

# d'Economia 2012 per la teoria de les assignacions estables i la pràctica del disseny de mercats

Jordi Massó, *professor d'economia de la Universitat Autònoma de Barcelona*

## Introducció

El Premi Nobel d'Economia 2012 fou atorgat conjuntament a Alvin E. Roth i Lloyd S. Shapley per les seves contribucions a la teoria de les assignacions estables i a la pràctica del disseny de mercats. La teoria de les assignacions estables consisteix en una família de models que estudien problemes d'assignació en els quals dos conjunts disjunts d'agents (o un conjunt d'agents i un conjunt d'objectes) han de ser assignats bilateralment. Per exemple, homes a dones, treballadors a empreses, estudiants a escoles, o pacients a ronyons de donants vius. Una assignació bilateral és estable si cap subconjunt d'agents pot millorar, en relació amb la seva assignació proposada, reassignant-se només entre ells. L'estabilitat és una propietat imprescindible si l'assignació bilateral és voluntària. La pràctica del disseny de mercats consisteix a aplicar aquests models d'assignació bilaterals a problemes específics d'assignació amb l'objectiu de proposar millores en la manera en què aquests es resolten. En la conferència dono una breu descripció de la trajectòria acadèmica dels guardonats i descriu les seves contribucions tot presentant una aplicació d'un disseny de mercat: l'organització d'un sistema centralitzat de trasplantaments creuats de ronyons de donants vius incompatibles amb els seus respectius pacients.

## Els guardonats

El Premi de l'Sveriges Riskbank en Ciències Econòmiques en memòria d'Alfred Nobel 2012 va ser atorgat conjuntament a Alvin E. Roth i Lloyd S. Shapley. El propòsit principal d'aquesta conferència és descriure la investigació de Roth i Shapley sobre «la teoria de les assignacions estables i la pràctica del disseny de mercats», que justifica la concessió del premi.

Roth va néixer a Nova York el 18 de desembre de 1951. Es va graduar a la Universitat de Colúmbia el 1971 (quan tenia dinou anys!) amb una llicenciatura en investigació d'operacions. Va obtenir el seu doctorat, també en investigació d'operacions, a la Universitat de Stanford el 1974 sota la supervisió de Robert B. Wilson. Les dues primeres feines acadèmiques de Roth van ser en els departaments d'Economia de la Universitat d'Illinois (1974-1982) i de la Universitat de Pittsburgh (1982-1998). El 1998 es va traslladar a la Universitat Harvard amb un nomenament conjunt del Departament d'Economia i de l'Escola de Negocis Harvard. Ha estat professor a Harvard fins a principis del 2013, quan es va traslladar al Departament d'Economia de la Universitat de Stanford. La tesi doctoral de Roth fou sobre conjunts estables de Von Neumann i Morgenstern. Els seus interessos d'investigació han estat amplis i s'han mogut consistentment per incloure la negociació axiomàtica, l'economia experimental, l'aprenentatge en els jocs no coope-

ratius, la teoria de les assignacions estables en mercats bilaterals i el disseny de mercats. Segons la Reial Acadèmia Sueca de les Ciències el premi li ha estat atorgat per la seva investigació en les dues últimes àrees, tot i que compta amb contribucions fonamentals en les altres. Vegeu, per exemple, Roth (1979), Roth i Ockenfels (2002) i Erev i Roth (1998); aquest últim article és encara el seu article més citat a la base de dades de Scopus.

