

Acústica dels instruments de vent de llengüetes. Funcionament general i modelització matemàtica

Ana Barjau Condomines*

Introducció

L'acústica musical, o ciència que s'ocupa de la descripció i comprensió dels instruments musicals, ha estat des de fa molt de temps un camp atractiu per a molts científics. De fet, les primeres obres serioses sobre el tema són degudes a Helmholtz (Helmholtz, 1954) i a Rayleigh (Rayleigh, 1945). El seu gran atractiu rau en el caràcter de disciplina pont entre la ciència —física i matemàtiques especialment— i una branca de l'art —la de la producció dels sons musicals.

El desenvolupament dels ordinadors i de la instrumentació electrònica de mesura han fet possible un pas gegantí en el coneixement del funcionament dels instruments musicals i en la seva modelització matemàtica. Els problemes plantejats per l'acústica musical són una bona excusa per posar a prova avenços en formulacions analítiques, en algorismes numèrics i en tècniques d'experimentació. La motivació per a aquests treballs no és tant la perspectiva de la millora d'aquests instruments, com l'interès per explicar en termes físics els fenòmens implicats en el funcionament dels instruments musicals i per descriure quantitativament aquests fenòmens.

Aquest article se centra en un conjunt particular d'instruments musicals: els instruments de vent de llengüetes. En una primera fase s'introdueixen totes les magnituds pròpies de l'àmbit de l'acústica musical i es descriuen qualitativament els fenòmens físics que fonamenten la producció de so en aquests instruments. A continuació es presenta una modelització matemàtica possible que permet fer simulacions.

Generalitats sobre els instruments musicals

Un instrument musical és un sistema físic de gran complexitat: a més de les dificultats de construcció, controlar-lo demana un temps no negligible d'esforç i estudi. És evident que els diversos instruments presenten diferències importants pel que fa a la manera com

s'inicia el so i s'hi manté, i a la forma com s'aconsegueixen produir les diferents notes. Però tots comparteixen un esquema general de funcionament, tant si pertanyen a una família com a una altra.

Un conjunt de preguntes bàsiques, que poden ser contestades per qualsevol persona mínimament introduïda en el món musical, permeten arribar de seguida a aquestes característiques generals. Què és el que l'oïda identifica com a so? Una variació de pressió de l'aire circumdant. Quan es pot dir que aquest so és musical? Quan té un to o afinació; en termes físics, quan les variacions de pressió són periòdiques. Com produir aquestes variacions? Posant en moviment l'aire per mitjà de vibracions (que poden ser mecàniques, com és el cas de les cordes, o directament acústiques, com és el cas de les columnes d'aire contingudes dins els tubs dels instruments de vent) d'algun cos. Lògicament, les vibracions resultants del cos han de ser periòdiques si es vol que el so que en resulti sigui musical.

D'aquesta forma arribem a la conclusió que el fenomen musical es redueix a: posada en vibració (excitació) d'un cos (que qualificarem de "principal") capaç de moure's amb periodicitat, transmissió del moviment a través de l'aire i percepció per part de l'oïda.

A partir d'aquest esquema, les diferències entre unes famílies i altres d'instruments musicals depenen de la forma en què el cos és posat en vibració, de la magnitud de la vibració que s'aconsegueix i del ritme d'extinció d'aquest so.

Abans de fer una classificació detallada dels diferents instruments musicals, es pot desenvolupar una intuïció sobre com han de ser aquests "cossos principals" per tal que puguin donar lloc a moviments periòdics. L'argument intuïtiu es basa en la primera intuïció física del "to", deguda a Huygens l'any 1693 i coneguda amb el nom de "to de repetició". A partir de la percepció dels ecos del so d'una font provinents dels graons d'una escala (segons diuen, precisament una font i una escala del palau de Chantilly, França), va associar la "repetició" (periodicitat!) al fenomen del to o de l'afinació.

Si ens basem en aquesta noció de to, és evident que la superposició dels ecos d'un so (per exemple, un cop de martell) produït en una sala tridimensional i deguts a les reflexions al terra, sostre i parets del recinte té po-

* Ana Barjau Condomines (Barcelona, 1958) va obtenir el grau de doctora en Física per la Universitat de Barcelona l'any 1987. Des del 1988 és professora titular del Departament d'Enginyeria Mecànica de la UPC. A més de la seva tasca docent i investigadora en aquest Departament, també imparteix cursos d'Acústica Musical de manera regular al Museu de la Música de Barcelona i a l'Institut de l'Audiovisual de la UPF.

dins la boca d'un trompetista...), passi al cos vibrant al ritme que el propi cos demana. En aquest cas no cal que el cos principal sigui capaç de vibrar lliurement de manera periòdica. Ara bé, és clar que el moviment serà més fàcil com més proper sigui el ritme de l'excitació (de l'energia aportada pel dispositiu) al de les vibracions lliures del cos.

La taula recull les característiques que s'acaben de discutir de manera esquemàtica per a un conjunt ampli d'instruments musicals.

Els instruments musicals de vent pertanyen a la família dels autoexcitats. A l'hora de fer-ne un estudi científic del funcionament, és necessari començar per una descripció de les característiques vibratòries (acústiques) de la columna d'aire continguda dins el tub (que d'ara endavant s'abreujarà per "tub"), i es completa amb l'anàlisi del comportament del dispositiu i de la interacció entre les dues parts.

Comportament acústic dels tubs d'aire

Per a l'ordre de magnitud de les pressions de bufada dels instrumentistes, els tubs dels instruments de vent responen de manera lineal. Això en simplifica notablement l'estudi ja que, per caracteritzar el comportament acústic d'un sistema lineal no és necessari conèixer com responen a cada tipus d'excitació (entrada d'energia), sinó que és suficient saber com ho fan per a una excitació determinada. A partir de la resposta del tub a aquesta excitació, tots els altres casos (respostes a altres tipus d'excitacions) poden resoldre's per superposició.

Quan es parla d'"entrada" (o "excitació") i "sortida" (o "resposta") d'un sistema, cal definir les respectives magnituds físiques que les representen. Quan s'estudia l'acústica d'un tub, les magnituds usuals són el cabal d'aire i la pressió acústica (increment respecte de la pressió atmosfèrica), i sol prendre's el cabal a la secció de l'instrument on s'acobla amb el dispositiu (secció d'entrada) com a "excitació" i la pressió a la mateixa secció com a "resposta".

Trobar un to bàsic (o freqüència bàsica) per al moviment lliure d'un tub és senzill a partir del concepte de "to de repetició". Imaginem que a l'entrada d'un tub cilíndric (per simplicitat) es produeix una excitació de cabal de tipus impulsional, és a dir, molt localitzada en el temps i d'intensitat finita (en termes matemàtics, un cabal de tipus delta de Dirac). A aquesta delta positiva de cabal se li pot associar una delta positiva de pressió. Aquesta pertorbació (en cabal i en pressió) es va propagant tub avall fins a arribar a l'extrem de baix. En aquest punt la pertorbació es pot trobar amb dues situacions diferents (o condicions de contorn diferents): extrem tancat o extrem obert. La reflexió del cabal positiu o de la sobrepressió en aquest extrem és diferent en un cas i l'altre.

