

Fonament de l'arc de Sant Martí

Susanna Cuevas, Esther Jarrod, Jordi Llumà, Joan Martí,
Estela Martín, Victor Panyella, Toni Pérez i Cecília Soriano.

Laboratori d'Òptica. Departament de Física Aplicada i Electrònica. Universitat de Barcelona

Introducció

Aquest fenomen té lloc per la reflexió i la refracció de la llum del Sol a través de les gotes d'aigua que es troben en suspensió en l'aire. L'arc de Sant Martí tant sols es pot veure en una determinada direcció. Això es pot explicar físicament pel fet que el joc de reflexions i refraccions de la llum natural té una direcció privilegiada que és la mateixa per a tots els feixos de llum incident.

L'angle que formen l'angle incident de la llum del Sol i els raigs de l'arc és d'uns 42° , i va ser mesurat per primer cop per Roger Bacon al segle XIII. El desplegament de colors és sempre constant: violat, blau, cian, verd, groc, taronja i vermell, sent aquest últim el més extern de tots. De vegades també es pot veure un arc secundari, uns vuit graus més amunt, amb els colors invertits, degut a una reflexió addicional dels raigs dins de les gotes d'aigua.

El monjo Teodoric de Freiberg inicià el 1304, durant una estada a Tolosa, una sèrie d'estudis sobre l'arc de Sant Martí estimulat pel seu superior, Aimerico de Piacenza. Teodoric tingué la idea d'emprar un globus d'aigua (que Alhazen havia fet servir com a lent) com a símil d'una gota d'aigua que produeix l'arc. El nostre treball reprèn aquesta línia amb els mitjans tecnològics actuals.

L'anàlisi de la trajectòria dels raigs es pot fer a partir de la llei de la reflexió i de la llei de Snell de la refracció. Suposant que la gota és perfectament esfèrica, totes les direccions seran equivalents i l'única variable que caracteritzarà els raigs serà la distància del propi raig incident a un eix paral·lel que passi pel centre de la gota. Aquesta distància s'anomena paràmetre d'impacte. A la superfície de la gota, el raig és parcialment reflectit i la resta penetra a l'interior de la gota amb un canvi de direcció degut a la refracció. A la següent superfície, es transmet parcialment i la resta es reflecteix cap a l'interior. Quan la llum reflectida torna a incidir sobre la superfície es torna a dividir en llum reflectida i llum transmesa. Aquesta última és la que produeix l'arc de Sant Martí primari. El procés continua indefinidament i apareixen arcs secundaris, cada cop de menor intensitat. Una qüestió que cal explicar és per què la intensitat de la llum dispersada es concentra a les proximitats de l'arc

de Sant Martí. Descartes va demostrar que la variació de l'angle de desviació (entre els raigs incidents i els raigs dispersats) respecte al paràmetre d'impacte no és contínua: l'angle passa per un màxim quan el paràmetre d'impacte val aproximadament uns $7/8$ del radi de la gota. Aquest angle és de 138° per l'arc primari i 130° pel secundari. Com que la gota és il·luminada uniformement, la concentració de llum serà més intensa en les proximitats dels extrems. A més, a la regió compresa entre els angles de 130° i 138° no pot haver-hi raigs dispersats. Així pot explicar-se, a més, l'existència d'una regió fosca en el cel entre l'arc primari i el secundari que es coneix com la banda fosca d'Alexandre.

El radi de les gotes, per altra banda, és un paràmetre que no cal tenir en compte, ja que la geometria és la mateixa.

Finalment, destaca una característica molt espectacular de l'arc de Sant Martí: els seus colors. L'explicació la va trobar Newton a partir dels seus experiments amb el prisma l'any 1666. Va demostrar que la llum natural és una barreja de colors i que l'índex de refracció és diferent per a cada color (*dispersió*). Newton calculà que l'angle de l'arc seria de $137^\circ 58'$ per al vermell, i de $139^\circ 43'$ per al violat. Afegint-hi mig grau del diàmetre aparent del Sol, l'amplada de l'arc primari quedava en uns $2^\circ 15'$. Així, algunes qüestions fonamentals del fenomen quedaven interpretades mitjançant únicament l'òptica geomètrica.