Shapley va néixer a Cambridge (Nova Anglaterra) el 2 de juny de 1923. Després de servir en el Cos Aeri de l'Exèrcit dels Estats Units d'Amèrica a Chengdu, Xina, durant la Segona Guerra Mundial, va anar a la Universitat Harvard, on es va graduar el 1948 amb una llicenciatura en matemàtiques. Va obtenir el seu doctorat en matemàtiques a la Universitat de Princeton el 1953 sota la supervisió d'Albert W. Tucker. Shapley ha tingut només dues afiliacions: a la RAND Corporation (1954-1981) i en els departaments de Matemàtiques i d'Economia de la Universitat de Califòrnia a Los Angeles, des de 1981 fins a l'actualitat. La seva tesi doctoral fou sobre funcions multivalors additives i no additives. Shapley ha fet contribucions fonamentals en tots els àmbits de la teoria de jocs; per exemple, la teoria del nucli, el valor de Shapley, els jocs repetits i estocàstics, el potencial d'un joc i la teoria de les assignacions estables en mercats bilaterals. Molts teòrics de jocs pensaven que el fet que Shapley no hagués estat guardonat encara amb el Premi Nobel d'Economia era una trista omisió. Ara estem contents pel fet que aquesta omisió s'ha corregit l'any 2012.

La concessió del Premi Nobel d'Economia conjuntament a Roth i Shapley pot ser vista com el reconeixement de dues parts complementàries d'una investigació: a Shapley per les aportacions teòriques a la teoria de les assignacions estables en problemes d'assignació bilaterals i a Roth per les aplicacions d'aquesta teoria amb l'objectiu de millorar el funcionament de les institucions que resolen problemes reals d'assignació bilaterals. Les principals referències d'aquestes contribucions complementàries són: D. Gale i L. Shapley, «College admissions and the stability of marriage», *American Mathematical Monthly*, 69 (1962), p. 9-15; L. Shapley i H. Scarf, «On cores and indivisibilities», *Journal of Mathematical Economics*, 1 (1974), p. 23-28, per la teoria, i A. Roth, «The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in Game Theory», *Journal of Political Economy*, 92 (1984), p. 991-1016; A. Roth i E. Peranson, «The redesign of the matching market for American physicians: some engineering aspects of economic design», *American Economic Review*, 89 (1999), p. 748-780; A. Roth, T. Sönmez i U. Ünver, «Kidney exchange», *Quarterly Journal of Economics*, 119 (2004), p. 457-488, per dues aplicacions de la teoria al problema de l'assignació de metges interns residents als programes formatius hospitalaris nord-americans i al problema dels trasplantaments creuats de ronyons entre parelles pacient-donant incompatibles. El llibre de Roth i Sotomayor (1990) conté una revisió magistral de tota la literatura sobre les assignacions bilaterals des de 1962 fins a 1990, i encara és la millor porta d'entrada a la teoria sobre els problemes d'assignació bilaterals i les seves aplicacions.

Roth i Shapley no van escriure conjuntament, però Roth ha seguit de prop la investigació de Shapley; el seu quart article i el seu quart llibre ho mostren: A. Roth, «The Shapley value as a von Neumann-Morgenstern utility», *Econometrica*, 45 (1977), p. 657-664; A. Roth (ed.), *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, 1988.

El ja desaparegut David Gale havia fet contribucions fonamentals a la teoria de les assignacions bilaterals estables i és raonable pensar que ell també hauria estat guardonat amb el premi si hagués estat viu l'any 2012. Gale va néixer a Nova York el 13 de desembre 1921 i va morir a Berkeley (Califòrnia) el 7 de març de 2008. Va obtenir el doctorat a la Universitat de Princeton el 1949 sota la supervisió d'Albert W. Tucker. Va tenir dues afiliacions principals: a la Universitat Brown (de 1954 a 1965) i a la Universitat de Califòrnia a Berkeley (1966-2008). Gale va fer també contribucions rellevants a l'economia matemàtica i a la teoria de jocs. Gale (1960) segueix sent una referència molt útil sobre les aplicacions de la programació lineal a l'economia.

## La teoria de les assignacions bilaterals estables i el disseny de mercats

Els participants en alguns mercats no poden dividir-se, *a priori*, entre compradors i venedors. Si el preu d'un bé varia suficientment, un participant en el mercat pot ser un venedor i un comprador en pocs minuts de diferència. Les accions són clars exemples de béns intercanviats en aquesta classe de mercats. No obstant això, hi ha molts altres mercats sense aquesta propietat: els participants són compradors o venedors, independentment del preu del bé. Les característiques físiques o jurídiques dels participants fan que siguin en un i només en un dels dos costats del mercat. Per exemple, un professor universitari no pot convertir-se en una universitat, fins i tot després d'una dràstica reducció del salari dels professors, ni la universitat pot convertir-se en un professor universitari després d'un gran augment del salari.

