

Determinació experimental del moment dipolar magnètic: un mètode estàtic i dos de dinàmics

Juan Bisquert, José A. Manzanares i Salvador Mafé ^{*†}

Introducció

El dipol magnètic és una font elemental del magnetisme, i el seu estudi constitueix una part essencial dels cursos de Física General i Electromagnetisme. A continuació presentarem una sèrie d'experiments senzills que poden facilitar la comprensió del concepte de moment dipolar magnètic. Els experiments mostren tres mètodes de mesura del moment dipolar.

En un treball anterior J. Bisquert, E. Hurtado, S. Mafé i J. Pina, (Bisquert, 1990), vàrem estudiar el moviment d'un imant de forma paralelepípedica en la direcció de l'eix d'una bobina circular. Com a pas intermediari, desenvoluparem un mètode *estàtic* per a la determinació del moment magnètic de l'imat, m . Aquest mètode estava basat en la representació dels valors experimentals del camp magnètic creat per l'imat en els punts situats a l'eix, B_{ex} , en funció dels valors teòrics del quocient B_{th}/m obtinguts suposant una imantació uniforme de l'imat. Les implicacions experimentals del procediment anterior s'estudien més detalladament en aquest treball. En primer lloc, analitzarem què hi succeeix quan les mesures s'efectuen en punts propers a l'imat i, a continuació, compararem els resultats que s'obtenen quan es mesura primer en un extrem de l'imat, i després, en l'altre extrem.

D'altra banda, determinarem d'una forma independent a l'anterior el moment magnètic de l'imat mitjançant dos mètodes *dinàmics*. El primer es basa en la mesura de la freqüència de les oscil·lacions transversals efectuades per l'imat dins d'un camp magnètic extern (Hallyday i Resnik, 1978; Levin, 1988). El segon mètode utilitza també la freqüència d'oscil·lació de l'imat, però en aquest cas les oscil·lacions són longitudinals i tenen lloc en la direcció de l'eix d'una bobina circular.

Tot i que en totes les experiències s'ha utilitzat un imant paralelepípedic, el tractament pot reformular-se de forma senzilla per a qualsevol altra geometria (per exemple, un imant en forma cilíndrica) sempre que tin-

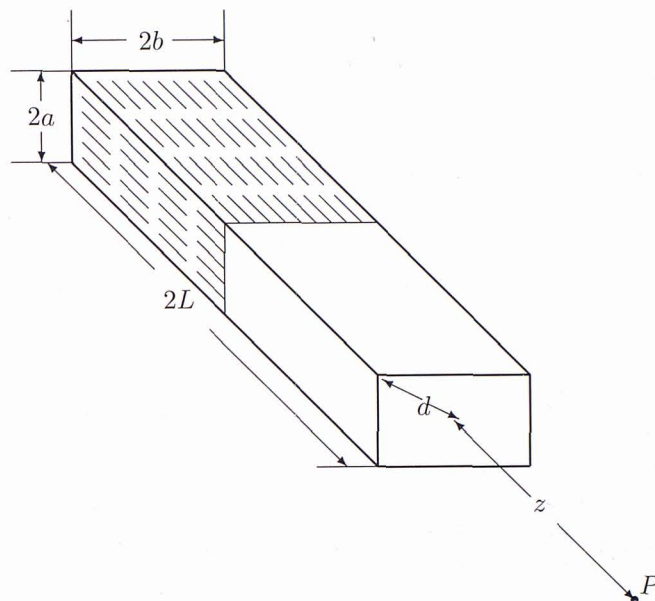


Figura 1: Forma i dimensions de l'imat. El camp magnètic es mesura per a una sèrie de punts P sobre l'eix de l'imat, situats a distàncies z d'un dels seus extrems

gui una simetria definida, i que la seva longitud en la direcció d'imatació sigui molt més gran que les seves dimensions transversals. D'altra banda, l'equip experimental que cal és molt comú en el laboratori d'alumnes, per la qual cosa el nostre estudi es pot usar com una pràctica de laboratori. Els mètodes de mesura utilitzats són força estimulants i, com es veurà, condueixen a tres determinacions independents de m molt similars. Per tant, creiem que la realització d'experiències com les descrites en aquest treball poden contribuir a una millor comprensió de l'important (tot i que, tal vegada, difícil) concepte del *moment dipolar magnètic*.