Objectiu del treball

L'objectiu d'aquest treball és la comprovació de l'existència d'un màxim en l'angle de desviació de la llum incident sobre una gota d'aigua esfèrica, així com la observació de diverses reflexions i refraccions a l'interior de la gota. També volem calcular l'índex de refracció de l'aigua per al vermell.

L'existència del màxim és relativament senzilla de comprovar. N'hi ha prou amb començar a fer incidir la llum (procedent d'un làser, en el nostre cas), tangent a la gota d'aigua, i anar reduint el paràmetre d'impacte fins a fer-lo nul. Si durant aquest procés l'angle de desviació comença a augmentar fins un cert punt, i a partir d'aquest es comença a reduir, aquest punt és un màxim.

L'altre objectiu era aconseguir veure el màxim nombre possible de raigs reflectits. Aquests raigs són progressivament més difícils de veure perquè la seva intensitat es redueix a mesura que augmenta el nombre de reflexions que ha experimentat. La disminució de la intensitat amb el nombre de reflexions que es produeixen és deguda a que el coeficient de transmissió de la superfície gota-aire és molt més gran que el de reflexió.

Normalment s'observa tan sols un raig reflectit que produeix el típic Arc de Sant Martí, però en condicions excepcionals de posició, humitat i il·luminació, s'aconsegueix veure'n dos, el primari i el secundari. En condicions idònies de laboratori s'aconsegueix veure més de deu raigs reflectits on cadascun correspon a un Arc de Sant Martí. Inicialment preteníem assolir un terme mitjà, és a dir aconseguir veure uns quatre raigs reflectits (corresponents a un arc quaternari).

També era part del projecte deduir teòricament les lleis que determinen l'angle de desviació en funció del paràmetre d'impacte i calcular l'angle màxim en funció de l'índex de refracció de l'aigua.

Pel que fa als resultats, el nostre objectiu era confirmar experimentalment les conclusions teòriques i obtenir un índex adequat de refracció de l'aigua.

Muntatge experimental

Vàrem realitzar l'experiència al laboratori d'òptica de la Facultat de Física de la Universitat de Barcelona, amb el material següent:

1. Un recipient de vidre de forma esfèrica d'uns 15 cm de diàmetre, ple d'aigua, el qual simulava el comportament de les gotes de pluja.
2. Un làser d'Heli-Neó de 8 mW, d'espectre roig.
3. Un làser d'Heli-Neó de 40 mW, del mateix espectre.
4. Tres cubetes d'aigua per produir la vaporització del nitrogen líquid i una pantalla de cartró per contenir-lo.
5. Dos polaritzadors.
6. Una taula per fer el muntatge.
7. Un col·limador de làser.
8. Un trípod.
9. Una càmera fotogràfica amb 35 mm de focal i $f2.8$.
10. Nitrogen líquid.
11. Laboratori fotogràfic i estris de revelat.

Realització experimental

El primer problema que vàrem haver de resoldre va ser la determinació del punt d'incidència a la bola, i que el raig fos el més paral·lel possible a la taula, per tal d'obtenir correctament els resultats empírics.

Per determinar els angles era d'allò més important veure el camí seguit pels raigs, i això no és possible en una atmosfera neta. Per tant necessitàvem algun sistema per tenir partícules en suspensió que fessin visibles els raigs. Aleshores vàrem tenir la idea d'utilitzar nitrogen líquid, el qual forma una boira suficientment homogènia pel que preteníem. La pantalla de cartró va ser utilitzada per tal d'evitar que el nitrogen, tot just vaporitzat, de gran fluidesa i més dens que l'aire, escapés per les vores de la taula.

El paràmetre d'impacte de l'angle màxim va ser aproximadament el que li correspon teòricament per refracció: $7/8$. Aquest màxim el vam trobar modificant el paràmetre d'impacte inicial, amb la qual cosa l'angle de reflexió augmentava fins arribar a un màxim a partir del qual decreixia.