Hi ha molts problemes d'assignació bilaterals, que no es resolten necessàriament a través dels mercats, en els quals els participants es distribueixen, *a priori*, en dos conjunts disjunts. Per exemple, entre els homes i les dones; els treballadors i les empreses, i els estudiants i els col·legis. El problema d'assignació és precisament aparellar cada participant d'un dels dos conjunts amb un participant de l'altre conjunt (o quedar-se sense aparellar), i fer-ho tenint en compte les preferències que cada participant d'un conjunt té sobre els participants de l'altre conjunt (més la perspectiva de continuar sense aparellar). Un perfil de preferències és una llista de preferències, una per a cada participant. Però l'aparellament ha de ser bilateral: si el participant  $i$  s'aparella amb  $j$ ,  $j$  s'ha d'aparellar amb  $i$ . D'altra banda, aquests problemes tenen sovint dues propietats addicionals que els distingeixen dels mercats convencionals. En primer lloc, la coincidència entre dos participants requereix mutu acord: si  $i$  tria aparellar-se amb  $j$ ,  $i$  ha de ser triat per  $j$ . En canvi, quan jo compro una taronja, a la taronja no se li pregunta si vol ser comprada per mi (transaccions d'una sola voluntat), però si un professor és contractat per una universitat, el professor ha de voler treballar per a la universitat i la universitat ha de voler contractar-lo (transaccions amb coincidència de voluntats). En segon lloc, els preus no tenen cap paper per facilitar els aparellaments i resoldre els potencials desequilibris entre les voluntats mútues.

Els models d'assignació bilaterals formalitzen les característiques principals d'aquests problemes d'assignació. Shapley va contribuir al desenvolupament de les primeres etapes d'aquesta teoria; específicament, Gale i Shapley (1962) proposen la noció d'estabilitat d'una assignació com la propietat rellevant, sempre que els aparellaments siguin voluntaris. Una assignació (o aparellament) entre els dos conjunts de participants és estable relativa a un perfil de preferències si: 1) tots els participants estan o bé sense aparellar, o bé aparellats amb un participant que és es-

trictament preferit a continuar sense aparellar, i 2) no hi ha dos participants, en conjunts diferents, que no estan aparellats entre ells, però que tots dos preferirien estar-ho en comptes de quedar-se amb la parella proposada per l'assignació.

Encara que Roth també té aportacions teòriques fonamentals als models d'assignació bilaterals, ha estat el fundador i contribuïdor principal al disseny de mercats. Aquesta àrea utilitza els models d'assignació bilaterals, així com altres eines, per analitzar problemes d'assignació reals. Es restringeix l'atenció a les situacions particulars modificant el model general i abstracte per incorporar-hi els detalls específics del problema particular en consideració. Per tant, obté conclusions que no tenen validesa general (és clar), però, com que té en compte els detalls institucionals del problema en qüestió, permet a l'investigador fer una anàlisi més profunda i poder recomanar així possibles canvis per millorar la forma en què els problemes d'assignació específics es resolen en la pràctica. Per exemple, Roth i els seus col·laboradors han proposat modificacions substancials en les solucions de problemes com l'assignació anual dels metges interns residents als programes formatius hospitalaris nord-americans, o dels nens a les escoles en ciutats com Boston i Nova York, o l'organització d'un sistema centralitzat per proposar trasplantaments creuats de ronyons de donants vius que són incompatibles amb els seus respectius pacients (familiars directes o persones estimades).

A la resta de l'exposició, en lloc de presentar diferents models d'assignació bilaterals i les seves aplicacions com a exemples pràctics de disseny de mercats, em limitaré a presentar una aplicació. En la propera secció, descriuré (al meu entendre) una de les aplicacions pràctiques més interessants del disseny de mercats: els programes de trasplantaments creuats de ronyons entre parelles pacient-donant incompatibles. Per a això, presentaré l'adaptació de Roth, Sönmez i Ünver (2004) del *Top Trading Cycle Algorithm* (proposat per Gale) com la millor solució per resoldre els problemes de trasplantaments creuats de ronyons, amb algunes referències al cas espanyol.

