La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i es premiarà els guanyadors amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

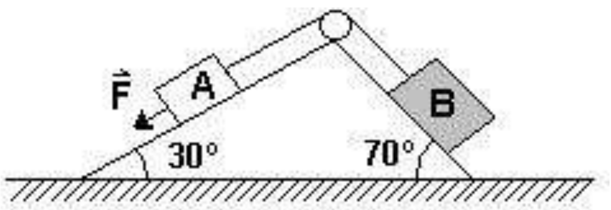
Acompanyant la solució, l'estudiant ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 d'setembre de 2007 a:

probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat



Els dos blocs A i B de la figura estan inicialment en repòs units per una corda inextensible i sense massa que passa per una politja ideal exempta de fricció. Els blocs tenen respectivament masses de 2 i 5 kg i el coeficient de fricció estàtic entre ambdós blocs i els corresponents plans inclinats és de 0,3.

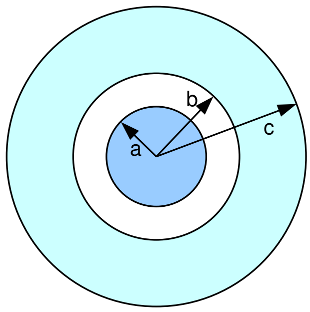
Si apliquem sobre el cos A una força paral·lela al primer pla inclinat tal com indica la figura adjunta, determineu l'interval de valors de la força F que manté l'equilibri del sistema.

Problema per a l'alumnat universitari

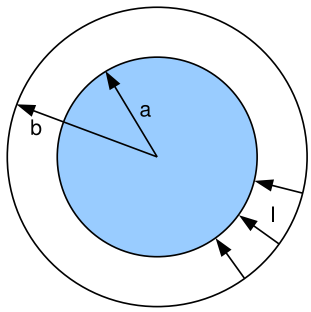
Si fem una ullada als llistats de freqüències electromagnètiques trobem que la freqüència més baixa de totes es diu ressonància de Schumann i val 7,83 Hz.

Aquest senyal és degut a la interacció entre la Terra i la ionosfera, a través de l'atmosfera. Entre la superfície de la terra i el límit inferior de la ionosfera a 55 Km d'altura podem definir una cavitat. Existeix un flux vertical entre les dues de $1-3\cdot10^{-12}$ A i cada una dels milers de tempestes simultànies que es produeixen en la Terra descarrega entre 0,5 A i 1 A.

1) Calculeu la capacitat de la cavitat esfèrica, suposant que tenim la distribució superficial de càrrega a un radi a (superfície de la Terra) i una distribució contínua i homogènia de càrrega entre els radis b i c (ionosfera).



2) Calculeu la inductància donada per un tall de l'esfera de radis a i b. El corrent circula entre a i b, travess la superfície i, aplicant el teorema d'Ampère, podrem calcular el camp magnètic necessari per trobar la inductància.



3) Calculeu la freqüència de ressonància del circuit

L-C prenent el radi de la Terra a de 6371 Km, l'inici de la ionosfera b a 55 km d'altura i un gruix $c-b$ de 1550 km.

Solució als problemes del número 31 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució:

En el primer cas fem incidir un protó sobre un altre de fix. La mínima distància de separació correspondrà a quan la velocitat del protó incident sigui nul·la. Així doncs, per conservació de l'energia mecànica del protó incident entre la situació inicial i la de mínima distància de separació, es compleix:

$$\frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r_{\min}}$$

i, fent la substitució numèrica corresponent, obtenim: $r_{\min}$= 1,10·10^{-8} m.

En el segon cas fem incidir un protó sobre un altre de lliure i en repòs. Així doncs, ara hem de considerar el sistema format pels dos protons: la força de Coulomb que actua sobre el protó incident fa que la seva velocitat vagi disminuint mentre que la que actua sobre el protó inicialment fix fa que es vagi incrementant. La mínima distància de separació correspondrà a quan la velocitat de les dues càrregues sigui la mateixa. Per trobar el valor d'aquesta velocitat, apliquem la conservació de la quantitat de moviment del sistema entre la situació inicial i la de mínima separació:

$m_p v_0 = m_p v + m_p v \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$=2,25·$10^3$ m/s

Per calcular la mínima distància de separació, apliquem la conservació de l'energia mecànica del sistema entre la situació inicial i la de mínima separació:

$$\frac{1}{2}m_p v_0^2 = \frac{1}{2}m_p\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_p\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r_{\min}}$$

i, fent la substitució numèrica corresponent, obtenim: $r_{\min}$= 2,20·10^{-8} m.