Si s'invoca un model equivalent mecànic que retingui

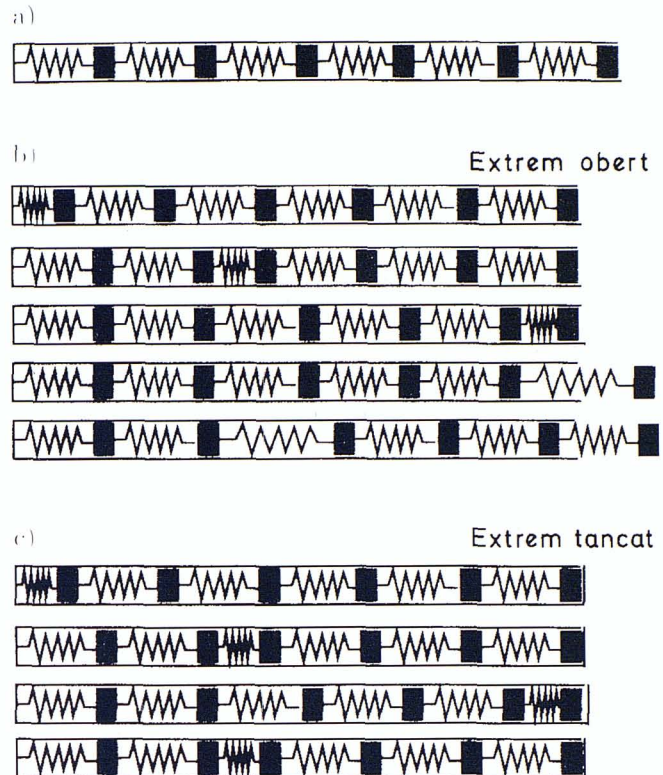


Figura 2: a) Model mecànic per a l'aire contingut dins d'un tub cilíndric. b) Reflexió en un extrem obert c) Reflexió en un extrem tancat

les dues característiques principals del tub d'aire com el presentat a la figura 2a (masses i molles representatives de la inèrcia i l'elasticitat del medi), i s'associa el cabal a la velocitat de les masses (presa com a positiva quan es dirigeix de la secció d'entrada del tub a l'extrem oposat) i la sobrepressió/depressió a l'estat de compressió/estirament de les molles, el cas d'extrem obert el cabal que es propaga tub amunt és positiu i la pressió és negativa (depressió) (figura 2b). En el cas que l'extrem estigui tancat farà retornar tub amunt un cabal negatiu i una pressió positiva (sobrepressió) (figura 2c). Si la secció d'entrada del tub és tancada i es considera només la variable de la pressió acústica, la reflexió es du a terme amb el mateix signe, mentre que si és oberta torna a haver-hi canvi de signe. D'aquesta manera es pot raonar quin és el període de repetició per a les tres possibles condicions de contorn: tub obert pels dos extrems (obert-obert), tub tancat-tancat i tub obert-tancat. Si la longitud total del tub és L , el to bàsic de la repetició d'aquests tres casos té un període de $2L/c$, $2L/c$ i $4L/c$.

Per al cas dels instruments reals, l'extrem del pavelló sol ser obert, mentre que l'extrem d'entrada pot correspondre tant a una condició oberta (cas de les flautes, a causa de la finestra o del bisell que es troba a l'embocadura) com a una de tancada (instruments de llengüetes: oboè, clarinet, fagot, metalls...). D'altra banda, la geometria real del tub sol allunyar-se força

de la simplicitat cilíndrica invocada en l'exemple precedent. Per això cal emprar mètodes més estrictes per amidar el comportament acústic dels tubs que els que es basen en simples intuïcions.

La resposta en pressió d'un tub a una delta o impuls de cabal és el que es coneix com a "resposta impulsional $h(t)$ " (o resposta temporal), i tot i que té al darrere la imatge temporal de propagació i reflexió, ha estat la menys emprada fins fa poc simplement perquè en aquest cas la matemàtica que cal emprar per determinar la resposta del tub a una entrada de cabal general és més complicada.

Tradicionalment, la resposta emprada per caracteritzar el comportament d'un tub ha estat l'anomenada "impedància acústica $\hat{Z}(\omega)$ " (o resposta freqüencial), que es pot interpretar com la resposta estacionària en pressió a una entrada de cabal de tipus sinusoidal (totes dues a la secció d'entrada del tub). El fenomen físic implicat en aquesta descripció és molt poc realista: es tracta d'imaginar que des d'un temps remot en el passat fins a un temps remot en el futur hi ha hagut aquesta excitació de cabal a la secció d'entrada, i que el que es mesura i es pren com a resposta és l'amplitud de pressió (car la dependència temporal, per linealitat, també serà sinusoidal com la del cabal), que correspon a un estat permanent, és a dir, un cop extingits els transitoris.

Evidentment, la variable temporal no té sentit (ja que va de $-\infty$ a $+\infty$), i la funció depèn exclusivament de la freqüència ω de l'excitació sinusoidal.

Les dues respostes, freqüencial i impulsional, no són independents (això contradiria la linealitat del tub!), sinó que estan relacionades mitjançant la transformada de Fourier: $h(t) = TF[\hat{Z}(\omega)]$. Dit en paraules pròpies de l'anàlisi de Fourier, la $\hat{Z}(\omega)$ és l'espectre de $h(t)$. Un resultat important de l'anàlisi de Fourier és que $h(t)$ serà periòdica tant com les freqüències del seu espectre siguin harmòniques.

Descripció temporal: resposta impulsional

La resposta impulsional $h(t)$ d'un tub d'aire és la resposta en pressió que resulta d'una excitació de cabal tipus impuls de Dirac. Tal com s'ha comentat anteriorment, $h(t)$ és la pressió que s'amidaria a la secció on el tub s'acobla amb el dispositiu d'autoexcitació (secció d'entrada) com a conseqüència d'un impuls de cabal produït a la mateixa secció (figura 3). A partir de $h(t)$, la resposta $p(t)$ a una entrada arbitrària de cabal $u(t)$ s'obté mitjançant la integral de convolució (Newland, 1984):

$$p(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

En el cas dels tubs dels instruments de vent, si es vol invocar la imatge de propagació-reflexió emprada abans, cal tenir en compte que a cada secció del tub on hi

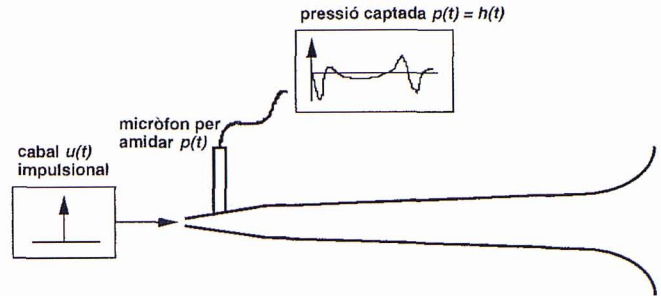


Figura 3: Esquema per amidar la resposta impulsional d'un tub

ha una discontinuïtat (un canvi bruscat de conicitat, la presència d'un forat o altres irregularitats), part de l'ona de pressió (o de cabal) es reflecteix tub amunt i part segueix el seu camí tub avall (figura 4). L'ona que viatja tub amunt es reflecteix novament en arribar a la secció

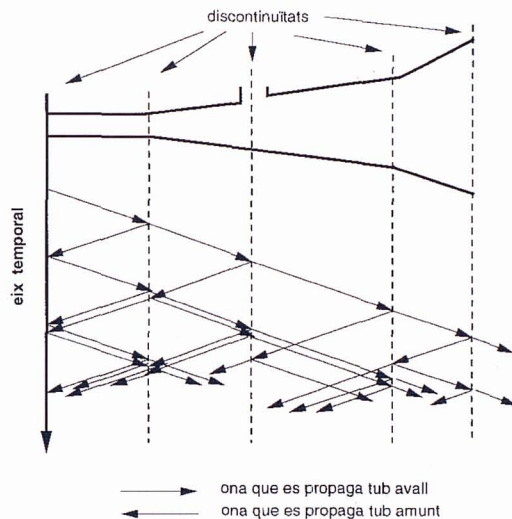


Figura 4: Fenomen de propagació, reflexió i transmissió d'ones a l'interior d'un tub d'instrument musical

d'entrada, que ara és tancada perquè el cabal s'hi manté nul. La resposta impulsional del tub és la superposició de les ones de pressió que viatgen tub amunt i tub avall i que, després de múltiples reflexions arriben novament a la secció d'entrada. Les pèrdues d'energia associades a la propagació, reflexions i radiació a l'extrem obert i als forats fan que aquesta resposta s'esmoreixi al llarg del temps.