## Trasplantaments creuats de ronyons

Hi ha dos tractaments per als pacients amb malaltia renal: diàlisi i trasplantament. Com que la diàlisi provoca una forta dependència i té molts efectes secundaris (tant físics com psicològics), el trasplantament es considera el millor tractament. Els ronyons per a trasplantaments provenen de donants morts o vius. El primer trasplantament de ronyó reeixit va tenir lloc el 23 de desembre de 1954 a Boston. Es realitzà entre dos bessons idèntics (per eliminar la reacció immune) pels metges, entre d'altres, Joseph E. Murray, J. Hartwell Harrison i John P. Merrill (aquest últim va rebre el Premi Nobel de Medicina l'any 1990, juntament amb E. Donnall Thomas, «pels seus descobriments sobre el trasplantament d'òrgans o cèl·lules en el tractament de les malalties humanes»). El pacient va sobreviure vuit anys després del trasplantament. A finals del segle passat, i després de la millora en les teràpies immunosupressores, la majoria dels ronyons trasplantats en molts països provenien de donants morts; per exemple, el 1999 a Espanya menys de l'1 % de tots els trasplantaments renals van ser de donants vius (només 17 de 2.023). No obstant això, hi ha un acord unànim que la qualitat i la taxa d'èxit dels trasplantaments de ronyó de donants vius són superiors als de donants morts. En particular, la probabilitat que el ronyó trasplantat sobrevisqui cinc anys és de 0,87 si prové de donant viu i de 0,80 si es tracta de donant mort, i la probabilitat que el receptor sobrevisqui cinc anys és de 0,93 i 0,86, respectivament. Tots els països amb programes de trasplanta-

ments pateixen d'escassetat de ronyons, de manera que la promoció de la donació de ronyons de donants vius pot ajudar a resoldre aquesta escassetat. Gairebé a tot arreu el temps mitjà que un pacient ha de romandre a la llista d'espera per a un trasplantament de ronyó és molt superior als dos anys. A més, l'augment de l'esperança de vida, així com la disminució de la mortalitat per accidents de cotxe i moto, ha fet que l'escassetat sigui encara més greu. Per tot això, en els últims anys, molts països estan promovent la donació de donants vius; per exemple, el 2011, a Espanya el 12% de tots els trasplantaments renals ja van ser de donants vius (312 de 2.498).

En la donació directa, el pacient rep, si és compatible, un dels dos ronyons d'un familiar o amic (en general, el cònjuge o els germans del pacient). Les incompatibilitats més bàsiques són la sanguínia i el tipus de teixit (aquesta última està relacionada amb la genètica que produeix la reacció immune), encara que l'edat del ronyó també és rellevant per a la supervivència de l'empelt renal. Però si el ronyó no és compatible, el trasplantament no és possible i el ronyó del donant es retira del sistema. S'estima que aproximadament un terç dels pacients amb un donant potencial s'exclouen del sistema a causa de les incompatibilitats. Fins fa molt poc aquesta era l'única donació en viu, i no hi havia un sistema per aprofitar els donants no compatibles amb el seu pacient, que simplement eren enviats a casa. L'any 1986, el metge nord-americà F. T. Rapaport va ser el primer a proposar els intercanvis creuats de ronyons de donants vius. La idea és simple: un donant no compatible podria ser compatible amb un pacient d'una altra parella pacient-donant no compatibles. Suposem que un dia un nefròleg rep un pacient acompanyat d'un familiar que està disposat a donar-li un ronyó. Per desgràcia, l'anàlisi mostra que són incompatibles. L'endemà, el mateix nefròleg rep una altra parella pacient-donant que també són incompatibles. Però cada pacient és compatible amb el donant de l'altra parella, i per tant, un intercanvi creuat de ronyons és possible (en aquest cas, mitjançant el compliment d'un cicle de longitud 2). O fins i tot es podrien realitzar cicles més llargs implicant tres o més parelles pacient-donant incompatibles.

