Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la Revista és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la Revista hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta la Revista durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de juny a:
probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre -a les mateixes adreces electròniques- tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per l'alumnat universitari

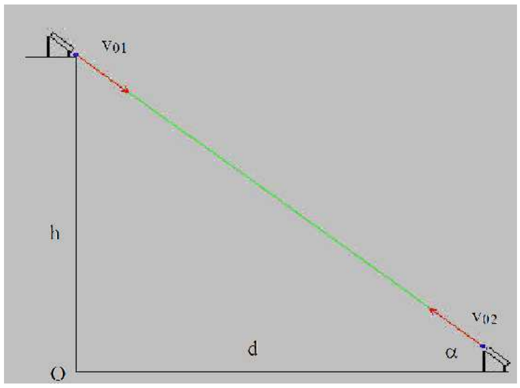
Una pregunta clàssica dels dies de pluja, és si val la pena correr per no mullar-s'hi. El problema tracta de trobar la millor opció per recorrer una distancia L sota la pluja i mullar-nos el menys possible. Es suposa que no disposem de paraigües ni res semblant.

Solució als problemes del número anterior de la Revista

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Si agafem com a origen de coordenades el punt O, les equacions del moviment dels projectils que surten dels canons 1 i 2 són, respectivament:

$$x_1 = v_{01}\cos\alpha t \qquad (1)$$
$$y_1 = h - v_{01}\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$



i

$$x_2 = d - v_{02}\cos\alpha t \qquad (2)$$
$$y_1 = v_{02}\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Si suposem que impacten en un punt M de coordenades (x_M, y_M) a l?instant t_M, s?haurà de complir per a aquest instant que $x_{M1} = x_{M2}$ i $y_{M1} = y_{M2}$.

Així, doncs, tindrem que:

$$v_{01}\cos\alpha t = d - v_{02}\cos\alpha t \qquad (3)$$

$$h - v_{01}\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{02}\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (4)$$

De la primera equació deduïm:

$$t_M = \frac{d}{(v_{01}+v_{02})\cos\alpha} \rightarrow t_M = \frac{L}{v_{01}+v_{02}} \qquad (5)$$

i de la segona en deduïm també:

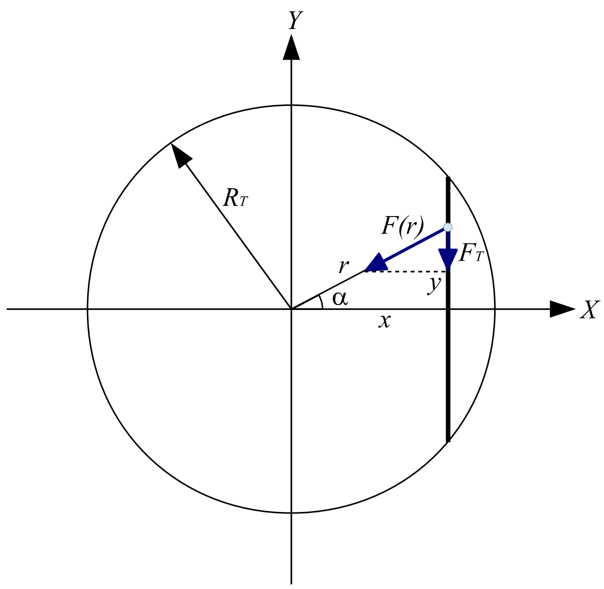
$$t_M = \frac{h}{(v_{01}+v_{02})\sin\alpha} \rightarrow t_M = \frac{L}{v_{01}+v_{02}}, \qquad (6)$$

on L és la distància entre els dos canons.

Aquest resultat demostra que, mentre els canons es mantinguin encarats, els projectils es disparin simultàniament i les seves trajectòries es creuin abans de tocar terra, els dos projectils sempre impactaran (es trobaran en el mateix punt en el mateix instant) amb independència dels valors de les velocitats de sortida dels projectils i de la inclinació dels canons.

Del problema per a l'alumnat universitari

Qualsevol túnel que travessi la terra en línia recta és pot veure com una línia sobre un pla XY que talla la terra per la meitat i aquesta línia la suposarem paral·lela a l'eix Y.



