixeu-me suposar que estem d'acord que existeix una llarga llista d'èxits, molts d'ells tan espectaculars com la predicció d'un nou planeta o d'un nou fenomen físic o d'un nou artefacte. Amb la limitació de temps que tinc, voldria intentar fer el que crec que Wigner va esquivar: donar almenys algunes respostes parcials a la pregunta implícita en el títol.

Fig. 3

Girolamo Cardano (1501-1576), un dels primers en utilitzar els nombres complexes. Aficionat als pronòstics va pronosticar la seva mort i per quedar bé es va suicidar.

Què és la matemàtica?

Després d'haver examinat l'efectivitat de les matemàtiques, hem de considerar la qüestió *"Què és la matemàtica?"* Aquest és el títol del famós llibre de Courant i Robins.[2] En aquest llibre els autors no intenten donar una definició formal, més aviat s'acontenten de mostrar què és la matemàtica posant molts exemples. Anàlogament, no donaré una definició exhaustiva. Però m'aproximaré més del que ells ho van fer en discutir certes característiques sobresortints de les matemàtiques tal com jo les veig.

Potser la millor manera d'enfocar la qüestió del que és la matemàtica sigui començar pel principi. En el llunyà passat prehistòric, on ens hem de remuntar per examinar els començaments de les matemàtiques, aquestes ja tenien quatre cares importants. En primer lloc, existia la capacitat per portar a terme **llargues cadenes de raonaments exactes** que fins al dia d'avui encara és una de les característiques de la major part de les matemàtiques. En segon lloc, existia **la geometria,** que ens ha conduït a través del concepte de continuïtat a la topologia, i més enllà. En tercer lloc, existia **el nombre,** que ens ha conduït a l'aritmètica, a l'àlgebra i més enllà. Finalment, existia **el gust artístic,** que juga un paper tan gran en la matemàtica moderna. Hi ha, ben cert, moltes diverses classes de bellesa en matemàtiques. En teoria de nombres, sembla que es tracta principalment de la bellesa del detall, gairebé infinit; en àlgebra abstracta la bellesa està en la generalitat. Per tant, diverses àrees de les matemàtiques tenen també diversos estàndards d'estètica.

La història primitiva de les matemàtiques ha de ser, segur, pura especulació, ja que actualment no tenim, ni sembla probable que tinguem mai, cap evidència real convincent. Això no obstant, sembla que la relació causa-efecte era un dels principis bàsics que de forma implícita governava l'intel·lecte primitiu, si més no, almenys per motius de supervivència. Una vegada aquest tret passa d'una simple observació a una seqüència de "si succeeix això, aleshores succeirà allò i a més se seguirà que...", ja ens trobem en el camí de la primera característica de les matemàtiques que he esmentat: llargues cadenes de raonament exacte. Però és difícil per a mi veure com la simple supervivència darwiniana del més apte seleccionaria la capacitat per fer les llargues cadenes que semblen necessàries per a la ciència i les matemàtiques.

La geometria sembla que va sorgir a partir dels problemes de decoració del cos humà per a diverses finalitats, tals como ritus religiosos, funcions socials i l'atracció del sexe oposat, així com també els de decoració de parets, pots, utensilis i roba. Això també comporta el quart aspecte que he esmentat, el gust artístic, i aquest és un dels fonaments pregons de les matemàtiques. La majoria de llibres de text repeteixen el que deien els grecs, i afirmen que la geometria va sorgir de les necessitats dels egipcis per mesurar la terra després de cada inundació del Nil, però jo atribueixo una importància més gran a l'estètica que la majoria d'historiadors de les matemàtiques li confereixen i, al mateix temps, menys importància a la utilitat immediata.

El tercer aspecte de les matemàtiques, els nombres, va sorgir en comptar. Els nombres són tan bàsics en matemàtiques que un matemàtic famós va dir una vegada: "Déu va fer els enters, l'home ha fet la resta".[3] Els enters* ens semblen tan fonamentals que esperem trobar-los arreu on trobem vida intel·ligent en l'univers. He

Fig. 4

Johannes Kepler (1571-1630)

intentat, amb poc èxit, que alguns dels meus amics entenguessin la meva estupefacció que l'abstracció dels enters per comptar sigui al mateix temps possible i útil. ¿No és remarcable que 6 ovelles més 7 ovelles facin 13 ovelles; que 6 pedres més 7 pedres facin 13 pedres? ¿No és un miracle que l'univers estigui construït de tal manera que una abstracció tan simple com el nombre sigui possible? Per mi, aquest és un dels exemples més conspicus de l'efectivitat irraonable de les matemàtiques. De fet, ho trobo al mateix temps estrany i inexplicable.

En el desenvolupament dels nombres, arribem ara al fet que aquests nombres per comptar, els enters, van ser utilitzats amb èxit per mesurar quantes vegades una llargària estàndard cabia en la llàrgaria que es desitjava mesurar. Però, aviat, parlant relativament, degué succeir que un nombre sencer d'unitats no cabia en la llargària que es volia mesurar i els amidadors es van veure forçats a admetre les fraccions; el tros extra que sobrava s'utilitzava per mesurar la llargària estàndard. Les fraccions no són nombres per comptar, són nombres per mesurar. A causa de la seva utilitat generalitzada per mesurar, aviat es va descobrir, fent una extensió adequada d'algunes idees, que les fraccions obeïen les mateixes regles de manipulació que els enters, amb el benefici addicional que feien que la divisió fos sempre possible (encara no he arribat al zero). Una lleugera familiaritat amb les fraccions ens revela aviat que entre dues fraccions en podem posar tantes com vulguem i que, en cert sentit, són homogèniament denses pertot arreu. Però quan estenem el concepte de nombre per incloure el de fracció, hem d'abandonar la idea de nombre següent.