Un problema de trasplantaments creuats de ronyons consisteix, primer, en un conjunt de parelles pacient-donant incompatibles. Segon, per a cada pacient, en una preferència o llista ordenada de tots els ronyons dels donants, que respon al grau de compatibilitat entre el pacient i cada un dels ronyons. Formalment, sigui  $N = \{1, \dots, n\}$  el conjunt de pacients i sigui  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$  el conjunt de ronyons dels donants vius. Cada pacient  $i \in N$  té un donant, el ronyó del qual no és compatible amb  $i$ . Per tant,  $\{(1, k_1), \dots, (n, k_n)\}$  és el conjunt de  $n$  parelles pacient-donant incompatibles. Cada pacient  $i \in N$  té un ordre de preferència (una llista ordenada) de tots els ronyons dels donants (l'ordre entre els ronyons incompatibles és irrellevant). Per exemple, amb  $n = 4$ , la llista ordenada

$P_3$

$k_2$

$k_4$

$k_3$

$k_1$

indica que, per al pacient 3,  $k_2$  i  $k_4$  són dos ronyons compatibles (ja que són millors que el ronyó incompatible  $k_3$ ),  $k_2$  és millor que  $k_4$  i  $k_1$  no és compatible (ja que és pitjor que el ronyó incompatible  $k_3$ ). En general, la llista ordenada de tots els ronyons (de millor a pitjor) reflecteix, segons el nefròleg del pacient  $i$ , la qualitat *ex ante* ordinal del trasplantament entre cada ronyó i el pacient  $i$ . La qüestió de disseny de mercat en aquest cas és determinar un procediment sistemàtic per seleccionar, per a cada possible problema de trasplantaments creuats de ronyons, un conjunt de trasplantaments compatibles amb algunes propietats desitjables. Un conjunt de trasplantaments compatibles pot ser representat per una assignació bilateral  $\alpha: N \rightarrow K$ , on  $\alpha(i) = k_j$  vol dir que si  $i \neq j$ , el pacient  $i$  rep el ronyó  $k_j$  (el ronyó del donant del pacient  $j$ ), i si  $i = j$ , el pacient  $i$  no rep cap ronyó ja que és incompatible amb el ronyó  $k_i$  (i continua amb la diàlisi en espera d'una nova execució del procediment d'assignació). Tinguem en compte que el conjunt de parelles originals de pacient-donant incompatibles pot ser representat per l'assignació bilateral  $\mu: N \rightarrow K$ , on  $\mu(i) = k_i$  per a tot  $i \in N$ . Per tant, un cas particular d'un problema de trasplantaments creuats de ronyó és una quàdruple  $(N, K, \mu, P)$ , on  $N$  és el conjunt de pacients,  $K$  és el conjunt dels ronyons,  $\mu$  representa el conjunt de parelles originals de pacient-donant incompatibles i  $P = (P_1, \dots, P_n)$  és el perfil de preferències dels pacients sobre el conjunt  $K$  de tots els ronyons (de millor a pitjor). Roth, Sönmez i Ünver (2004) estudien aquest problema i proposen una adaptació d'un model general presentat per Shapley i Scarf (1974), així com la d'un algoritme ja conegut en la teoria de les assignacions bilaterals per resoldre tots els problemes de trasplantaments creuats de ronyons. L'algoritme és conegut com el *Top Trading Cycle Algorithm*, i m'hi referiré com l'algoritme TTC.