Un exemple senzill de resposta impulsional d'un tub cònic amb mides comparables a les d'un instrument real es troba a la figura 5. Els diversos pics que hi apareixen estan relacionats amb les reflexions a l'extrem obert i a l'extrem d'entrada, les úniques discontinuïtats que es troben al llarg del tub en aquest cas.

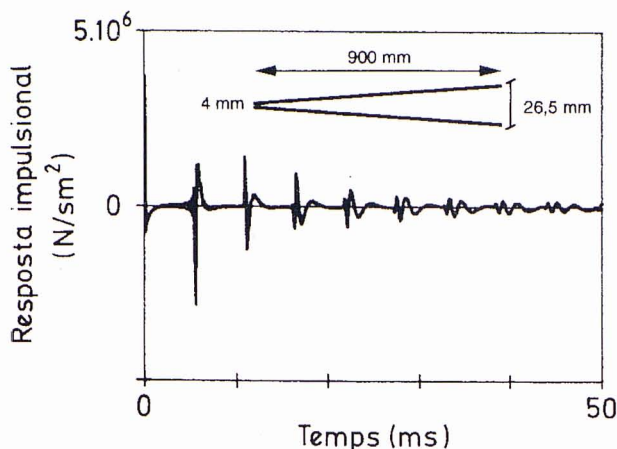


Figura 5: Resposta impulsional d'un tub cònic truncat

Descripció freqüencial: impedància acústica

La impedància acústica $\hat{Z}(\omega)$ d'un tub d'aire és el quocient entre la seva resposta en pressió a una excitació de cabal de tipus sinusoidal i la pròpia excitació, les dues representades de manera complexa. A partir de $\hat{Z}(\omega)$, la resposta $\hat{p}(\omega)$ a una entrada arbitrària de cabal $\hat{u}(\omega)$ s'obté mitjançant un simple producte (Newland, 1984):

$$\hat{p}(\omega) = \hat{Z}(\omega)\hat{u}(\omega).$$

El mòdul d'aquesta resposta presenta en general un conjunt de pics i valls que donen informació de les freqüències de ressonància del tub quan la secció d'entrada és tancada i quan és oberta respectivament.

La figura 6 presenta el mòdul de la impedància corresponent al mateix tub cònic de la figura 5. El contingut freqüencial, tant si es tracta dels màxims o pics (entrada tancada) com dels mínims o valls (entrada oberta) no és estrictament harmònic.

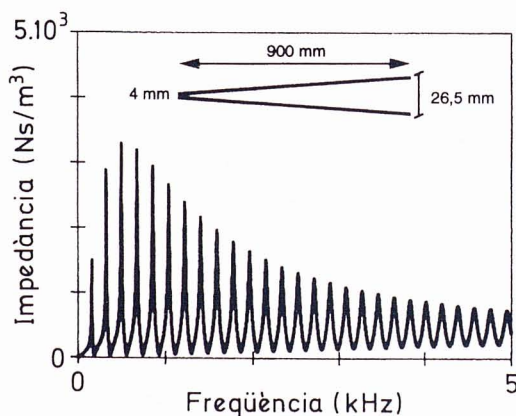


Figura 6: Mòdul de la impedància d'un tub cònic truncat

Mecanismes d'autoexcitació

Cap instrument musical de vent no pot funcionar en règim lliure perquè la vibració de l'aire contingut dins el

tub s'esmoreeix molt ràpidament a causa de pèrdues viscoses i friccions a les parets, així com al fenomen de radiació (comunicació de la vibració de l'aire de l'interior de l'instrument a l'exterior). Si la radiació fos petita, l'aire interior vibraria durant més temps i conseqüentment la de l'aire exterior, també.

Per aquest motiu cal aportar contínuament energia al sistema o, segons la terminologia introduïda en la primera secció, fer funcionar l'instrument en règim autoexcitat. En règim d'autoexcitació, les oscil·lacions del tub són mantingudes gràcies a una introducció d'energia en el sistema que compensa les pèrdues energètiques ocasionades per l'esmoreïment i la radiació.

Aquests fenòmens d'autoexcitació poden produir-se de maneres diverses. La forma en què s'estableixen depèn del tipus de tub i del dispositiu d'autoexcitació de cada instrument.

En el cas dels instruments musicals de vent, els principis o fenòmens físics que donen lloc a l'autoexcitació es poden classificar en dos grups segons es produeixin quan s'acciona el dispositiu d'autoexcitació tot sol ("mecanismes primaris"), o bé provinguin de la interacció entre la columna d'aire continguda dins el tub i el dispositiu d'autoexcitació ("mecanismes d'acoblament").

Mecanismes primaris: mecanisme de Bernoulli, mecanisme de Kármán

Bàsicament hi ha dos mecanismes primaris per als instruments de vent. Un d'aquests, el mecanisme de Kármán, és la generació de remolins quan un doll d'aire passa a través d'una ranura (vòrtexs de Kármán). Aquests remolins es formen alternativament a les dues bandes de la línia mitjana del doll, i la freqüència depèn de la velocitat de l'aire i de l'amplària de la ranura. La presència d'un bisell col·locat a una certa distància de la ranura i sobre la línia mitjana del doll reforça aquest efecte (figura 7).

L'altre mecanisme primari, el mecanisme de Bernoulli, és l'actuació sobre les parets deformables d'un tram de conducte de l'efecte Venturi o "força de Bernoulli", i consisteix en l'aparició d'una depressió en un fluid quan aquest augmenta la velocitat. Quan les parets es deformen de manera que la secció de pas es redueix, la velocitat augmenta i això fa més intens l'efecte Venturi el qual, en fer disminuir més el pas, pot arribar a tancar completament el pas de cabal. En aquest cas, desapareix instantàniament la depressió, les parets s'obren a causa de la seva elasticitat i el procés recomença (règim batent). En d'altres casos, la flexibilitat de les parets aconsegueix de reobrir el pas sense haver arribat al tancament total (règim no batent).

En alguns casos, el mecanisme primari és suficientment intens com per conduir un règim vibratori autoexcitat.