El raig incident era massa intens i il·luminava tot el núvol de nitrogen, fent impossible la observació dels raigs reflectits. Es va fer ús dels polaritzadors per tal de disminuir la intensitat del feix lluminós.

Resultats obtinguts

Per poder estudiar la refracció del raig en la gota d'aigua era necessari conèixer amb la major exactitud possible els angles de desviació de cadascun dels raigs refractats respecte a l'incident. Per determinar-los vàrem fer fotografies i vàrem copiar sobre paper vegetal la trajectòria dels raigs visibles i el contorn de la "gota" d'aigua. A més, vàrem indicar amb una línia discontinua la trajectòria del raig per dins la gota, si bé aquesta no era necessària en la determinació dels angles de desviació que volíem conèixer.

Com que només calia saber quant es desviava cada raig refractat n'hi havia prou amb determinar l'angle que formava respecte a l'incident. Així, qualssevol dels raigs refractats (R_1 , R_2 , R_3) formaria un angle que podia determinar-se construint un triangle rectangle que tingués un dels raigs per hipotenusa i l'altre per catet, i aplicant nocions fonamentals de trigonometria. En general, sempre interessarà fer els costats d'aquest triangle el més gran possibles per reduir al màxim l'error relatiu de la mesura.

Per determinar el paràmetre d'impacte del raig incident també era necessari conèixer l'angle (α) que formava aquest amb el raig reflectit (Re). El paràmetre d'impacte era el radi multiplicat pel $\sin(\alpha/2)$.

En tots els casos (vegeu la figura 1) ha calgut perllongar el raig incident i els dos primers raigs refractats R_1 i R_2 per determinar els respectius angles de desviament, β i σ , i en els casos en què el paràmetre d'impacte

era tal que el raig reflectit, R_e , sortia amb un angle superior a $\pi/2$ va fer falta determinar α a partir del seu complementari α' . Pels casos en què el tercer raig refractat, R_3 , era visible, l'angle de desviació δ ja quedava determinat.

Els angles obtinguts han estat en cada cas :

Fotografia Fc 00 05:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 49.0/72.0 = 0.680 & \alpha &= 0.748 \\ \sin \beta &= 50.0/136.5 = 0.366 & \beta &= 0.375 \\ \sin \sigma &= 87.5/88.5 = 0.989 & \sigma &= 1.420 \end{aligned}$$

Fotografia Fc 00 08:

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= 94.5/99.5 = 0.949 & \alpha' &= 1.252 \\ & & \alpha &= \pi - \alpha' = 1.889 \\ \sin \beta &= 130.5/194.5 = 0.671 & \beta &= 0.735 \\ \sin \delta &= 81.0/89.5 = 0.905 & \delta &= 1.131 \\ \cos \sigma &= 70.5/84.0 = 0.839 & \sigma &= 0.575 \end{aligned}$$

Fotografia Fc 00 12:

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= 62.5/99.5 = 0.628 & \alpha' &= 0.679 \\ & & \alpha &= \pi - \alpha' = 2.462 \\ \sin \beta &= 130.5/202 = 0.646 & \beta &= 0.702 \\ \sin \delta &= 50.5/66.5 = 0.759 & \delta &= 0.862 \\ \sin \sigma &= 78.5/102.0 = 0.769 & \sigma &= 0.878 \end{aligned}$$

Fotografies Fc 00 13 i Fc 00 14:

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= 62.0/101.0 = 0.614 & \alpha' &= 0.661 \\ & & \alpha &= \pi - \alpha' = 2.480 \\ \sin \beta &= 131.5/204.5 = 0.643 & \beta &= 0.698 \\ \sin \delta &= 48.5/65.0 = 0.759 & \delta &= 0.842 \\ \sin \sigma &= 76.5/100.0 = 0.765 & \sigma &= 0.871 \end{aligned}$$

Fotografia Fc 00 18:

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= 78.0/97.5 = 0.800 & \alpha' &= 0.927 \\ & & \alpha &= \pi - \alpha' = 2.214 \\ \sin \beta &= 132.0/195.0 = 0.677 & \beta &= 0.743 \\ \cos \sigma &= 66.5/88 = 0.755 & \sigma &= 0.714 \end{aligned}$$

Com que per aplicar la teoria de l'Arc de Sant Martí només interessa conèixer les reflexions corresponents als arcs primari i secundari, a la pràctica n'hi ha prou amb tenir les desviacions dels raigs R_2 i R_3 , així com el paràmetre d'impacte del raig incident. Els valors buscats són, aleshores:

Fc	α	β	δ
05	0.748	0.3750	-
08	1.889	0.735	1.131
12	2.462	0.702	0.862
13-14	2.480	0.698	0.842
18	2.214	0.743	-

Resultats analítics

Ara deduirem on es troben els màxims pels raigs primari i secundari partint de les relacions conegudes entre α , β i δ :

$$\beta = 4 \arcsin \left[\frac{1}{n} \sin(\alpha/2) \right] - \alpha \quad (1)$$

$$\delta = \alpha + \pi - 6 \arcsin \left[\frac{1}{n} \sin(\alpha/2) \right] \quad (2)$$

1) *Màxims del raig primari:*

Derivant la primera de les relacions:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{4 \cos(\alpha/2)}{2\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha/2)}} = 0 \quad (3)$$

i operant amb les relacions anteriors arribem a:

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (4)$$

2) *Màxims del raig secundari:*

Derivant ara la segona de les relacions, obtenim

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 1 - 6 \frac{d}{d\alpha} \left(\arcsin \left[\frac{1}{n} \sin(\alpha/2) \right] \right) = 0 \quad (5)$$

d'on arribem a

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}} \quad (6)$$

Conclusions

S'ha comprovat que les fórmules obtingudes es corresponen amb les experimentals amb un error mitjà d'aproximadament 1°; atribuïble a la presència del vidre en la superfície de l'aigua i als, sempre inevitables, errors experimentals. A partir de les fórmules obtingudes anteriorment hem ajustat per càlcul numèric el valor de l'índex de refracció de l'aigua i hem obtingut:

només amb els raigs primaris

$$n = 1.326 \pm 0.001$$

i amb primaris i secundaris

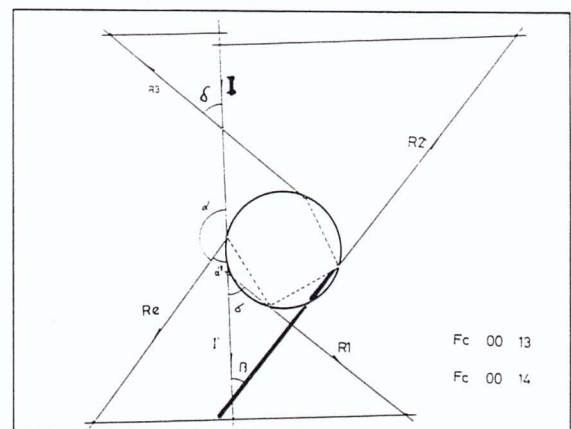
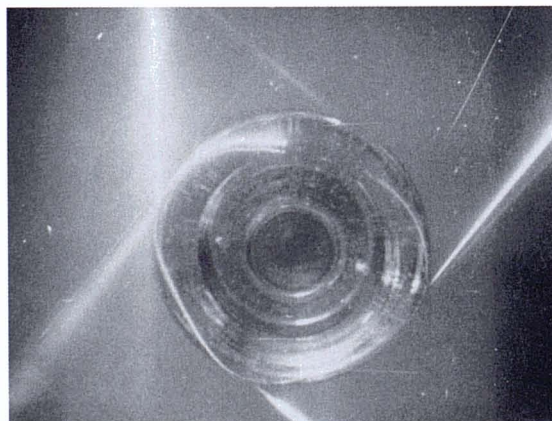
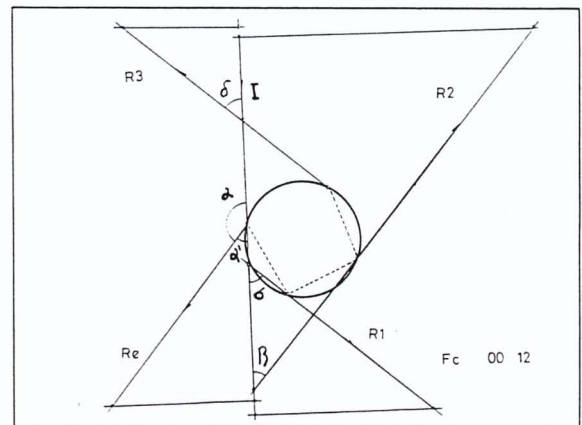
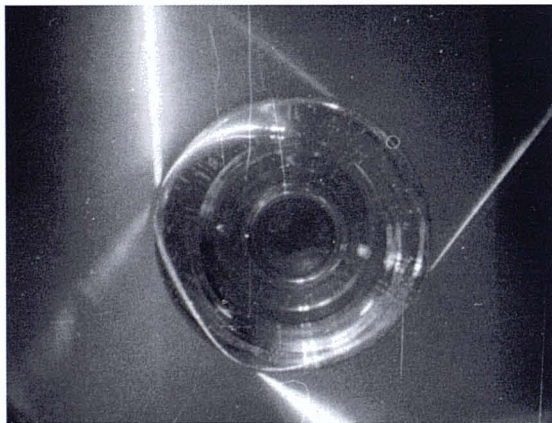
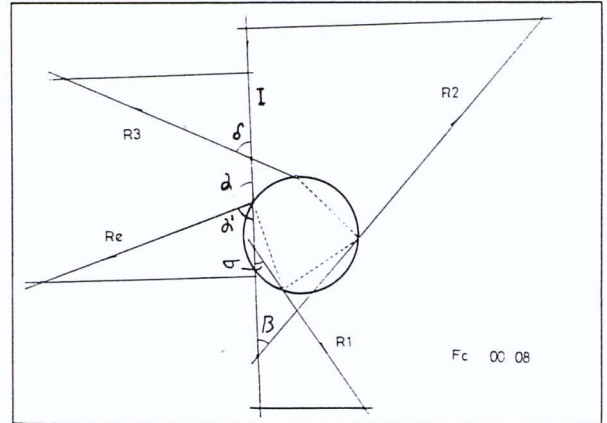
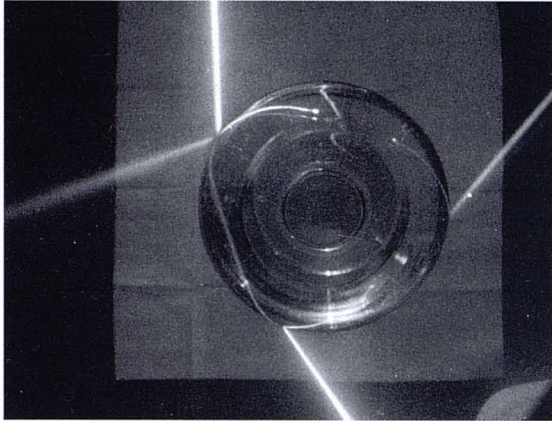
$$n = 1.328 \pm 0.004$$

L'error és més gran en el segon cas, ja que els raigs secundaris són més difícils de mesurar per ser menys intensos i més difuminats. El valor teòric és d' $n = 1.331$ per a la llum vermella (amb longitud d'ona 6563Å) en l'aigua. Com que el recipient era de vidre i l'índex del

vidre és superior al de l'aigua, el valor obtingut és menor que el teòric.

Com que les mesures són, en principi, independents, podem admetre com a resultat final la mitjana dels valors obtinguts. Així doncs, el resultat és:

$$n = 1.327 \pm 0.004$$



Agraïments

Agraïm als doctors Ignasi Juvells i Santiago Vallmitjana la seva paciència i bona disposició pel que fa a les múltiples consultes realitzades i la facilitat que ens han donat per a la utilització dels diferents laboratoris i instruments.