Donat un problema de trasplantaments creuats de ronyons (això és, un conjunt de parelles pacient-donant incompatibles i un perfil de les llistes ordenades de tots els ronyons, una per a cada pacient), l'algoritme TTC resol el problema (és a dir, proposa un conjunt de trasplantaments compatibles) en etapes. En cada etapa, l'algoritme TTC procedeix de la manera següent: 1) es construeix un graf en què els vèrtexs són les parelles pacient-donant incompatibles el pacient de les quals encara no ha estat assignat en les etapes anteriors; 2) es dirigeix el graf (de cada vèrtex surt una sola fletxa assenyalant un vèrtex) fent que cada pacient assenyali el millor ronyó (d'acord amb la seva llista ordenada dels ronyons) entre els que encara són presents en l'etapa; 3) s'identifiquen els vèrtexs dels cicles del graf dirigit, i 4) se satisfan els cicles, assignant a cada pacient dels vèrtexs dels cicles el ronyó que ell assenjala. L'algoritme TTC identifica i satisfà successivament els cicles al llarg de les etapes. Observeu que en cada etapa sempre hi ha almenys un cicle, si hi ha diversos cicles aquests no s'intersequen entre ells i un cicle pot tenir un únic vèrtex, el pacient del qual assenjala el ronyó del seu propi donant (i òbviament, com que no són compatibles, el pacient en aquest cas no és trasplantat i continuarà amb el tractament de diàlisi). Per tant, l'*input* de l'algoritme TTC és un problema concret de trasplantaments creuats de ronyons  $(N, K, \mu, P)$  i el seu *output* és una solució del problema (és a dir, una assignació bilateral) que consisteix en una proposta de trasplantaments creuats basada a satisfer els cicles identificats al llarg de les diferents etapes de l'algoritme. Denotem per  $\eta: N \rightarrow K$  l'assignació bilateral que representa els trasplantaments proposats per l'*output* de l'algoritme TTC aplicat al problema concret de trasplantaments creuats de ronyons  $(N, K, \mu, P)$ , l'*input* de l'algoritme. L'exemple següent il·lustra el funcionament de l'algoritme TTC.

Exemple: Sigui  $(N, K, \mu, P)$  el problema concret de trasplantaments creuats de ronyons amb vuit parelles pacient-donant incompatibles,  $\mu(i) = k_i$  per a tot  $i = 1, \dots, 8$ , i el perfil  $P = (P_1, \dots, P_8)$

representat a la taula 1, on el ronyó en negreta en les preferències dels pacients indica l'assignació bilateral inicial  $\mu$  de cada pacient.

TAULA 1

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$k_2$	$k_3$	$k_1$	$k_8$	$k_4$	$k_8$	$k_4$	$k_6$
$k_3$	$k_1$	<b><math>k_3</math></b>	$k_7$	$k_7$	$k_1$	$k_8$	<b><math>k_8</math></b>
$k_5$	<b><math>k_2</math></b>	$k_7$	<b><math>k_4</math></b>	$k_3$	<b><math>k_6</math></b>	$k_3$	$k_1$
$k_6$	$k_8$	$k_2$	$k_1$	$k_6$	$k_5$	$k_6$	$k_2$
$k_8$	$k_6$	$k_5$	$k_2$	$k_1$	$k_4$	$k_1$	$k_3$
<b><math>k_1</math></b>	$k_4$	$k_8$	$k_3$	$k_8$	$k_3$	$k_5$	$k_1$
$k_7$	$k_7$	$k_6$	$k_5$	$k_2$	$k_2$	$k_2$	$k_5$
$k_4$	$k_5$	$k_4$	$k_6$	<b><math>k_5</math></b>	$k_7$	<b><math>k_7</math></b>	$k_4$

*Etapa 1:* L'input és el perfil  $P$  representat a la taula 1. Cada vèrtex  $(i, k_i)$  assenyala el vèrtex  $(j, k_j)$  de manera que  $k_j$  és el millor ronyó per al pacient  $i$ . Per tant, en aquest cas només hi ha dos cicles

$$(1, k_1) \rightarrow (2, k_2) \rightarrow (3, k_3) \rightarrow (1, k_1)$$

$$(6, k_6) \rightarrow (8, k_8) \rightarrow (6, k_6)$$

ja que

$$(5, k_5) \rightarrow (4, k_4) \rightarrow (8, k_8)$$

$$(7, k_7) \rightarrow (4, k_4) \rightarrow (8, k_8).$$

Per tant,  $\eta(1) = k_2$ ,  $\eta(2) = k_3$ ,  $\eta(3) = k_1$ ,  $\eta(6) = k_8$  i  $\eta(8) = k_6$ , i queden sense assignar els pacients 4, 5 i 7.