Això ens porta de nou a Pitàgores, considerat com el primer home que va provar que la diagonal d'un quadrat i el seu costat no tenen una mesura en comú: que estan relacionats per un nombre irracional. Aparentment, aquesta observació va causar un trastorn profund en les matemàtiques gregues. Fins aquell moment, el sistema discret de nombres i la geometria contínua van florir l'un al costat de l'altra amb escassos conflictes. La crisi de la incommensurabilitat va provocar l'enfocament euclidià de les matemàtiques. Un fet curiós és que els grecs primitius van intentar fer les matemàtiques rigoroses substituint les incerteses dels nombres pel que ells sentien que era més segur: la geometria (això es deu a Eudox). Va ser una de les aportacions més grans d'Euclides i resulta que hom troba en *Els Elements*[4] moltes coses que ara considerem part de la teoria dels nombres i de l'àlgebra sota la forma de geometria. En oposició als grecs de la primera època, dubtaven que el sistema de nombres reals existís, nosaltres hem decidit que hi hauria d'haver un nombre que mesurés la diagonal d'un quadrat de costat unitari (si bé no calia que ho haguéssim fet així) i, d'aquesta manera, més o menys, hem estès el sistema de nombres racionals per incloure els nombres algebraics. Va ser el simple desig de mesurar llargàries que ho va fer. ¿Algú pot negar que existeixi un nombre per mesurar la llargària de qualsevol segment de línia recta?

Els nombres algebraics, que són les arrels dels polinomis a coeficients enters, racionals i, fins i tot, com més tard es va provar, a coeficients algebraics, van passar aviat sota control,

* N. del T. Es refereix als enters positius.

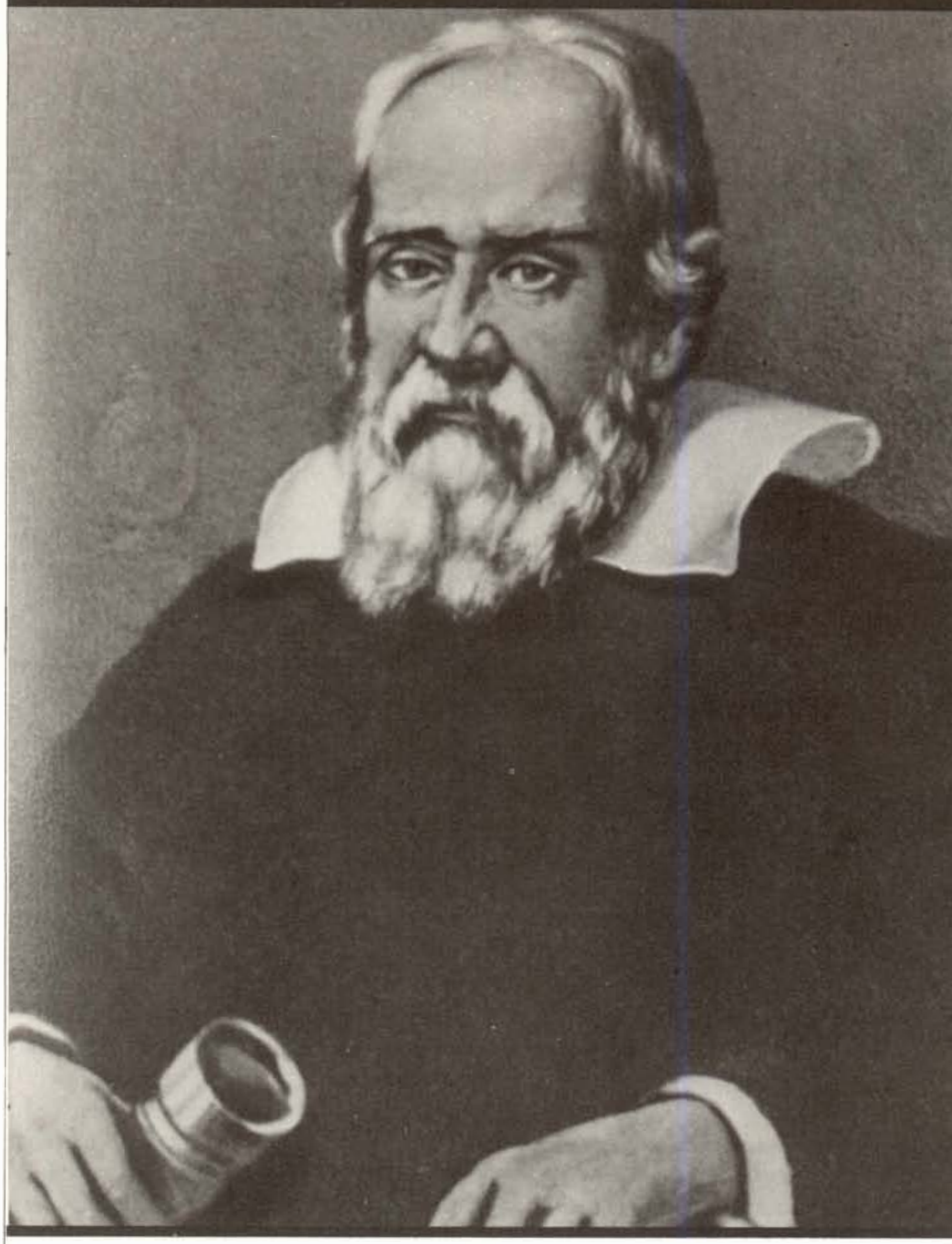

Fig. 5

Galileo Galilei, (1564-1642)

estenent simplement les mateixes operacions que ja eren utilitzades sobre el sistema més senzill de nombres.