La variable x és constant i indica el punt més pròxim al centre de la Terra per on passa el túnel, la variable y és el paràmetre de la trajectòria, r és la distància al centre de la Terra del punt (x, y) i R_T és el radi de la terra. La força $F(r)$ és la força d'atracció gravitatòria a la distància r i F_T és la component tangencial a la trajectòria de $F(r)$.

Per la segona llei de Newton sabem:

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_T \tag{7}$$

On F_T és l'única força que actua donat que no hi ha cap tipus de fregament. A la figura anterior, podem veure que:

$$F_T = F(r) \cdot \sin(\alpha) \tag{8}$$

La força de la gravetat és:

$$F(r) = -G\,\frac{m \cdot M(r)}{r^2} \tag{9}$$

On $M(r)$ és la massa de l'esfera de radi r.

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3}\,\rho \tag{10}$$

Com suposem que la terra és totalment homogènia i esfèrica. Podem calcular la densitat ρ com:

$$\rho = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \tag{11}$$

Substituint (11) en (10) i el resultat en (9) obtenim l'expressió per a $F(r)$.

$$F(r) = -G\,\frac{m \cdot M_T}{R_T^3}\,r \tag{12}$$

Recordant la definició de g tenim:

$$F(r) = -m\,g\,\frac{r}{R_T} \tag{13}$$

Ara podem posar $F(r)$ en l'equació (8) i obtenir l'expressió per F_T.

$$F_T = -m\,g\,\frac{r\,\sin(\alpha)}{R_T} \tag{14}$$

Mirant la figura, tenim que:

$$y = r\,\sin(\alpha) \tag{15}$$

Així, la segona llei de Newton (7) es transforma en l'equació diferencial següent:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{R_T}\,y \tag{16}$$

Com la càpsula comença el seu viatge en la superfície terrestre amb velocitat zero, l'acaba a altre costat del túnel amb velocitat zero. Les condicions de contorn són:

$$y\big|_{t=0} = \sqrt{R_T^2 - x^2} \tag{17a}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{17b}$$

$$y\big|_{t=t_f} = -\sqrt{R_T^2 - x^2} \tag{17c}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_f} = 0 \tag{17d}$$

L'equació diferencial (16) es pot de resoldre multiplicant tots dos costats per dy/dt.

$$\dot{y}\,\frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{g}{R_T}\,y\,\frac{dy}{dt} \tag{18}$$

I fent la integral obtenim:

$$\dot{y}^2 = -\frac{g}{R_T}\,y^2 + C. \tag{19}$$

Aplicant les condicions de contorn (17a) i (17b) determinem el valor de la constant d'integració C i l'equació (19) resulta.

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{R_T}\left(R_T^2 - x^2 - y^2\right) \tag{20}$$

Aïllant $\dot{y}$ tenim una nova equació diferencial per resoldre.

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R_T}}\left(R_T^2 - x^2 - y^2\right)^{1/2} \quad (21)$$

L'equació anterior hem tingut en compte que la velocitat és negativa tot el trajecte. Per resoldre aquesta equació diferencial calculem la integral.

$$\int_{-\sqrt{R_T^2-x^2}}^{\sqrt{R_T^2-x^2}} \frac{dy}{\left(R_T^2 - x^2 - y^2\right)^{1/2}} = \int_0^{t_f} \sqrt{\frac{g}{R_T}} dt \quad (22)$$

Fent el canvi,

$$\frac{y}{\sqrt{R_T^2 - x^2}} = \lambda \quad (23)$$

resulta:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\lambda}{(1 - \lambda^2)^{1/2}} = \int_0^{t_f} \sqrt{\frac{g}{R_T}} dt \quad (24)$$

La integral de λ és molt senzilla, es pot calcular fent el canvi $\lambda = \sin(\alpha)$, i dòna π. L'equació (24) permet aïllar el temps de durada del viatge.

$$t_f = \pi\sqrt{\frac{R_T}{g}} \quad (25)$$

Podem veure que el temps t_f no depèn del paràmetre x, així, la durada del viatge no dependrà de la profunditat del túnel. Substituint valors surt que la durada és 42 minuts i 15 segons per qualsevol dels túnels.