*Etapa 2:* L'input és el subperfil representat a la taula 2.

TAULA 2

$P_4$	$P_5$	$P_7$
$k_7$	$k_4$	$k_4$
<b><math>k_4</math></b>	$k_7$	$k_5$
$k_5$	<b><math>k_5</math></b>	<b><math>k_7</math></b>

En aquesta etapa hi ha un cicle, ja que  $(5, k_5) \rightarrow (4, k_4) \rightarrow (7, k_7) \rightarrow (4, k_4)$ . Per tant,  $\eta(4) = k_7$ ,  $\eta(7) = k_4$ , i queda sense assignar el pacient 5.

*Etapa 3: L'input és el subperfil (trivial) representat a la taula 3.*

TAULA 3
$P_5$
$k_5$

En aquesta etapa hi ha un cicle, ja que  $(5, k_5) \rightarrow (5, k_5)$ . Per tant,  $\eta(5) = k_5$ .

I així acaba l'aplicació de l'algoritme TTC al problema  $(N, K, \mu, P)$  amb l'assignació final següent (que indica els corresponents trasplantaments a realitzar):

$$\eta(1) = k_2, \eta(2) = k_3, \eta(3) = k_1, \eta(4) = k_7, \eta(5) = k_5, \eta(6) = k_8, \eta(7) = k_4 \text{ i } \eta(8) = k_6.$$

L'algoritme TTC té moltes propietats desitjables. En primer lloc, és individualment racional: cada pacient que rep un ronyó d'un altre donant en el resultat de l'algoritme TTC prefereix aquesta situació a no rebre cap ronyó i continuar amb la diàlisi. En segon lloc, és eficient: no és possible millorar tots els pacients simultàniament; és a dir, si hi ha un altre conjunt alternatiu de trasplantaments on un pacient rep un ronyó estrictament preferit, llavors hi ha d'haver un altre pacient que rebí un ronyó estrictament menys preferit. En tercer lloc, l'*output* de l'algoritme TTC és una assignació estable (en termes de la teoria de jocs, pertany al nucli del problema de trasplantaments creuats de ronyons): no hi ha cap subconjunt de parelles pacient-donant que, reassignant-se només entre ells els ronyons dels donants dels pacients del subconjunt, pugui obtenir millors ronyons; és a dir, cap subgrup de parelles pacient-donant (per exemple els d'un hospital, una ciutat o una regió) pot objectar unànimement a l'*output* de l'algoritme TTC (Shapley i Scarf, 1974). D'altra banda, el nucli (és a dir, el conjunt d'assignacions bilaterals estables) de cada problema de trasplantaments creuats de ronyons conté una única assignació bilateral i aquesta coincideix amb l'*output* de l'algoritme TTC (Roth i Postlewaite, 1977). Observem que, considerant el conjunt de tots els pacients i els conjunts formats per cada un dels pacients individualment, si una assignació pertany al nucli, llavors és eficient i individualment racional. En quart lloc, el mecanisme associat a l'algoritme TTC no és manipulable: cap pacient podria obtenir un ronyó estrictament millor declarant (de fet, el seu nefròleg) una llista ordenada de ronyons falsa (Roth, 1982). A més, el mecanisme que, per a cada problema de trasplantaments creuats de ronyons, selecciona l'*output* de l'algoritme TTC és l'únic mecanisme individualment racional, eficient i no manipulable (Ma, 1994). Finalment, la qualitat del ronyó rebut per cada pacient en l'*output* de l'algoritme TTC depèn positivament de la qualitat del ronyó del seu donant (Roth i Postlewaite, 1977).