Malgrat tot, la mesura de la circumferència d'un cercle respecte al diàmetre ens va forçar ben aviat a considerar la raó anomenada pi. Aquest no és un nombre algebraic, ja que cap combinació lineal de potències de pi amb coeficients enters no s'anul·la exactament. Com que una llargària, la de la circumferència, és la longitud d'una línia corba, i l'altra, la del diàmetre, la d'una línia recta, l'existència de la raó és menys clara que la de la raó entre la diagonal del quadrat i el seu costat; però com que sembla que aquest nombre hauria d'existir, els nombres transcendents es van anar passant gradualment al sistema numèric. D'aquesta manera, estenent novament els conceptes primitius de nombres, els nombres transcendents van acabar essent admesos de forma consistent en el conjunt dels nombres, encara que pocs estudiosos se sentin còmodes amb l'aparell tècnic que utilitzem convencionalment per mostrar la consistència.

Unes quantes matusseries més ens van portar el zero i els nombres negatius. Aquesta extensió va forçar-nos a abandonar la divisió per un únic nombre: el zero. Això sembla que completa el sistema dels nombres reals (sempre que ens limitem als processos d'adoptar límits de successions de nombres i no admetem altres operacions), la qual cosa no vol dir que fins al dia d'avui els tinguem fonamentats de manera lògica, simple i ferma; però es diu que amb familiaritat es perd el respecte i tots nosaltres estem més o menys familiaritzats amb el conjunt dels nombres reals. Molt pocs d'entre nosaltres creiem en els nostres moments més lúcids que els postulats específics que alguns especialistes en lògica han somniat creïen els nombres. No, la majoria de nosaltres creiem que els nombres reals són senzillament aquí, i que és un joc interessant, divertit i important intentar trobar un conjunt harmònic de postulats que els justifiquin. Però no ens confonguem: les paradoxes de Zenó són encara massa fresques en les nostres ments, fins i tot després de dos mil anys, perquè ens enganyem pensant que entenem tot el que voldríem sobre la relació entre el sistema discret dels nombres i la recta contínua que volem representar. Sabem, gràcies a l'anàlisi no-estàndard, si no per altres sistemes, que els especialistes en lògica poden fornir els postulats necessaris per posar encara més endins de la recta real, però fins ara, pocs entre nosaltres hem volgut seguir aquest camí. Per ser justos hem de mencionar que alguns matemàtics dubten de l'existència del conjunt de nombres reals convencional. Alguns teòrics de la ciència informàtica admeten només l'existència dels "nombres computables".

El següent pas en la nostra discussió és el sistema dels nombres complexos. D'acord amb el que he llegit d'història, va ser Cardano el primer a comprendre'ls de veritat. En el seu *L'art gran o les regles de l'àlgebra*[5] diu: "Deixant de banda les tortures mentals que això suposa, multipliqueu $5+\sqrt{-15}$ per $5-\sqrt{-15}$ i obtindreu $25-(-15)$..." Així, ell es va adonar de manera clara que en portar a terme les mateixes operacions formals entre els símbols dels nombres complexos s'obtindrien resultats que tindrien significat. Seguint aquest camí, es va estendre gradualment el sistema dels nombres reals al sistema de nombres complexos, excepció feta que, aquesta ve-

Fig. 6

Joseph Fourier (1768-1830). L'iniciador d'una de les branques més importants i de més aplicació de les matemàtiques. Va resoldre l'equació que governa la transmissió del calor.

gada, en estendre, algué abandonar la propietat d'ordre dels nombres, és a dir, que no es pot ordenar els nombres complexos en el sentit usual de la paraula.

Pel que sembla, el problema de la integració de funcions reals sobre la recta real fou allò que portà Gauchy a la teoria de funcions de variable complexa. Ell va descobrir que corbant el camí d'integració en el pla complex podia resoldre problemes d'integració en el camp real.

Fa uns anys vaig tenir el plaer de donar un curs sobre variable complexa. Com em passa sempre que entro en contacte amb aquesta qüestió, una altra vegada vaig acabar amb la sensació que "Déu va fer l'univers amb els nombres complexos". Evidentment, juguen un paper central en mecànica quàntica. També són una eina natural en moltes altres aplicacions, tals com circuits elèctrics, camps, etc.

Resumint, començant per comptar utilitzant els naturals "donats-per-Déu", hem fet diverses extensions del concepte de nombre per incloure més coses. De vegades, les extensions han estat fetes, més que res, per raons estètiques i, sovint, hem hagut d'abandonar alguna de les propietats del conjunt anterior de nombres. D'aquesta manera hem arribat a un sistema de nombres que és irraonablement efectiu fins i tot dins de la matemàtica considerada en ella mateixa: observeu com en la teoria dels nombres hem solucionat molts dels problemes del sistema de "nombresper-comptar" original, que és altament discret, utilitzant variable complexa.

De tot això es desprèn que una de les principals fibres de les matemàtiques és l'extensió, o la generalització, l'abstracció (són totes tres, si fa no fa, la mateixa cosa) de conceptes ben coneguts a noves situacions. Però noteu que precisament en aquest procés s'alteren de forma subtil les definicions. Per tant, i això no tothom ho reconeix, les antigues demostracions de teoremes poden convertir-se en demostracions falses. Les demostracions antigues ja no cobreixen les coses que han estat definides de nou. El miracle consisteix en el fet que gairebé sempre els teoremes continuen essent certs; només cal arranjar les demostracions. L'exemple clàssic d'aquest arranjament el constitueixen *Els Elements* d'Euclides. Hem descobert que era necessari afegir un bon nombre de nous postulats (o si voleu axiomes, ja que en l'actualitat no ens molestem a distingir entre ells) per satisfer les nostres exigències presents de rigor. I, malgrat això, ¿com és que cap dels teoremes dels tretze llibres no ha resultat ser fals? No s'ha trobat ni tan sols un teorema que fos fals, encara que, sovint, les demostracions que va donar Euclides ens semblen ara falses. I aquet fenomen no és tan sols del passat. Es diu que un dels ex-directors de la revista *Mathematical Reviews* va afirmar, una vegada, que més de la meitat dels teoremes que es publiquen avui dia són essencialment certs, encara que les demostracions que es publiquen són falses. ¿Com pot passar això si les matemàtiques no són més que la deducció rigorosa de teoremes a partir dels postulats que hem assumit i de resultats previs? Doncs bé, és obvi, per a qualsevol que no estigui encegat per l'autoritat, que les matemàtiques no són allò que els mestres d'escola deien que eren. Veritablement són una altra cosa.