Del problema per a l'alumnat universitari

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució:

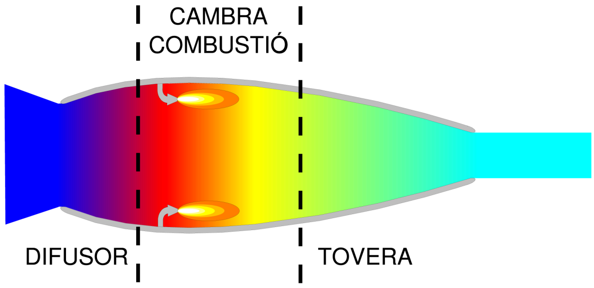
El 1960 Robert W. Bussard va proposar un nou tipus de vehicle interestel·lar, anomenat *ramjet* o *estatocol-lector*.

La idea va ser àmpliament utilitzada en la ciència-ficció, perquè al principi semblava un disseny perfecte per a una nau interestel·lar.

Algunes de les obres més destacades amb estatocol·lectors com a part fonamental de la trama són Tau Cero, novel·la de Poul Anderson, Efímeras, de Kevin O'Donnell Jr., A través del mar de soles i Redentora, de Gregory Benford, i Mundo Anillo i Los ingenieros del mundo anillo, de Larry Niven.

Estructura del *ramjet*

L'estatocol·lector o *ramjet* de Bussard es basa en el funcionament de l'estatoreactor o *ramjet* que es fa servir en avions militars de gran velocitat i supersònics. El seu disseny és molt senzill perquè no disposa de parts mòbils com el compressor i la turbina.

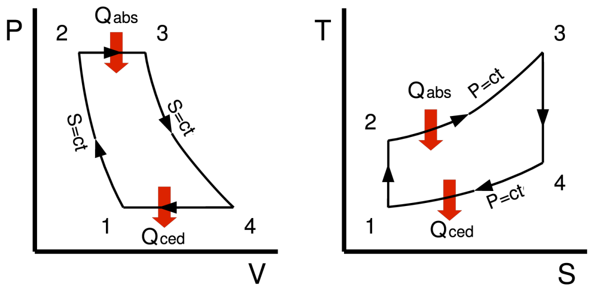


Esquema del ramjet

En el disseny del *ramjet* de Bussard s'ha canviat la cambra de combustió per una cambra de fusió d'hidrogen capturat del medi interestel·lar.

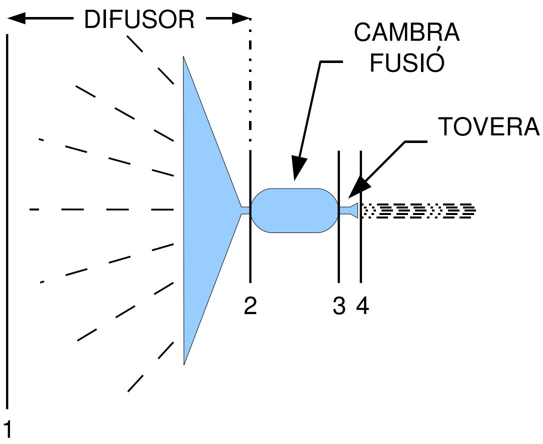
El cicle de Brayton és el cicle termodinàmic que explica el seu funcionament. Està compost per quatre etapes.

1. Una compressió adiabàtica al difusor d'entrada.
2. Addició de calor a P = constant a la cambra de reacció.
3. Una expansió adiabàtica a la tovera de sortida.
4. Cessió de calor a P = constant al medi interestel·lar.