Roth, Sönmez i Ünver (2004) també descriuen algunes simulacions que suggereixen que l'algoritme TTC funciona bé i que es pot aplicar als problemes de trasplantaments creuats de ronyons reals. De fet és utilitzat en la majoria de països amb programes de trasplantaments creuats. A més, en col·laboració amb els metges Francis Delmonico i Susan Saidman, van promoure el



New England Program for Kidney Exchange (NEPKE). Molts països tenen ara programes centralitzats de trasplantaments creuats; per exemple, Espanya, els Països Baixos, el Regne Unit, Itàlia i Corea del Sud.

La publicació de Roth, Sönmez i Ünver (2004) també ha generat una llarga llista d'articles que estudien diferents temes relacionats amb la naturalesa específica del problema de trasplantaments creuats de ronyons que poden fer necessari adaptar l'algoritme TTC. Per exemple: 1) per fer front al creixent nombre de donants altruistes (anomenats *bons samaritans*), els ronyons dels quals es poden utilitzar per iniciar cadenes (en lloc de cicles) de trasplantaments; *The New York Times*, el 18 de febrer de 2012, contenia un article titulat «60 Lives, 30 Kidneys, All Linked», on es descrivia una cadena de trenta trasplantaments iniciada un any abans per un bon samarità. 2) Les conseqüències de requerir propietats d'incentius alternatives (més febles que la no-manipulabilitat) quan els pacients (els seus neuròlegs) declaren la llista ordenada dels ronyons dels potencials donants. 3) La presència de pacients amb diversos donants potencials. 4) Les qüestions ètiques relacionades amb la situació pitjor *ex ante* a la qual s'enfronten els pacients de tipus sanguini O, ja que només poden rebre ronyons de donants de tipus O. 5) Els efectes de considerar explícitament la característica dinàmica del problema, on la base de dades de parelles canvia sovint a causa de l'entrada i sortida de parelles donant-pacient.

En qualsevol cas, el problema dels trasplantaments creuats de ronyons s'ha convertit en una aplicació natural i reeixida al disseny de mercats de la teoria de les assignacions estables per ajudar els éssers humans a viure més, i millor. Les contribucions d'Alvin Roth i Lloyd Shapley ho han fet possible.

## Bibliografia

- EREV, I.; ROTH, A. «Predicting how people play games: reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria». *American Economic Review*, 88 (1998), p. 848-881.
- GALE, D. *The theory of linear economic models*. Nova York: McGraw-Hill, 1960.
- GALE, D.; SHAPLEY, L. «College admissions and the stability of marriage». *American Mathematical Monthly*, 69 (1962), p. 9-15.
- MA, J. «Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities». *International Journal of Game Theory*, 23 (1994), p. 75-83.
- ROTH, A. «The Shapley value as a von Neumann-Morgenstern utility». *Econometrica*, 45 (1977), p. 657-664.
- «Independence of irrelevant alternatives, and solutions to Nash's bargaining problem». *Journal of Economic Theory*, 16 (1979), p. 247-251.
- «Incentive compatibility in a market with indivisible goods». *Economics Letters*, 9 (1982), p. 127-132.
- «The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory». *Journal of Political Economy*, 92 (1984), p. 991-1016.
- ROTH, A. (ed.). *The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press, 1988.

- ROTH, A.; OCKENFELS, A. «Last-minute bidding and the rules for ending second-price auctions: Evidence from eBay and Amazon auctions on the internet». *American Economic Review*, 92 (2002), p. 1093-1103.
- ROTH, A.; PERANSON, E. «The redesign of the matching market for American physicians: some engineering aspects of economic design». *American Economic Review*, 89 (1999), p. 748-780.
- ROTH, A.; POSTLEWAITE, A. «Weak versus strong domination in a market with indivisible goods», *Journal of Mathematical Economics*, 4 (1977), p. 131-137.
- ROTH, A.; SÖNMEZ, T.; ÜNVER, U. «Kidney exchange». *Quarterly Journal of Economics*, 119 (2004), p. 457-488.
- ROTH, A.; SOTOMAYOR, M. *Two-sided Matching: A study in game-theoretic modelling and analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. (Econometric Society Monographs; 18)
- SHAPLEY, L.; SCARF, H. «On cores and indivisibilities». *Journal of Mathematical Economics*, 1 (1974), p. 23-28.