Què és aquesta "altra cosa"? Tot seguit comencem a mirar i trobem que si ens restringíssim als axiomes i als postulats podríem deduir ben poca cosa. El primer pas important és introduir nous conceptes que deriven del que hem assumit, conceptes tals com triangles. La recerca dels conceptes i definicions apropiats és un dels

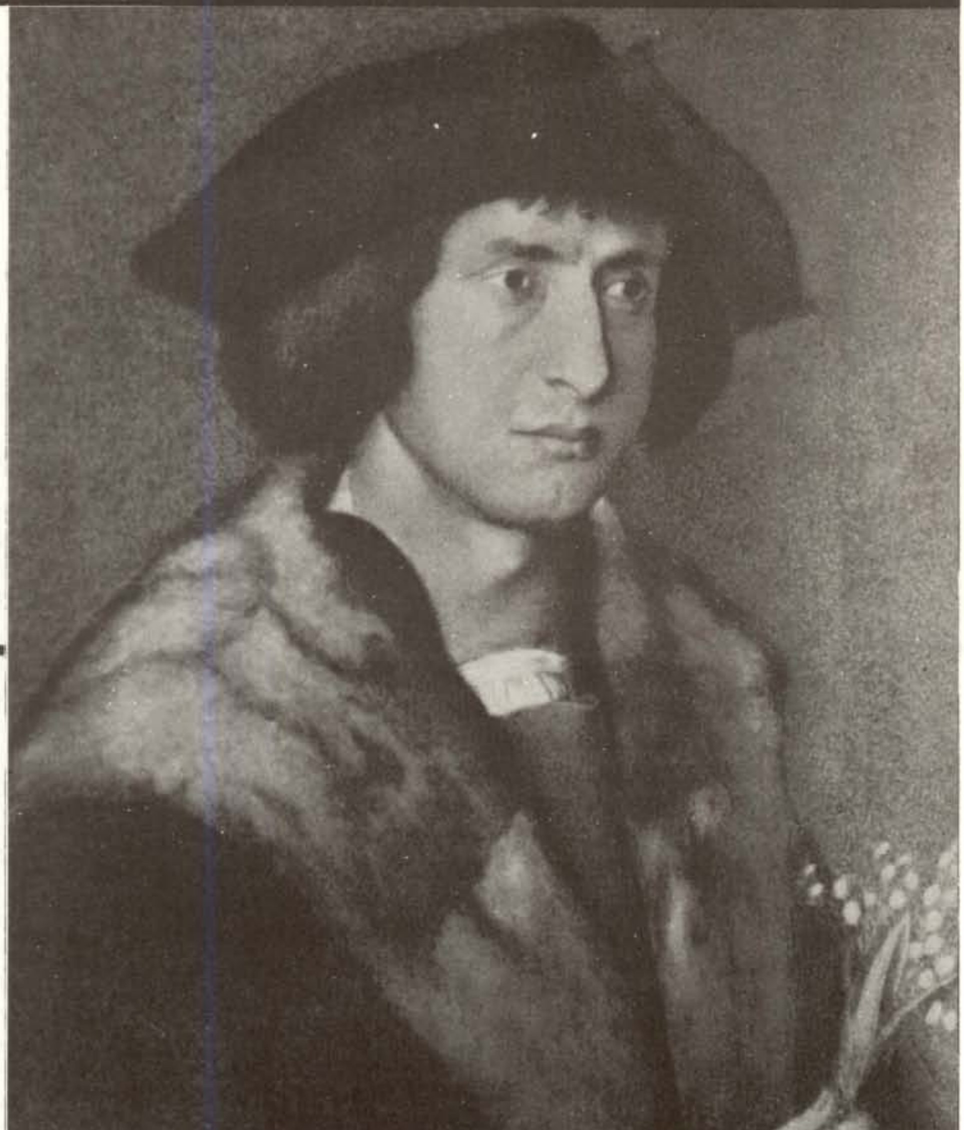

Fig. 7

Nicolás Copérnico (1473-1543)

principals trets de la tasca de fer grans matemàtiques.

I mentre parlem de les demostracions, la geometria clàssica comença amb el teorema i intenta trobar una demostració. Sembla que fou tan sols al voltant del 1850 que es va reconèixer de forma clara que l'enfocament oposat també és vàlid (abans d'aquell moment pot haver estat utilitzat ocasionalment). Sovint és la demostració que engendra el teorema. Veiem allò que podem provar i després examinem la demostració per veure allò que hem provat! Aquests són els sovint anomenats "teoremes engendrats per demostració".[6] Un exemple clàssic és el concepte de convergència uniforme. Cauchy provà que una sèrie convergent, els temes de la qual són funcions contínues, convergeix cap a una funció contínua. Al mateix temps es coneixia l'existència de sèries de Fourier, de funcions contínues que convergien cap a una funció límit discontínua. Examinant amb molta atenció la demostració de Cauchy es troba l'error i s'arranja canviant la hipòtesi del teorema, que ara diu: "una sèrie uniformement convergent..."