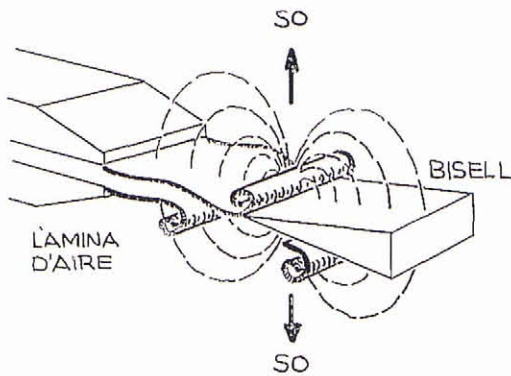


Figura 7: Formació de vòrtexs de Kármán (mecanisme primari de Kármán)

Mecanisme d'acoblament

Quan s'acobla el dispositiu al tub corresponent, entra en joc un mecanisme d'acoblament que reforça el primari i dona lloc a l'autoexcitació (si aquest últim mecanisme era poc intens), o bé el controla en més o menys grau (en el cas en què l'autoexcitació sigui possible sense la

intervenció del mecanisme d'acoblament).

Esquemàticament, es poden considerar dos tipus bàsics de mecanismes d'acoblament, cadascun dels quals està associat a un dels mecanismes primaris descrits.

En el de Kármán, es controla i reforça la formació dels remolins mitjançant la desviació del doll d'aire que, prové de la ranura i incideix sobre el bisell, que sempre és present en aquests instruments de vent. La fracció del doll d'aire que entra dins el tub de l'instrument provinent del bisell és desviada enfora quan el moviment de l'aire interior del tub és de sortida, fa disminuir l'entrada de cabal, és xuclada endins quan el moviment és d'entrada, d'aquesta manera augmenta el cabal introduït en el tub (figura 8). Aquest efecte, que tendeix a reforçar la vibració de la columna d'aire, se sol descriure com a "vàlvula de cabal" perquè les fluctuacions de cabal a l'extrem de la columna d'aire que interacciona amb el dispositiu d'autoexcitació són intenses i, en canvi, les de pressió són petites.

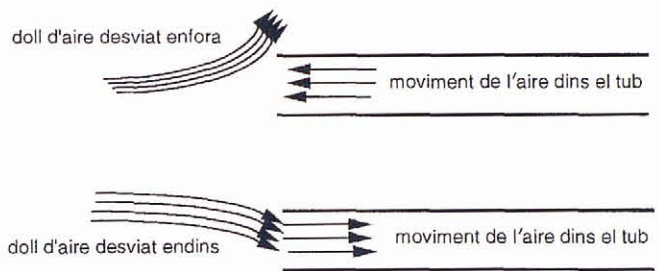


Figura 8: Mecanisme d'acoblament tipus "vàlvula de cabal"

En el mecanisme primari de Bernoulli, el mecanisme d'acoblament controla les fluctuacions de la secció de pas entre les parets deformables del dispositiu mitjançant les variacions de pressió a l'extrem de la columna d'aire que s'hi troba en contacte. Si el comportament dinàmic d'aquestes parets és tal que es produeix un augment de la secció de pas en els moments de sobrepressió, aquestes sobrepressions es veuen reforçades per l'entrada de més aire a pressió (figura 9). Anàlogament, una depressió es veuria reforçada per un tancament de la secció de pas d'aire. D'aquesta manera s'indueix una inestabilitat. Aquest mecanisme se sol descriure com a "vàlvula de pressió" perquè les fluctuacions de pressió a l'extrem de la columna d'aire que interacciona amb el dispositiu són intenses i, en canvi, les de cabal són petites.

Per tal que el mecanisme d'acoblament sigui efectiu, cal que les ones que es propaguen tub avall siguin reflectides de forma prou intensa pels forats o per l'extrem obert de l'instrument.

Dispositius d'autoexcitació basats en parets deformables

En els instruments de vent es troben diferents realitzacions de les parets deformables: canyes simples —clarinet, saxòfon—, canyes dobles —oboè, fagot,

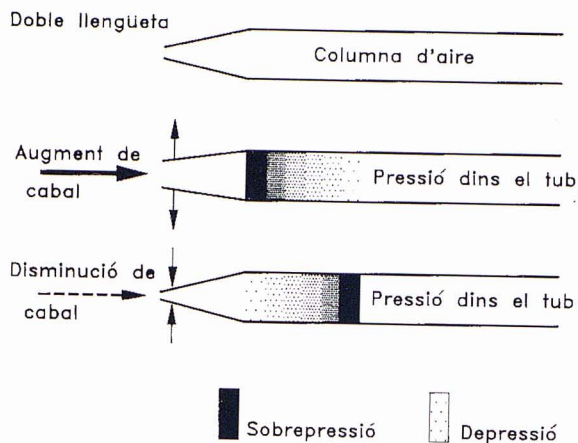


Figura 9: Mecanisme d'acoblament tipus "vàlvula de pressió"

tenora, tible—, llavis —instruments de metall com la trompeta, la trompa, el trombó—, llengüetes metàl·liques — harmòniun, acordió.

La importància del paper fet pel mecanisme primari en aquests instruments està lligada a la fracció de les superfícies deformables que determinen un pas estret. Així, en el cas del clarinet, on la major part de la superfície de la canya és allunyada de la superfície fixa de l'embocadura, l'autoexcitació prové de manera gairebé exclusiva del mecanisme d'acoblament (figura 10a). En

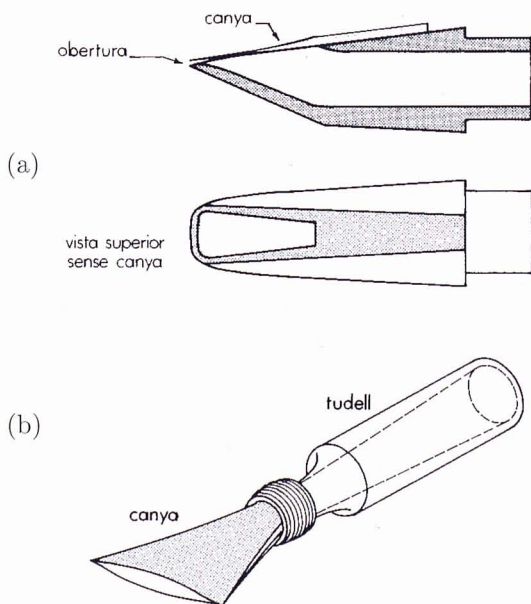


Figura 10: (a) Embocadura de clarinet (canya simple). (b) Embocadura de tenora (canya doble)

canvi, en els instruments de doble llengüeta, el pas estret determinat per bona part de les superfícies internes

de les dues canyes fa que el mecanisme primari tingui un paper predominant. Per aquest fet, aquests instruments no demanen una columna d'aire que interaccioni tan intensament amb el dispositiu d'autoexcitació com en el cas del clarinet. Aquesta interacció té més aviat el paper d'un marcapassos (figura 10b).

En el cas dels instruments de llengüeta metàl·lica, el paper del mecanisme primari depèn de la geometria de les superfícies properes a la llengüeta. Sovint, el seu funcionament es basa exclusivament en aquest mecanisme (és el cas de l'harmònica i l'acordió). Quan se'ls acobla un tub (cas de l'harmòniun o alguns registres d'orgue), aquest té més aviat el paper de ressonador que amplifica el so emès, ja que l'elevada rigidesa de les llengüetes metàl·liques les fa poc sensibles a la interacció amb la columna d'aire. En tots aquests instruments s'empra una llengüeta per a cada nota, i la freqüència de funcionament de cada llengüeta coincideix amb la seva primera freqüència de ressonància.