També agraïm al Departament de Química Analítica la seva col·laboració en cedir-nos part del material emprat.

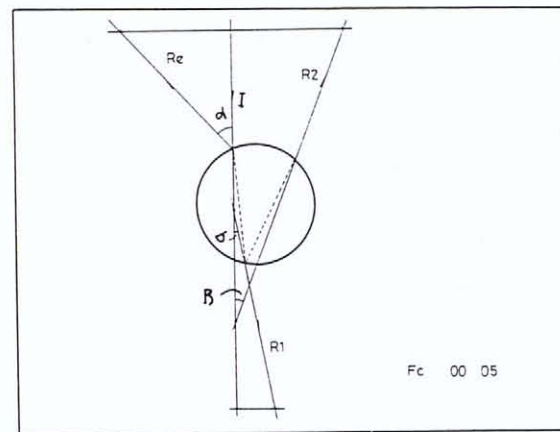
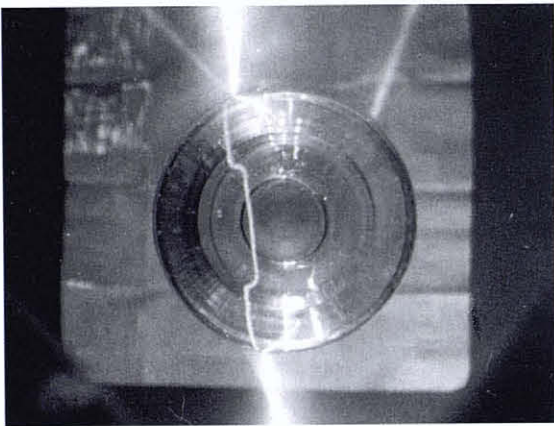
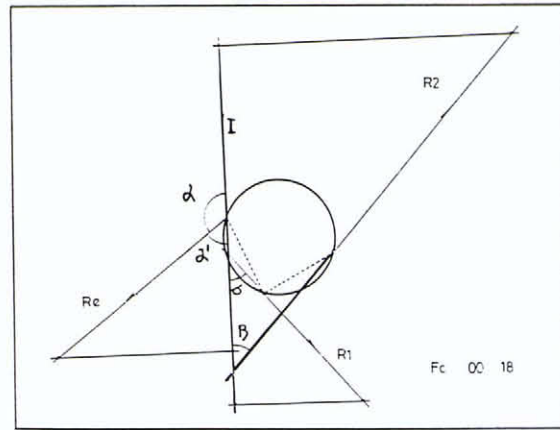
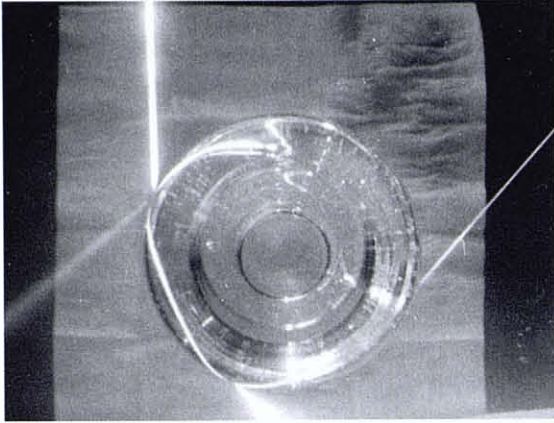


Figura 1: Fotografies de les traces dels raigs reflectit, R_e , i refractats, R_1 i R_2 , sobre les quals s'han mesurat els angles de desviament

Bibliografia

- BOYER, C. B.; *The Rainbow. From Myth to Mathematics*, Princeton University Press (1987)
 CASAS, J.; *Optica*, Cátedra de Optica, Universidad de Zaragoza (1983)
 NUSSENVEIG, H. M.; *Investigación y Ciencia*, 9, Juny (1977)
 SPIEGEL, M., ABELLANAS, L.; *Fórmulas y tablas de Matemática Aplicada*, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, (1988)
 YUSTE, M., CARRERAS, C.; *Revista española de Física*, 2, 1, pàgs. 28-39, (1988)