Dibuix del cicle de Brayton

Els punts 1, 2, 3 i 4 es defineixen com les superfícies de control següents Considerarem un sistema de flux permanent. Les propietats del volum canvien d'un punt



Dibuix esquemàtic de la nau amb les superfícies 1, 2, 3 i 4

a un altre, però en qualsevol punt fix romandran inalterables tot el temps. Cap propietat, intensiva o extensiva dins del flux, canvia amb el temps. Així, la massa total o energia que entra al flux ha de ser igual a la que surt.

$$\dot{m} = constant, \tag{1}$$

on $\dot{m}$ és la massa per unitat de temps que travessa alguna de les superfícies de control. Fent servir el pes molecular del fluid, M, tenim que els mols per unitat de temps també es conserven.

$$m = M \cdot n \implies \dot{m} = M \cdot \dot{n}. \tag{2}$$

Gas interestel·lar

Considerem el gas interestel·lar com un gas ideal monoatòmic format per hidrogen, amb densitat d'1 àtom per cm^3 i temperatura de 3 K.

$$\rho_1 = 10^6 \frac{\text{àtoms}}{\text{m}^3} \tag{3}$$
$$T_1 = 3 \text{ K} \tag{4}$$

La densitat molar i la pressió del gas són:

$$\eta_1 = \frac{n}{V_1} = \frac{\rho_1}{N_A} = 1.66 \cdot 10^{-18} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \tag{5}$$
$$P_1 = R \cdot \eta_1 \cdot T_1 = 4.14 \cdot 10^{-17} \text{ Pa} \tag{6}$$

Compressió adiabàtica al difusor

Un difusor ideal on $Q = 0$ i $W = 0$ (procés adiabàtic), amb un flux de gas estacionari compleix el balanç d'energies següent entre les superfícies 1 i 2:

$$\dot{H}_1 + \dot{E}_1 = \dot{H}_2 + \dot{E}_2, \tag{7}$$

on H és l'entalpia i E l'energia cinètica del gas. Farem una aproximació relativista al problema prenent com a equació de l'energia

$$E = mc^2\gamma, \quad \text{on} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

L'energia cinètica del gas que travessa una superfície per unitat de temps serà:

$$\dot{E} = \dot{m}c^2\gamma. \tag{9}$$

La variació d'entalpia per unitat de temps entre les superfícies 1 i 2 és

$$\Delta\dot{H} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{m}c^2(\gamma - 1), \tag{10}$$

on la velocitat del gas que travessa 1 és igual a la velocitat de la nau i el gas es frena fins que la seva velocitat és molt petita, negligible, en 2, abans d'entrar a la cambra de combustió. Una compressió adiabàtica té la variació següent d'entalpia per unitat de temps.

$$\Delta\dot{H} = \dot{n} \cdot C_p \cdot \Delta T, \tag{11}$$

amb la qual cosa podem aïllar la variació de temperatura com

$$\Delta T = T_c(\gamma - 1) \quad \text{on} \quad T_c = \frac{M}{C_p}c^2. \tag{12}$$

Considerant el gas interestel·lar com un gas ideal monoatòmic format només per hidrogen, tenim que:

$$\left.\begin{array}{r} M = 10^{-3}\frac{\text{Kg}}{\text{mol}} \\ C_p = \frac{5}{2}R \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T_c = 4,33 \cdot 10^{12}\text{K}. \tag{13}$$

Atès que $T_1 \ll T_2$, la temperatura a l'entrada de la cambra de fusió és:

$$T_2 \simeq \Delta\dot{H} = T_c(\gamma - 1). \tag{14}$$

Perquè la fusió de l'hidrogen tingui lloc en la cambra de combustió necessitem que la temperatura del gas sigui superior a 10^6 K i inferior a 10^{10} K, i ens limita la velocitat de la nau.

$$10^6\text{K} < \Delta T < 10^6\text{K} \tag{15}$$
$$2,31 \cdot 10^{-7} < \gamma - 1 < 2,31 \cdot 10^{-3} \tag{16}$$
$$6,80 \cdot 10^{-4}c < v < 6,80 \cdot 10^{-2}c \tag{17}$$

Perquè a la cambra de combustió s'iniciï la fusió nuclear, la nau ha de superar els 200000 m/s. Això representa un problema ja que la nau necessita algun altre sistema de propulsió per obtenir aquesta velocitat inicial.

També tenim que si la velocitat supera $c/10$ la temperatura a la cambra de fusió serà tan alta que la reacció de fusió no tindrà lloc. L'energia cinètica dels protons serà massa gran i xocaran sense reaccionar entre ells.