Històricament, els dispositius d'autoexcitació de parets deformables s'han classificat en dos grups atenent el seu comportament estàtic: els que s'obren quan hi ha una sobrepressió interna, que s'anomenaran dispositius de llengüetes sortints perquè tradicionalment aquesta n'ha estat la realització (figura 11a) —*inwards* en nomenclatura anglesa—, i els que es tanquen per causa de la sobrepressió interna, que s'anomenaran dispositius de llengüetes entrants (figura 11b) —*outwards* en nomenclatura anglesa. Per tal que els de llengüetes

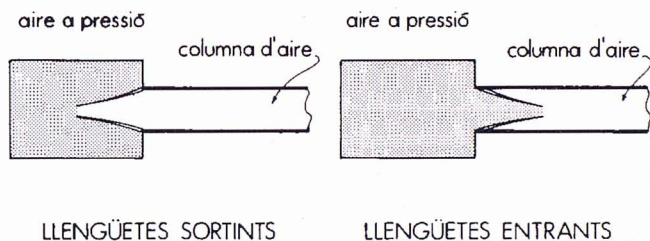


Figura 11: Llengüetes sortints (clarinet, oboè, fagot, tenora). Llengüetes entrants (metalls)

sortints puguin induir inestabilitat, cal que es moguin aproximadament en fase amb les fluctuacions de pressió interna. Això demana que la seva inèrcia sigui feble per tal que la freqüència pròpia estigui per sobre de la de funcionament. Aquest és el cas de les canyes simples i dobles.

Per als de llengüetes entrants, l'autoexcitació només té lloc si responen aproximadament en oposició de fase a les fluctuacions de pressió interna. En cas contrari, l'entrada de cabal deguda a la depressió dins el tub tendria a compensar-la i no s'induiria cap mena d'inestabilitat. Per això és necessari que la seva inèrcia sigui elevada. Aquest és el cas dels llavis i d'algunes llengüetes metàl·liques.

Comportament global dels instruments de llengüetes

L'estudi del funcionament d'un instrument complet demana l'elaboració d'un model matemàtic per a cadascuna de les parts i la resolució simultània de les equacions que en resultin.

Així com en el cas del tub el problema es redueix sempre a un càlcul de la corresponent resposta impulsional, per al dispositiu d'autoexcitació hi ha múltiples possibilitats segons el grau de precisió que es busqui o el tipus de funcionament que es pretengui investigar.

Caracterització matemàtica dels tubs

Per a cada nota musical que es vol simular, és necessària l'obtenció de la corresponent resposta impulsional $h(t)$ per a la digitació concreta del tub quan s'executa la nota.

L'obtenció de la $h(t)$ per a cada nota pot ser totalment teòrica, parcialment teòrica (càlcul teòric basat en paràmetres experimentals) o experimental. Un dels mètodes més habituals consisteix a calcular prèviament la impedància acústica del tub $\hat{Z}(\omega)$ pel mètode de les matrius de transferència (Munjál, 1987) i després obtenir la resposta impulsional $h(t)$ com a transformada de Fourier de $\hat{Z}(\omega)$.

La utilització de matrius de transferència demana la discretització del tub en trams de geometria cilíndrica i cònica (per a les quals l'equació d'ona unidimensional té solució exacta). Per a cada tram, les variables acústiques $p(\omega)$ i $u(\omega)$ en els seus extrems es relacionen a partir de la teoria de propagació de les ones planes en el cas dels trams cilíndrics i de les ones esfèriques en el cas dels trams cònics.

Matriu de transferència per a un element cilíndric

L'equació d'ona que descriu la propagació d'ones longitudinals en un tub de secció constant (figura 12a) s'escriu:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2},$$

on c = velocitat del so en l'aire i $\Psi(z, t)$ és el potencial de velocitat, el qual es relaciona amb les variables acústiques de pressió i cabal per mitjà de les expressions:

$$p(z, t) = \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t}, \quad u(z, t) = -S \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial z},$$

on ρ = densitat de l'aire i S és definida a la figura 12a. L'equació d'ona anterior admet una solució general que correspon a la superposició de dues ones propagatives, una cap a la dreta i l'altra cap a l'esquerra: $\Psi(z, t) = \Psi(ct - z) + \Psi(ct + z)$.

El pas al domini freqüencial es fa imposant un comportament temporal oscil·lant al potencial: $\Psi(z, t) = \hat{\Psi}(z)e^{j\omega t}$ on $j = \sqrt{-1}$ unitat imaginària. Com que el sistema és lineal, la pressió i el cabal també presentaran

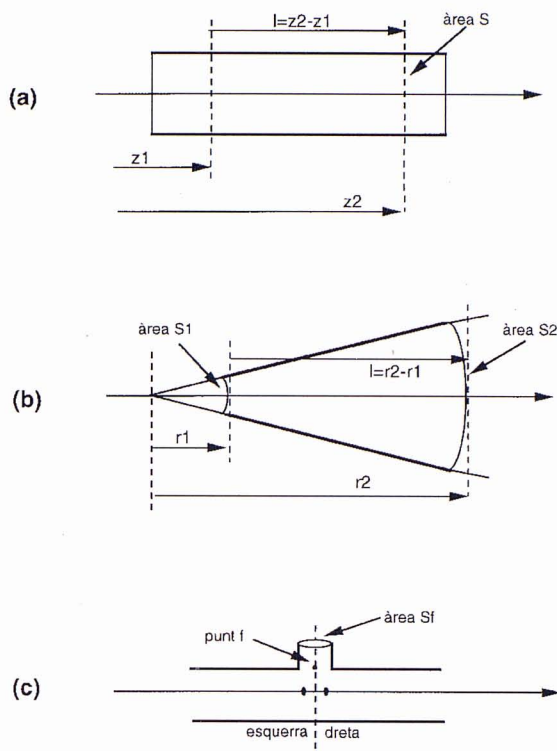


Figura 12: Definició de coordenades per a (a) tram cilíndric, (b) tram cònic, (c) forat

el mateix tipus de comportament temporal, i això permet passar a considerar una equació que regeixi només l'amplitud de les variables acústiques:

$$-k^2 \hat{\Psi}(z) = \frac{d^2 \hat{\Psi}(z)}{dz^2}$$

on $k = \omega/c$ = nombre d'ona. La solució d'aquesta equació és:

$$\hat{\Psi}(z) = \hat{\Psi}_-(z) + \hat{\Psi}_+(z) = \hat{\Psi}_-^0 e^{-jkz} + \hat{\Psi}_+^0 e^{jkz}$$

i per tant:

$$\hat{p}(z) = j\omega[\hat{\Psi}_-(z) + \hat{\Psi}_+(z)], \quad \hat{u}(z) = \frac{jS\omega}{\rho c}[\hat{\Psi}_-(z) - \hat{\Psi}_+(z)].$$

Tots aquests resultats es poden combinar per obtenir la relació matricial següent:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{z_1} &= \begin{pmatrix} j\omega & j\omega \\ -j\omega \frac{S}{\rho c} & \frac{j\omega S}{\rho c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_+(\omega) \\ \hat{\Psi}_-(\omega) \end{pmatrix}_{z_1} = \\ Q \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_+(\omega) \\ \hat{\Psi}_-(\omega) \end{pmatrix}_{z_1} &= Q \begin{pmatrix} e^{-jkl} & 0 \\ 0 & e^{jkl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_+(\omega) \\ \hat{\Psi}_-(\omega) \end{pmatrix}_{z_2} = \\ Q \begin{pmatrix} e^{-jkl} & 0 \\ 0 & e^{jkl} \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{z_2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(kl) & j\frac{\rho c}{S} \sin(kl) \\ j\frac{S}{\rho c} \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{z_2},$$

on l es defineix a la figura 12a.