Mètode estàtic

Considerem l'imat dibuixat a la figura 1, d'on $2L$ n'és la longitud en la direcció d'imatació, $2a$ l'alçada i $2b$ l'amplada. Si suposem que la imantació de l'imat és uniforme, llavors el camp B_{th} que crea en el punt z es pot calcular aplicant-hi els principis bàsics de

*Traducció de l'article "Determinación experimental del momento dipolar magnético", aparegut a la *Revista Española de Física* v. 6 n. 2 (1992). Traducció de J. Campmany

†Juan Bisquert és al Departament de Ciències Experimentals de la Universitat Jaume I de Castelló. José A. Manzanares i Salvador Mafé són al Departament de Termodinàmica de la Universitat de València -Estudi General, a Burjassot

z (cm)	B_{th}/m (mT/A m ²)	$B_{ex,N}$ (mT)	$B_{ex,S}$ (mT)
3	1,38	4,76	4,70
4	0,75	2,79	2,75
5	0,463	1,81	1,73
6	0,308	1,24	1,16
7	0,216	0,90	0,81
8	0,158	0,68	0,59
9	0,120	0,53	0,44
10	0,0929	0,42	0,33
11	0,0736	0,34	0,25
12	0,0594	0,29	0,19
13	0,0486	0,24	0,15
14	0,0404	0,21	0,12
15	0,0339	0,18	0,09
16	0,0287	0,16	0,07
17	0,0246	0,14	0,05
18	0,0212	0,13	0,04

Taula 1: Resultats teòrics per a B_{th}/m (equació 1) i experimentals per a B_{ex} , pols N i S, en funció de z

l'electromagnetisme, amb el resultat (Bisquert, 1990):

$$\begin{aligned}
 B_{th}(z) = & \frac{\mu_0 m}{8\pi Lab} \left\{ \arctan\left(\frac{a}{b} \frac{z+2L}{\sqrt{d^2+(z+2L)^2}}\right) - \right. \\
 & \arctan\left(\frac{a}{b} \frac{z}{\sqrt{d^2+z^2}}\right) + \\
 & \arctan\left(\frac{b}{a} \frac{z+2L}{\sqrt{d^2+(z+2L)^2}}\right) - \\
 & \left. \arctan\left(\frac{b}{a} \frac{z}{\sqrt{d^2+z^2}}\right) \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

on m , moment magnètic de l'imant, és el producte de la imantació pel volum. Si introduïm les dimensions reals de l'imant ($a=3,45$ mm, $b=8,45$ mm, $L=3,50$ mm, i $d^2 = a^2 + b^2$) en l'equació (1), podem obtenir els valors teòrics de B_{th}/m per a diferents distàncies z (per exemple, prenent una distància de separació d'1 cm entre dos punts consecutius). Aquests valors són els que apareixen a la taula 1. A continuació, mesurem el camp magnètic $B_{ex}(z)$ als mateixos punts on ja vàrem calcular $B_{th}(z)$ mitjançant una sonda d'efecte Hall (Phywe 11749.01). El procediment de mesura consisteix en moure l'imant sobre un regle amb la punta de la sonda situada just al seu origen. Prenem primer un conjunt de dades $B_{ex,N}(z)$ amb el pol N de l'imant apuntant cap a la sonda. Tot seguit, i sense alterar la situació relativa de la sonda i el regle, rotem l'imant 180° al voltant del seu eix vertical i formem un altre conjunt de dades, $B_{ex,S}(z)$.