A continuació calculem la densitat molar a la superfície 2. Una compressió adiabàtica compleix

$$T_1 \cdot V_1^{\lambda-1} = T_2 \cdot V_2^{\lambda-1}, \tag{18}$$

on λ és el coeficient adiabàtic i val 5/3. Aplicant el principi de continuïtat de la matèria, l'expressió anterior es pot escriure

$$\eta_2 = \eta_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{on} \quad \eta = \frac{n}{V}. \tag{19}$$

Fent servir l'equació 14 tenim

$$\eta_2 = \eta_1 \left(\frac{T_c}{T_1}(\gamma - 1)\right)^{\frac{3}{2}} \tag{20}$$

La densitat a l'entrada de la cambra de fusió és

$$\eta_2 = \eta_c(\gamma - 1)^{\frac{3}{2}}, \tag{21}$$

on

$$\eta_c = \eta_1 \left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2,88 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \tag{22}$$

La pressió del gas es pot calcular amb l'equació d'estat del gas ideal

$$P_2 = R \cdot \eta_2 \cdot T_2 = P_c(\gamma - 1)^{\frac{5}{2}}, \tag{23}$$

on

$$P_c = R\eta_c T_c = 1.04 \cdot 10^{14}\text{Pa} \tag{24}$$

Fent servir la inequació 16 tenim que els límits de densitat molar són

$$3,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} < \quad \eta_2 \quad < 3,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \tag{25}$$

$$2,66 \cdot 10^{-3}\text{Pa} < \quad P_2 \quad < 2,66 \cdot 10^{7}\text{Pa} \tag{26}$$

Aquestes densitats són massa petites, com veurem més endavant. Els reactors de fusió de tipus tokamak en què s'investiga actualment arriben a densitats de $3 \cdot 10^{-4}$ mol/m^3, que és la màxima densitat a què podem arribar.

Expansió isobàrica a la cambra de fusió

En la cambra de fusió el gas s'escalfa a pressió constant gràcies a l'energia emessa per les reaccions de fusió.

Tenint en compte la taxa de reacció entre els diferents elements i l'abundància relativa dels elements, la reacció més probable és la D-D (deuteri-deuteri). Suposant que el gas resta en la cambra de fusió 10^2 segons, l'energia per mol obtinguda per aquesta reacció és:

$$\frac{\Delta Q}{n} = \kappa \cdot \eta_2 \quad \text{on} \quad \kappa = 6.39 \cdot 10^5 \frac{\text{Jm}^3}{\text{mol}^2} \tag{27}$$

Una expansió isobàrica ha de complir la relació termodinàmica següent:

$$\frac{\Delta Q}{n} = C_p \cdot \Delta T. \tag{28}$$

L'increment de la temperatura del gas en la cambra de reacció és:

$$\Delta T = \frac{\kappa}{C_p} \cdot \eta_2. \tag{29}$$

Fent servir la inequació 25 podem trobar els límits a l'increment de temperatura en la cambra.

$$9,84 \cdot 10^{-6}\text{K} < \Delta T < 9,84\text{K} \tag{30}$$

Com veiem l'increment de temperatura a la cambra de fusió és molt petit comparat amb la temperatura d'entrada, a causa del fet que la densitat del gas a l'entrada de la cambra de reacció és molt petita.

Calculem la temperatura, pressió i densitat molar a la sortida de la cambra de combustió.

$$T_3 = T_2 + \Delta T = T_c(\gamma - 1) + \frac{\kappa \cdot \eta_c}{C_p}(\gamma - 1)^{\frac{3}{2}} \tag{31}$$

$$P_3 = P_2 \tag{32}$$

$$\eta_3 = \eta_2 \cdot \frac{T_2}{T_3}. \tag{33}$$

Expansió adiabàtica a la tovera

La tovera permet la sortida del gas escalfat de la cambra de reacció. Una tovera ideal expandeix el gas adiabàticament fins que iguala la pressió a la del gas exterior a la nau. Per això podem imposar que

$$P_4 = P_1. \tag{34}$$

Una expansió adiabàtica compleix l'equació

$$\frac{P_3^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{T_3} = \frac{P_4^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{T_4}. \tag{35}$$

Fent servir que $P_1 = P_4$ i $P_2 = P_3$, podem aïllar la temperatura de sortida de la tovera.