Matriu de transferència per a un element cònic

Per al cas cònic es procedeix de manera anàloga. La geometria del tub (figura 12b) suggereix la utilització de coordenades esfèriques, amb la qual cosa l'equació d'ona unidimensional per estudiar la propagació de les ones de pressió longitudinals esdevé:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} \right).$$

Si s'introdueix el canvi de variable $\Phi(r, t) = rp(r, t)$ i es considera un règim de funcionament sinusoidal, s'obté una equació anàloga a la dels tubs cilíndrics per a l'amplitud de la variable acústica $\Phi(r, t)$:

$$-k^2 \hat{\phi}(r) = \frac{d^2 \hat{\phi}(r)}{dr^2},$$

i, procedint com abans i desfent el canvi de variable, s'arriba a la matriu de transferència per a un tram cònic:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{r_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{r_2},$$

on

$$a_{11} = \frac{r_2}{r_1} \cos(kl) - \frac{1}{kr_1} \sin(kl),$$

$$a_{12} = j \frac{c\rho}{S_2} \frac{r_2}{r_1} \sin(kl),$$

$$a_{21} = j \frac{S_1}{c\rho} \left(\left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{(kr_1)^2} \right) \sin(kl) + \frac{1 - r_2/r_1}{kr_1} \cos(kl) \right)$$

i

$$a_{22} = \frac{S_1 r_2}{S_2 r_1} \left(\frac{1}{kr_1} \sin(kl) + \cos(kl) \right),$$

on l, r_1, r_2, S_1, S_2 es troben definides a la figura 12b.

En la unió dels trams es considera que la pressió és única i que hi ha equilibri de cabal.

Matriu de transferència per a un forat

En el procediment que utilitzarem s'empra una modelització simplificada de l'acoblament entre el tub principal i els forats, en la qual s'eludeix la consideració de com s'acoblen les ones longitudinals de les xemeneies amb les del tub principal.

La matriu de transferència que descriu la influència d'un forat relaciona les variables acústiques de pressió i cabal just a la dreta del forat amb el valor d'aquestes just després del forat (figura 12c). La seva determinació és molt senzilla, i es basa en dues equacions sobre l'amplitud de les variables, que corresponen a la continuïtat del cabal i a la uniformitat de la pressió en tota l'extensió de la unió entre el forat i el tub:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{dreta}(\omega) &= \hat{u}_f(\omega) + \hat{u}_{esquerra}(\omega), \\ \hat{p}_e(\omega) &= \hat{p}_d(\omega) = \hat{p}_f(\omega). \end{aligned}$$

Anomenant $\hat{Z}_f(\omega)$ la impedància característica del forat i S_f la secció del forat, la matriu de transferència buscada resulta:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{esquerra} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -S_f \frac{\hat{u}_f(\omega)}{\hat{p}_f(\omega)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}(\omega) \\ \hat{u}(\omega) \end{pmatrix}_{dreta}$$

amb

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_f(\omega) \\ \hat{u}_f(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kh) & j\frac{Z_0}{S_f} \sin(kh) \\ j\frac{S_f}{Z_0} \sin(kh) & \cos(kh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_{ex}(\omega) \\ \hat{u}_{ex}(\omega) \end{pmatrix},$$

on $\hat{p}_{ex}(\omega)$ i $\hat{u}_{ex}(\omega)$ representen la condició de contorn a l'extrem del forat (obert o tancat).

En el cas d'un forat tancat, aquesta condició es formula de manera molt senzilla: $\hat{u}_{ex}(\omega) = 0$.

Quan el forat és obert, hi ha diferents possibilitats. En realitat, la condició d'extrem obert, necessària per a la modelització de forats, és encara més important pel fet de ser la condició a l'extrem del pavelló a partir de la qual arrenca tot el càlcul amb matrius de transferència. Els dos únics casos que han estat estudiats analíticament i que poden representar acceptablement bé aquesta condició de contorn són el de l'extrem obert d'un tub cilíndric que s'obre en un pla infinit (Morse, 1948):

$$\hat{Z}_{ex.ob.}(\omega) = \hat{p}_{ex.ob.}(\omega) / \hat{U}_{ex.ob.}(\omega) = \Theta_0(\omega) + j\chi_0(\omega),$$

i el de l'extrem obert d'un tub cilíndric de parets de gruix negligible (Levine, 1948):

$$\hat{Z}'_{ex.ob.}(\omega) = \hat{p}'_{ex.ob.}(\omega) / \hat{U}'_{ex.ob.}(\omega) = \Theta'_0(\omega) + j\chi'_0(\omega).$$

L'obertura del pavelló pot ser considerada com la de l'extrem obert d'un tub cilíndric de parets de gruix negligible. Els forats, en desembocar a la paret exterior de l'instrument, presenten una condició d'extrem intermèdia entre la de l'extrem d'un tub cilíndric que s'obre en un pla infinit i la de l'extrem obert d'un tub cilíndric de parets de gruix negligible.

En la figura 13 hi ha representades la part real (θ_0, θ'_0) (a) i la part imaginària (χ_0, χ'_0) (b) de la impedància acústica adimensional $\hat{Z}(kd_0)/\rho c$ (on k és el nombre d'ona, $k = \omega/c$, c és la velocitat de propagació del so en l'aire i d_0 és el diàmetre de l'extrem obert) corresponent als dos casos de referència que han estat estudiats analíticament.

A efectes del càlcul de la impedància acústica de l'instrument, les dues formulacions condueixen a resultats, les discrepàncies entre els quals són negligibles.

La presència de molts canvis de conicitat i forats en el tub principal d'un instrument fa que l'expressió analítica de $\hat{Z}(\omega)$ a la secció d'entrada sigui molt complexa, i per tant que la realització analítica de la TF sigui inviable. Aquest fet porta a emprar tècniques numèriques per determinar la $h(t)$.

Modelització dels dispositius d'autoexcitació

La modelització del dispositiu d'autoexcitació no és tan senzilla perquè no pot ser considerada com a sistema lineal. Per conèixer-ne el comportament en cada cas, cal resoldre paral·lelament les equacions del moviment de les parets deformables i de l'aire contingut en l'interior.

En el cas de les canyes simples o dobles, encara que siguin sistemes continus i per tant amb infinits graus de llibertat, el seu funcionament està basat pràcticament en el primer mode de ressonància perquè la freqüència de funcionament és inferior a la d'aquest mode, i la geometria de les canyes fa que les freqüències dels restants modes de ressonància siguin molt més elevades. Per aquest motiu, les canyes es poden modelitzar convenientment com un sistema d'un sol grau de llibertat del tipus massa-molla-amortidor (figura 14). A partir d'aquest model de base, es pot anar complicant la descripció per tal de tenir en compte certes característiques peculiars d'aquests sistemes. Per exemple, tenint en compte que les vibracions de les canyes arriben usualment a amplituds grans i la posició d'equilibri pot ser desplaçada dins un interval gran prement els llavis, una modelització realista portaria a considerar un sistema massa-molla-amortidor amb paràmetres de la funció de posició que reforçarien el caràcter no lineal del sistema.

Per estudiar-ne la dinàmica, cal tenir en compte que les llengüetes es mouen sota l'acció de la pressió acústica P_0 amb què es bufa i la distribució de pressions del fluid a l'interior. La superfície d'actuació d'unes i altres és, en principi, diferent.