Fa poc hem estudiat intensament el que s'anomenen fonaments de les matemàtiques, els quals s'hauria de considerar, en la meva opinió, com els parapets cimals de les matemàtiques, i no els fonaments. És un camp interessant, però els principals resultats de les matemàtiques continuen incòlumes, independentment del que allí es trobi. Senzillament, no abandonarem la major part de les matemàtiques per molt que la recerca en els fonaments les faci aparèixer il·lògiques.

Espero haver mostrat que les matemàtiques no són allò que sovint se suposa que són, que constantment estan canviant, i que, per tant, encara que jo fos capaç de definir-les avui, la definició no seria adequada per a demà. Anàlogament, la nostra idea de rigor va canviant. La posició dominant en ciència és que no som el centre de l'univers, que no estem en una situació única, etc., i de manera semblant, m'és difícil creure que hem assolit el **non plus ultra** del rigor. Per tant, no podem esta segurs de les demostracions actuals dels nostres teoremes. De fet, em sembla que:

Els postulats de les matemàtiques no eren a les taules de pedra que Moisès portà en baixar del mont Sinaí

Cal remarcar això. Comencem amb un concepte vague en les nostres ments, aleshores creem diversos conjunts de postulats i, gradualment, ens quedem amb un d'aquests conjunts. En l'enfocament axiomàtic rigorós substituïm el concepte original pel que defineixen els postulats. Això més aviat dificulta una nova evolució del concepte i, com a resultat, tendeix a frenar l'evolució de les matemàtiques. No és que l'enfocament axiomàtic sigui equivocat, només que cal que reconeixem la seva arbitrarietat i que estem preparats per canviar els postulats quan la necessitat de fer-ho es faci manifesta.

Les matemàtiques han estat fetes per l'home i, per tant, són aptes perquè les alteri de forma continuada. Potser, pel que fa a les fonts originàries de la matemàtica, no vàrem tenir llibertat d'elecció, però com veiem en l'exemple que he utilitzat del desenvolupament d'un concepte tan senzill com el de nombre, les extensions que hem escollit només han estat parcialment governades per la necessitat, i a mi em sembla que sovint ho han estat més per l'estètica. Hem intentat que les matemàtiques fossin una cosa consistent i bella i, en fer-ho així, hem obtingut un nombre sorprenent d'aplicacions reeixides al món real.