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{P_1}{P_c}\right)^{\frac{2}{5}} (\gamma - 1)^{-1}. \tag{36}$$

Fent servir 24, podem calcular

$$\frac{P_1}{P_c} = \frac{\eta_1}{\eta_c} \cdot \frac{T_1}{T_c} = \left(\frac{T_1}{T_c}\right)^{\frac{5}{2}}, \tag{37}$$

amb la qual cosa s'obtè T_4

$$T_4 = T_1 + \frac{\kappa \cdot \eta_1}{C_p} \left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}} (\gamma - 1)^{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

La variació d'entalpia per unitat de temps entre les superfícies 3 i 4 resulta

$$\Delta \dot{H} = \dot{n} \cdot C_p \cdot \Delta T = -\dot{m}c^2(\gamma' - 1), \tag{39}$$

on $\Delta T = T_4 - T_3$ i el factor γ' es refereix a la velocitat de sortida del gas.

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 + \frac{\kappa \cdot \eta_1}{C_p} \left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}} (\gamma - 1)^{\frac{1}{2}} \\ &- T_c(\gamma - 1) + \frac{\kappa \cdot \eta_1}{C_p} \left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} (\gamma - 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{40}$$

Traient factor comú i aproximant tenint en compte que

$$\left(\frac{T_c}{T_1}\right)(\gamma-1) \gg 1, \qquad (41)$$

de l'equació 39 podem aïllar

$$(\gamma'-1) \simeq (\gamma-1) + \frac{\kappa \cdot \eta_1}{M \cdot c^2}\left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}(\gamma-1)^{\frac{3}{2}} \qquad (42)$$

Calculem la velocitat d'escapament del gas a la sortida de la tovera i la comparem a la velocitat d'entrada.

- Si $(\gamma-1) = 2,31 \cdot 10^{-7}$ llavors $\gamma' - \gamma = 2,27 \cdot 10^{-18}$.
- Si $(\gamma-1) = 2,31 \cdot 10^{-3}$ llavors $\gamma' - \gamma = 2,27 \cdot 10^{-12}$.

El coeficient γ ens dóna la velocitat d'entrada del gas a la nau i el coeficient γ' ens dóna la velocitat de sortida del gas per la tovera. Podem veure que la diferència entre les dues és negligible.

La potència generada per la nau es calcula com la variació d'energia cinètica del gas que entra a la nau i del que en surt.

$$W = \dot{E}_4 - \dot{E}_1 = \dot{m}c^2(\gamma' - \gamma), \qquad (43)$$

on fent servir 42 tenim

$$W = \dot{m}\frac{\kappa \cdot \eta_1}{M}\left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}(\gamma-1)^{\frac{3}{2}}, \qquad (44)$$

on $\dot{m}$ es calcula en funció de la densitat ρ_1 del gas interestel·lar, l'àrea S escombrada pel disc format pel camp magnètic i la velocitat de la nau v.

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot v \cdot S \cdot \frac{M}{N_A} \qquad (45)$$

Substituint obtenim la potència generada per l'estatocol·lector.

$$W = v \cdot S \cdot \kappa \frac{\rho_1^2}{N_A^2}\left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}(\gamma-1)^{\frac{3}{2}}. \qquad (46)$$

Prenent com a dada que el diàmetre del disc format pel camp magnètic és 50.000 km, llavors S resulta $1,96 \cdot 10^{15}$ m^2. Podem calcular que l'energia generada per la nau pot variar de 0,136 W a la mínima velocitat, fins a $1,35 \cdot 10^7$ W a la màxima velocitat possible.

Conclusions

En fer un estudi termodinàmic de l'estatocol·lector, resulta que no funciona correctament.

La temperatura del gas al compressor creix ràpidament amb la velocitat i arriba un punt on és massa gran per aconseguir la reacció de fusió. I quan s'assoleix la temperatura màxima la densitat no és prou alta per obtenir l'energia necessària.

El rendiment és massa petit. Es podria millorar posant una etapa prèvia a la cambra de reacció per refredar el gas i comprimir-lo, però la pèrdua d'energia pot ser més gran que l'obtinguda per la fusió. A més, si posem un compressor ja no funcionaria com un estatoreactor sinó com un turboreactor i l'hauríem d'anomenar turbocol·lector.

De tota manera, amb l'estatocol·lector no es podrà accelerar indefinidament fins a apropar-nos tant com vulguem a la velocitat de la llum, com alguns autors han predit. Fent servir 39, si la temperatura a la cambra de fusió és 10^9 K, la velocitat del gas a la sortida de la tovera serà $c/46$ i, llavors, no es podrà superar mai aquesta velocitat, perquè la velocitat del gas entrant seria superior a la velocitat del gas sortint i la nau es frenaria.