L'equació del moviment resulta:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = -F_0 \pm F_2(t) + F_B(t),$$

on m, k, c són els paràmetres de massa, rigidesa i esmorteïment de la canya, $x(t)$ és la posició de la canya (figura 14), F_0 és la força associada a la pressió de bufada, $F_2(t)$ és la força associada a la pressió que s'estableix dins el tub de l'instrument a la secció d'acoblament amb la canya, i $F_B(t)$ és l'anomenada força de Bernoulli. El signe positiu i el negatiu corresponen, respectivament, al cas de les llengüetes sortints i al de les entrants.

El cabal $u_1(t)$ a l'entrada del dispositiu depèn de l'àrea de la secció d'entrada, de la pressió P_0 amb què es bufa i de la distribució de pressions a l'interior del dispositiu. La determinació teòrica de l'equació diferencial que el governa és d'una extraordinària complexitat, per la qual cosa es recorre a equacions aproximades justificades experimentalment.

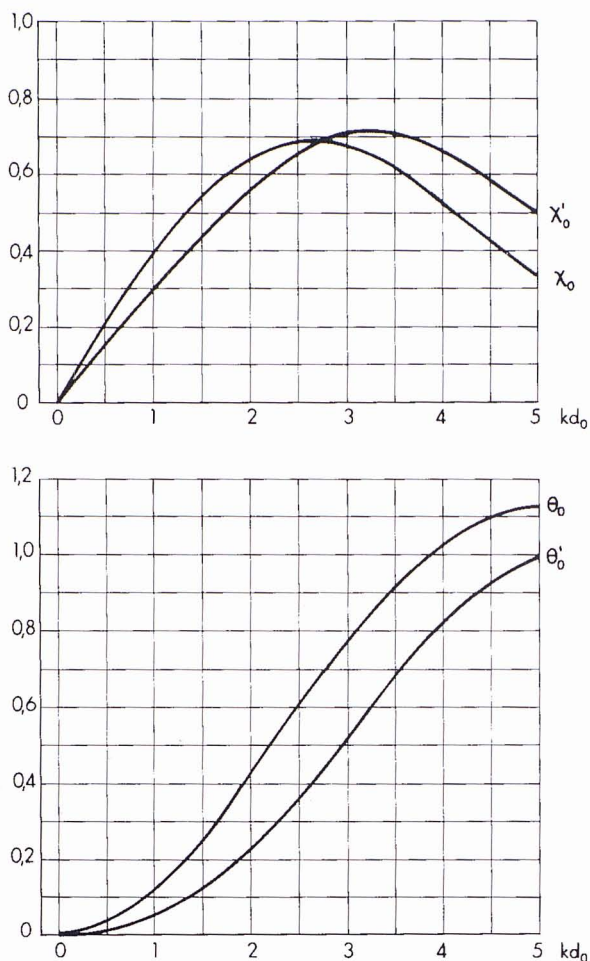


Figura 13: Parts (a) real i (b) imaginària de la impedància d'extrem obert corresponents als dos casos estudiats analíticament. k és el nombre d'ona i d_0 és el diàmetre de l'extrem obert

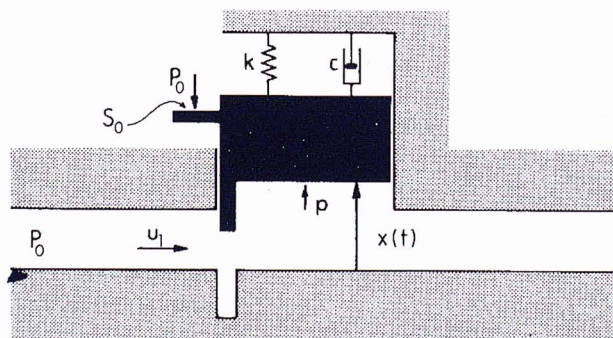


Figura 14: Model d'un grau de llibertat per a la canya (simple o doble)

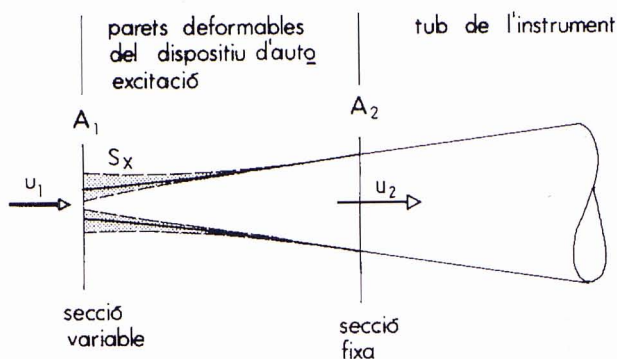


Figura 15: Cabals a la secció d'entrada i de sortida de la canya

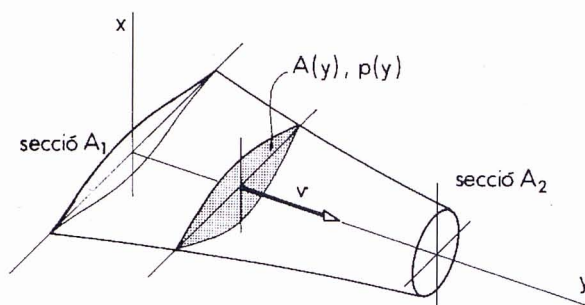


Figura 16: Seccions i distribució de pressions i velocitats a l'interior de la doble canya

Encara que a l'interior del dispositiu d'autoexcitació es presentin les màximes fluctuacions de pressió, el valor d'aquestes fluctuacions és prou petit perquè sigui acceptable la hipòtesi de fluid incompressible. El cabal a cada secció, però, no és el mateix per causa del moviment de les parets deformables (figura 15). Així, el cabal en la secció d'entrada de la canya $u_1(t)$ i a la secció d'acoblament amb el tub $u_2(t)$ estan relacionats mitjançant l'expressió

$$u_2(t) = u_1(t) - S_x \frac{dx(t)}{dt},$$

És a dir, si la secció d'entrada augmenta, part del cabal d'entrada $u_1(t)$ omple el volum afegit al volum interior inicial del dispositiu, de manera que el cabal $u_2(t)$ que arriba a la secció d'acoblament amb el tub és més petit que el d'entrada. Quan la secció d'entrada disminueix, l'efecte és contrari i $u_2(t)$ augmenta respecte de $u_1(t)$.

L'estudi acurat de la distribució de pressions a l'interior d'una doble canya és d'una complexitat extraordinària. Una primera aproximació es pot obtenir simplificant la realitat sota la suposició que les canyes no es mouen i amb la hipòtesi de fluid incompressible i no viscos.

Sota aquestes suposicions, les equacions per estudiar la dinàmica de l'aire són senzilles i estableixen la conservació de dos escalars:

$$u(y, t) = A(y, t)v(y, t) = \text{constant (eq. de continuïtat),}$$

$$p(y, t) + \frac{1}{2}\rho v^2(y, t) = \text{constant (teorema de Bernoulli).}$$

D'aquestes dues lleis de conservació es pot deduir el valor de la pressió acústica $p(y, t)$ a la secció $A(y, t)$ depenent d'aquesta secció i de la pressió acústica $p_2(t)$ a la secció de sortida (figura 16):

$$p(y, t) = p_2(t) + \frac{1}{2}\rho u^2(y, t) \left[\frac{1}{A^2(y, t)} - \frac{1}{A_2^2(y, t)} \right].$$

Aquest terme additiu que cal afegir a la pressió $p_2(t)$ per obtenir $p(y, t)$ és el que tradicionalment ha estat anomenat "pressió de Bernoulli" $p_B(t)$ pels investigadors en el terreny de l'acústica musical. La seva dependència en l'invers del quadrat de la secció $A(y, t)$ de pas de l'aire, posa de manifest que serà més important com més seccions estretes de pas hi hagi en el dispositiu que s'estudia.