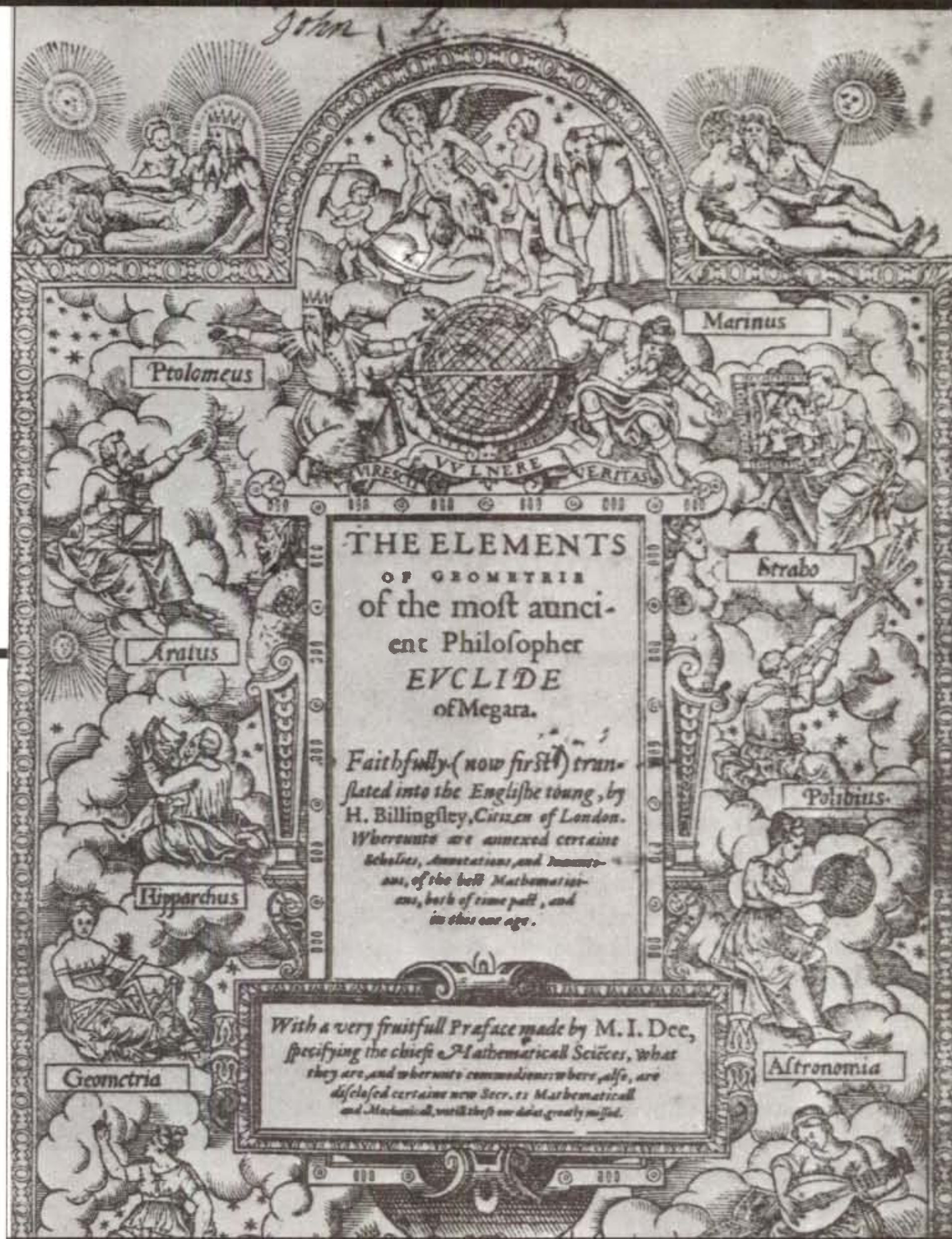

Fig. 8

Euclides

La idea que els teoremes es dedueixen a partir dels postulats no correspon a una simple observació. Si descobríssim que el teorema de Pitàgores no es dedueix dels postulats, cercaríem de nou una manera d'alterar els postulats fins que fos veritat. Els postulats d'Euclides provenien del teorema de Pitàgores i no a l'inrevés. Durant més de trenta anys he explicat que si vinguéssiu al meu despatx i em mostréssiu una prova que el teorema de Cauchy és fals, hi estaria molt interessat, però crec que, en l'anàlisi final, alteraríem les hipòtesis fins que el teorema fos cert. Per tant, hi ha molts resultats en matemàtiques que són independents de les hipòtesis i de la demostració.

¿Com decidim en una "crisi" quines són les parts de la matemàtica que hem de mantenir i quines les que hem d'abandonar? La utilitat és un dels principals criteris, però sovint és la utilitat en la creació de més matemàtiques, més aviat que en les aplicacions al món real! Amb això acabo el meu debat sobre les matemàtiques.

Algunes explicacions parcials: Classificaré les meves explicacions sobre la irraonable efectivitat de les matemàtiques en quatre apartats.

Veiem el que cerquem

Ningú no se sorprèn quan després de col·locar-se unes ulleres blavoses veu el món de color blau. Em proposo mostrar-vos alguns exemples sobre com és cert això en la ciència actual. Per fer-ho violaré moltes de les creences sostingudes apassionadament per amplis sectors. Però escolteu-me. En la primera part, he agafat l'exemple del científic per una bona raó. En la meva opinió, Pitàgores és el primer gran físic. Fou ell qui va descobrir que habitem en allò que els matemàtics anomenen L_2: la suma dels quadrats dels catets d'un triangle rectangle dóna el quadrat de la hipotenusa. Com ja he dit abans, aquest no és un resultat dels postulats de la geometria; és un dels resultats que va donar forma als postulats.

Considerem ara Galileu. No fa gaire temps, vaig intentar posar-me en el seu lloc per poder sentir com va arribar a descobrir la llei de la caiguda dels cossos. Intento fer aquesta mena d'esforç mental per poder aprendre a pensar com ho varen fer els mestres: tracto, deliberadament, de pensar com ells podien haver-ho fet.

Bé, Galileu era un home amb una bona formació i un mestre en raonaments escolàstics. Sabia molt bé com raonar sobre el nombre d'àngels en el cap d'una agulla, com raonar els dos costats d'una qüestió. El seu entrenament en aquestes arts era molt millor que el de qualsevol de nosaltres avui dia. Me l'imagino un dia, assegut amb una bola lleugera i una altra pesant, una a cada mà, i llançant-les suament a l'aire. Sospesant-les, diu: "Per a qualsevol persona és obvi que els objectes pesants cauen més de pressa que els lleugers i, en qualsevol cas, Aristòtil així ho afirma. Pero suposem –es diu a ell mateix, ja que posseïa aquest tipus de ment dialèctica que el cos, en caure, es fragmenta en dues peces. Per descomptat, les dues peces s'alentirien immediatament fins a arribar a les velocitats apropiades. Però suposem, a més, que succeís que una de les peces toqués l'altra. ¿Serien ara una sola peça i les dues accelerarien? Suposem

Fig. 9

Primera pàgina de l'edició anglesa dels «Elements» d'Euclides.

que lligués les dues peces. ¿Amb què puc lligar-les perquè resti fort i formin una sola peça? Amb un cordill lleuger? Amb una corda? ¿En quin moment? Quan són les dues peces una de sola?

Com més ho pensava (com més hi penseu vosaltres), més irraonable es fa la pregunta de quan els dos cossos són un de sol. Senzillament, no hi ha cap resposta raonable a la qüestió de com un cos sap quant pesa, si és una peça, dues o moltes. Com que els cossos que cauen s'han de captenir d'alguna manera, l'única cosa que poden fer és caure tots a la mateixa velocitat, si no és que sofreixen la interferència d'altres forces. No poden fer altra cosa. Més tard, ell pot haver fet alguns experiments, però jo sospito profundament que realment va passar alguna cosa com el que jo he imaginat. Més endavant, vaig trobar una història similar en un llibre de Pólya.[7] Galileu no va trobar la seva llei experimentant sinó purament i simplement pensant, per raonament escolàstic.

Sé que els llibres de text presenten sovint la llei de la caiguda del cossos com una observació experimental; jo pretenc que és una llei lògica, una conseqüència de les tendències del nostre pensament.

Newton, segons els llibres, va deduir la llei de la gravitació, basant-se en les lleis de Kepler, si bé sovint es presenta a la inversa: partint de la llei de la gravitació els llibres de text dedueixen les lleis de Kepler. Però si creieu en la conservació de l'energia i penseu que vivim en un espai euclidià de dimensió tres, ¿de quina altra manera podria disminuir un camp simètric de forces centrals? Les mesures de l'exponent per mitjà d'experiments són, en gran part, intents de descobrir si vivim en un espai euclidià, i no són, en absolut, una comprovació de la llei de la gravitació.

Però si no us agraden aquests dos exemples, permeteu-me que ara m'adreci a la llei que en temps recents ha estat objecte de la major publicitat, el principi d'incertesa. Resulta que fa poc em vaig veure involucrat en la redacció d'un llibre sobre filtres digitals,[8] quan coneixia molt poc aquesta qüestió. A causa d'això, tot seguit vaig fer-me la pregunta: "Per què haig de fer tota l'anàlisi a base d'integrals de Fourier? Per què són l'eina natural per al problema?" De seguida vaig descobrir, com potser molts ja sabeu, que les funcions pròpies de la translació són les exponencials complexes. Si desitgeu la invariància temporal, i certament els físics i els enginyers la desitgen (a fi que un experiment fet avui o demà doni els mateixos resultats), aleshores us veieu conduïts a aquestes funcions. Anàlogament, si creieu en la linealitat, aleshores aquestes també són les funcions pròpies. En mecànica quàntica els estats quàntics són absolutament additius; no són tan sols una aproximació lineal convenient. Per tant, les funcions trigonomètriques són les funcions pròpies que calen, tant en la teoria de filtres digitals com en mecànica quàntica, per esmentar només dos camps d'aplicació.

Ara bé, quan utilitzeu aquestes funcions pròpies sou conduïts de forma natural a la representació de diverses funcions, primer amb un nombre numerable i després amb un nombre no numerable d'elles, a saber: les sèries i la integral de Fourier. Però hi ha un teorema de la teoria de les integrals de Fourier que diu que la variació de la funció multiplicada per la variació de la transformada és més gran que una certa constant, que en una notació es

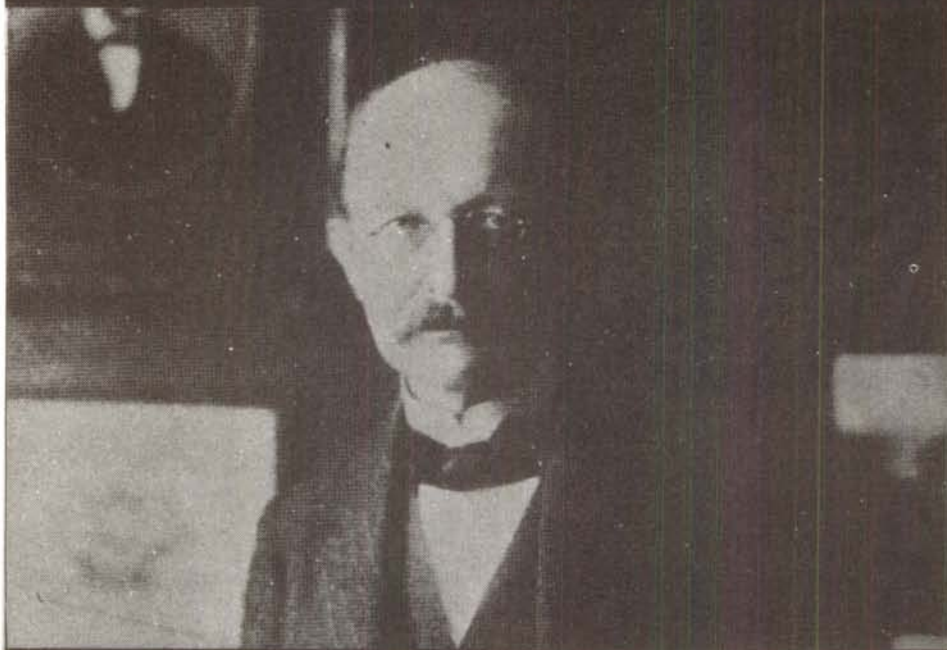

Fig. 10

El professor alemany Max Planck

$1/2\pi$. Això a mi em diu que en qualsevol sistema lineal, invariant respecte del temps, heu de trobar un principi d'incertesa. La grandària de la constant de Planck és una qüestió d'identificar detalladament les variables en les integrals, però la desigualtat ha d'existir.

Heus ací un altre exemple del que s'ha pensat sovint que era un descobriment físic, però que resulta que ha estat col·locat allà per nosaltres mateixos. Em refereixo al fet ben conegut, que la distribució de constants físiques no és uniforme; al contrari, la probabilitat que una constant física agafada a l'atzar tingui una primera xifra igual a 1, 2 o 3 és aproximadament del 60% i, per descomptat, es troben les xifres 4, 5, 6, 7, 8 i 9 en la primera posició en un total de només el 40% dels casos. Aquesta distribució ocorre en molts tipus de nombres, incloenthi la distribució dels coeficients d'una sèrie de potències que té una única singularitat en el cercle de convergència. Un examen atent d'aquest fenomen mostra que és principalment un producte de la forma com utilitzar els nombres.

Després d'haver donat quatre exemples àmpliament diferents de situacions no trivials, on resulta que el fenomen prové de les eines matemàtiques que utilitzem i no del món real, estic preparat per suggerir fermament que moltes de les coses que veiem provenen de les ulleres que ens posem. Per descomptat, això va en contra de la major part del que us han ensenyat, però considereu els arguments amb atenció. Podeu dir que va ser l'experiment el que ens va forçar a adoptar el model, però us suggereixo que com més penseu en els quatre exemples, més incòmodes us sentireu. No són pas teories arbitràries les que he seleccionat, sinó les que juguen un paper central en la física.

En anys recents va ser Einstein qui més alt va proclamar la senzillesa de les lleis de la física i qui va utilitzar les matemàtiques tan extensament que popularment se'l coneixia com a matemàtic. En examinar el seu article sobre la teoria restringida de la relativitat,[9] es té la sensació que estem davant l'enfocament que faria un filòsof escolàstic. Sabia per endavant com havia de ser en línies generals la teoria i va explorar les teories amb eines matemàtiques i no pas amb experiments reals. Tenia tanta confiança en la correcció de les teories de la relativitat que quan es varen fer experiments per comprovar-les no va tenir gaire interès en els resultats, dient que o bé havien de sortir d'aquella manera, o sinó els experiments eren incorrectes. I moltes persones creuen que les dues teories de la relativitat es fonamenten més sobre bases filosòfiques que sobre experiments reals.