Amb les hipòtesis simplificadores esmentades abans, si els passos estrets no són importants, la pressió de Bernoulli és negligible i l'equació aproximada de la dinàmica de la canya contindrà només els termes d'excitació independents de l'obertura, que són F_0 i $F_2(t)$. L'autoexcitació només pot provenir de l'acoblament amb la columna d'aire, és a dir, de les fluctuacions de $p_2(t)$ per causa del cabal que se li comuniqui. Si $p_2(t)$ fos constant, la resolució d'aquesta equació portaria a un moviment oscil·latori esmorteït al voltant d'una posició d'equilibri.

Quan els passos estrets són abundants en el dispositiu, la correcció de Bernoulli pot assolir valors molt grans.

Exemple d'aplicació

El model proposat s'ha fet servir fins ara amb dos objectius diferents. D'una banda, la simulació de transitoris d'atac per a diverses notes d'una tenora, instrument de tub bàsicament cònic acoblat a una doble canya. La figura 17 mostra els resultats calculats (a) i la comparació amb els resultats experimentals (b). El fet que un mateix model hagi permès de reproduir formes d'ona tan diferents com les de la figura 17, mostra que la seva complexitat és suficient i que els fenòmens físics representats pel conjunt d'equacions que s'ha resolt semblen, efectivament, ser els responsables del funcionament d'aquest tipus d'instrument.

Una altra aplicació d'aquest estudi és el redisseny d'instruments musicals. A l'hora de redissenyar un instrument, el que és adequat de fer és prescindir de l'element fungible (la canya, que es canvia amb periodicitat alta perquè és un element fràgil) i per tant variable al llarg del temps, i treballar només amb la part descriptiva del tub.

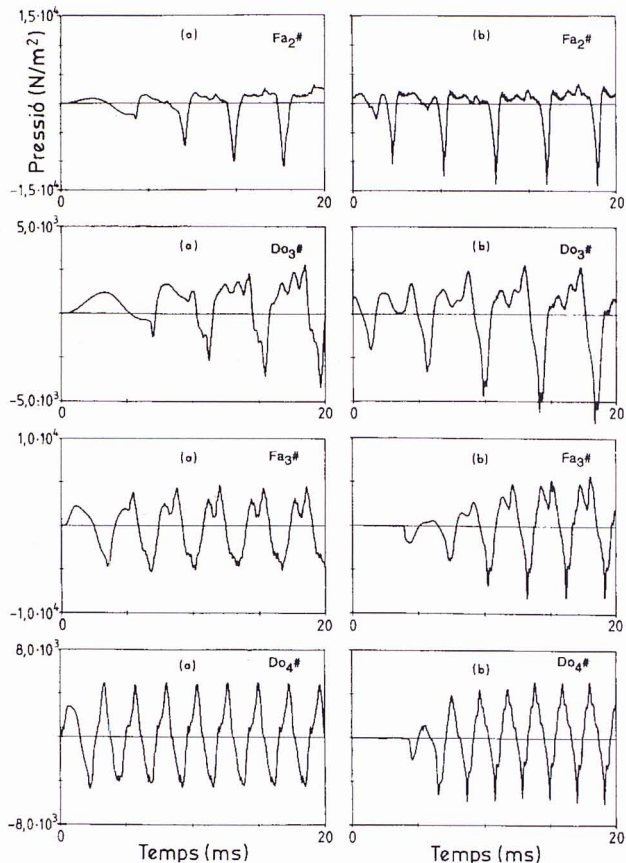


Figura 17: Transitoris d'atac d'una tenora per a diverses notes. (a) calculats, (b) experimentals

Evidentment, la freqüència de les notes que sonarien quan el tub fos acoblat a la canya no coincideix amb la dels pics de la corba d'impedància del tub tot sol. Una manera de procedir és realitzar mesures de les freqüències reals d'afinació de l'instrument que es pretén redissenyar i veure'n la separació (en centèsimes de semitò) de la freqüència dels pics d'impedància. Aquesta diferència es pot interpretar com a "error de model". Conegut l'error de model per a cada nota, es pot canviar la posició i mida dels forats del tub per calcular noves impedàncies els pics de les quals, corregides amb l'esmentat error, coincideixin o, si més no, s'apropin a les freqüències desitjades.

L'aplicació concreta en el cas, també, d'una tenora afinada un quart de to per sobre de l'afinació estàndard (afinació "brillant") ha permès de construir un prototipus nou, l'afinació del qual és notablement més ajusta-

da al diapasó estàndard (afinació "normal") que la de partida. Els resultats es recullen a les figures 18a i b.

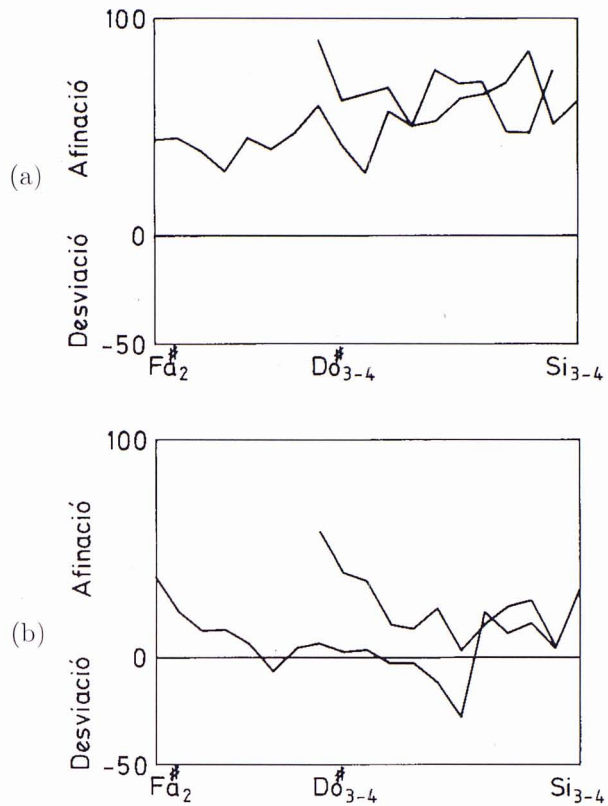


Figura 18: (a) Separació de les freqüències reals, en centèsimes de semitò, del so d'una tenora "brillant" respecte del diapasó "normal". (b) Separació de les freqüències reals del so, en centèsimes de semitò, d'un nou prototipus de tenora respecte del diapasó "normal". La línia superior correspon en els dos casos a l'afinació del segon registre de l'instrument

Bibliografia

- HELMHOLTZ, H., *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*, Dover Publications (New York, 1954) (traducció de l'original de 1885).
- LEVINE, H. i SCHWINGER, J., On the radiation of sound from an unflanged circular pipe, *Physical Review*, **73**, 383-406 (1948).
- MORSE, P.M., *Vibration and Sound*, 2a ed. McGraw-Hill, (New York, 1948).
- MUNJAL, M.L., *Acoustics of Ducts and Mufflers*, John Wiley & Sons, (New York, 1987).
- NEWLAND, D.E., *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, 2a ed. Longman, (New York, 1984).
- RAYLEIGH, J.W.S., *The Theory of Sound*, Dover Publications (New York, 1945) (revisió de l'edició de 1894).