Es així que la meva primera resposta a la pregunta implícita sobre la irraonable efectivitat de les matemàtiques és que enfoquem les situacions amb un aparell intel·lectual, de manera que només podem trobar el que trobem, en molts casos. És a la vegada tan senzill i tan horrible. El que ens van ensenyar que la base de la ciència eren els experiments, en el món real és només parcialment cert. Eddington va anar més lluny; va pretendre que una ment prou sàvia podria deduir tota la física. Jo només suggereixo que es poden deduir moltes coses d'aquesta manera. Eddington va donar una paràbola meravellosa per il·lustrar aquest punt. Va dir: "Uns homes anaren a pescar a la mar amb una xarxa i en examinar el que havien agafat conclogueren que existia una mida mínima per als peixos de la mar".

2. Seleccionem el tipus de matemàtiques a utilitzar

Les matemàtiques no sempre funcionen. Quan vàrem veure que els escalars no anaven bé per a les forces, inventàrem unes noves matemàtiques, els vectors. I, anant més lluny, hem inventat els tensors. En un llibre que he escrit fa poc[10], els enters convencionals s'utilitzen com a etiquetes, els nombres reals per a probabilitats; però, en la resta, tota l'aritmètica i tota l'àlgebra que hi ha en el llibre, i n'hi ha molt de totes dues, són governades per la regla que diu:

$$1 + 1 = 0$$

Per tant, la meva segona explicació és que seleccionem les matemàtiques que s'adapten a la situació i senzillament no és cert que les mateixes matemàtiques funcionin a tot arreu.

3. De fet, la ciència dóna resposta a un nombre relativament petit de problemes

Ens fem la il·lusió que la ciència té respostes per a la majoria de les

Fig. 11

Einstein al seu despatx de l'oficina de patents de Berna cap a l'any 1900.

nostres preguntes, però això no és així. Des dels temps immemorials l'home deu haver deliberat sobre què són la veritat, la bellesa i la justícia. Però, fins on jo puc veure, la ciència no ha contribuït gens a les respostes, ni em sembla que la ciència faci gaire en aquest sentit en el futur pròxim. Mentre utilitzem unes matemàtiques en les quals el total és la suma de les parts, no tenim massa possibilitats que les matemàtiques constitueixin una eina important per examinar aquestes tres famoses qüestions.

De fet, generalitzant, la major part de les experiències que tenim en aquest món no cauen dins del domini ni de la ciència ni de les matemàtiques. A més, sabem (almenys així ho creiem) que, segons el teorema de Gödel, hi ha uns límits ben definits quant a la manipulació purament lògica de símbols que es pot fer; el domini de les matemàtiques està limitat. Que el món pot ser explicat en els termes senzills que les matemàtiques manegen, ha estat un acte de fe per part dels científics. Quan considereu quantes coses deixa sensa resposta la ciència, aleshores veieu que els èxits no són tan impressionants com podria semblar si no fos per això.

4. L'evolució de l'home ens va donar el model

Ja he tocat la qüestió de l'evolució de l'home. He fet l'observació que les llavors de la nostra capacitat actual per crear i seguir llargues cadenes de raonament exacte deuen haver estat presents en les formes primitives de vida. Anant més enllà, alguns[11] pretenen que l'evolució darwiniana selecciona de manera natural perquè sobrevisquin, entre les formes de vida que competeixen entre si, aquelles que tenen els millors models de la realitat en les seves ments, on "millor" significa millor per sobreviure i reproduir-se. Sens dubte hi ha alguna cosa de veritat en això. Ens adonem, per exemple, que podem afrontar el problema de pensar sobre el món quan és d'un volum comparable a nosaltres mateixos i al que podem observar amb els nostres sentits sense cap ajut, però, quan anem a les coses molt petites o a les molt grans, la nostra ment té grans dificultats. No sembla que siguem capaços de pensar adequadament sobre els extrems més enllà del volum normal.

De la mateixa manera que hi ha olors que els gossos poden olorar i nosaltres no, i sons que els gossos poden sentir i nosaltres no, també hi ha longituds d'ones de llum que no podem veure i gustos que no podem tastar. ¿Per què, aleshores, donat que els nostres cervells tenen els circuits amb una determinada estructura, l'observació: "potser hi ha pensaments que no podem pensar", us sorprèn? L'evolució pot haver-nos bloquejat, de moment, per pensar en certes direccions; podrien existir pensaments impensables.

Si recordeu que la ciència moderna només té quatre-cents anys i que hi ha hagut entre tres i cinc generacions per segle, aleshores han existit, com a màxim, vint generacions des de Newton i Galileu. Si decidiu que la ciència té en general quatre mil anys, aleshores arribem a una fita superior de duescentes generacions. Considerant els efectes de l'evolució que busquem via selecció de variacios per probables, no em sembla que l'evolució pugui explicar més que en una petita part la irraonable efectivitat de les matemàtiques.

Conclusió

De tot això em veig forçat a concloure tant que les matemàtiques són irraonablement efectives com que totes les explicacions que he donat, agafades en conjunt, simplement no són suficients per explicar el que jo em vaig proposar en un principi. Penso que nosaltres, i vull dir especialment vosaltres, hem de continuar l'intent d'explicar per què el costat lògic de la ciència, i vull dir principalment les matemàtiques, és l'eina apropiada per explorar l'univers tal com el percebem actualment. Sospito que les meves explicacions són gairebé tan bones com les dels grecs primitius, que afirmaven, en relació amb el costat material de la qüestió, que la naturalesa de l'univers és terra, foc, aigua i aire. El costat lògic de la naturalesa de l'univers requereix una exploració més profunda.

R.W. Hamming