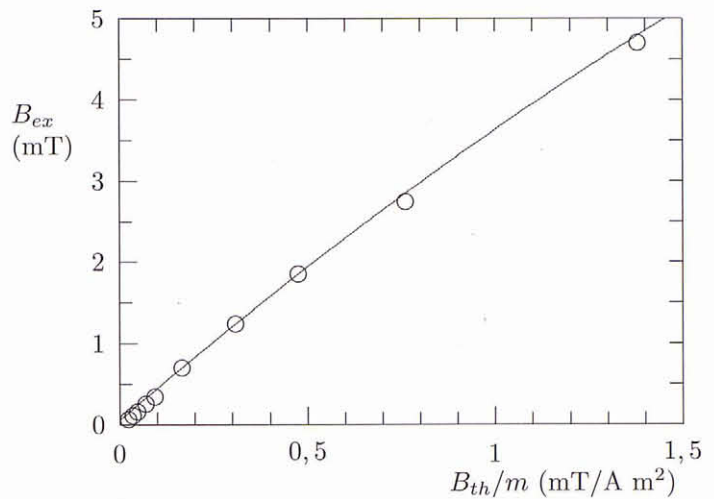


Figura 2: Representació de $B_{ex,N}$ respecte a B_{th}/m per a les dades de la taula 1. S'omet la representació de $B_{ex,S}$ per motius de claredat. Les corbes (paràboles) de l'ajust són: $B_{ex,N} = 0,0522 + 3,96B_{th} - 0,384B_{th}^2$ i $B_{ex,S} = -0,04339 + 4,03B_{th} - 0,416B_{th}^2$

Una primera qüestió és esbrinar quina és la regió de mesura que conduirà al resultat més fiable per a m . La sensibilitat de la sonda utilitzada (0,01 mT) imposa una cota superior per a z : els punts corresponents a $z > 20$ cm estan fora del nostre abast, com es mostra a la taula 1. D'altra banda, les desviacions de la hipòtesi d'imantació uniforme poden arribar a ser importants per a punts massa propers a l'imant (Basano, 1988), de manera que l'equació (1) deixarà de ser vàlida per als punts esmentats. Això és realment el que succeeix quan es consideren totes les dades contingudes en la taula 1 (vegeu la figura 2). Si l'equació (1) fos vàlida per a tots els punts experimentals, aleshores un ajust de B_{ex} en funció de B_{th}/m donaria una línia recta. Tanmateix, els punts representats a la figura 2 s'assemblen més a una paràbola que a una recta. No obstant això, és un fet significatiu que les desviacions dels punts experimentals respecte a la línia recta siguin petites, sobretot si tenim en compte la senzillesa del model utilitzat (Bisquert, 1990) per obtenir l'equació (1), i el rang de distàncies considerat (notem que estem mesurant molt a prop de l'imant).

Encara que és una temptació cercar ara una explicació a les corbes de la figura 2, és molt més convenient considerar en primer lloc només aquelles dades preses no gaire a prop de l'imant. Per exemple, les dades obtingudes per a $z > 2L = 7$ cm són vàlides. Així, les rectes que ajusten aquestes dades (vegeu la figura 3) indiquen que els efectes deguts a una imantació no uniforme de

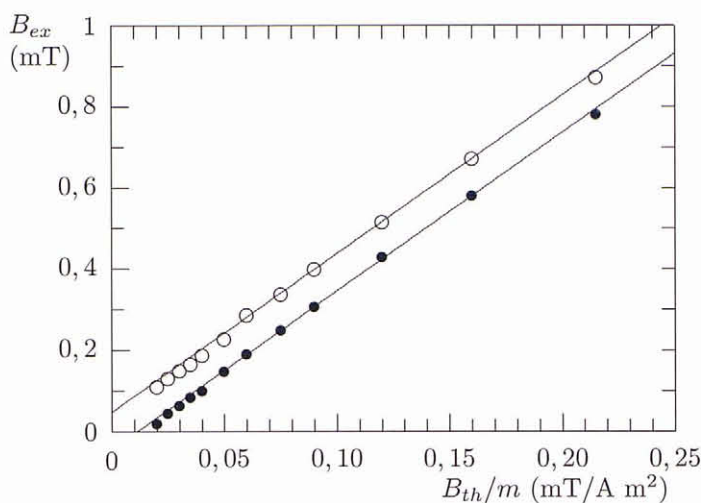


Figura 3: Representació de $B_{ex,N}$ i $B_{ex,S}$ respecte a B_{th}/m per a aquelles dades de la taula 1 amb $z > 7$ cm. Les corbes (rectes) de l'ajust són ara: (PUNTS BLANCS) $N_{ex,N} = 0,0475 + 3,98B_{th}$ (PUNTS NEGRES) $B_{ex,S} = -0,0437 + 0,39B_{th}$

l'imant són negligibles. Els pendents obtinguts en els corresponents ajustos pel mètode de mínims quadrats porten a: $m_N = (3,98 \pm 0,05) \text{ A m}^2$ i $m_s = (3,98 \pm 0,05) \text{ A m}^2$.

La coincidència dels resultats sembla confirmar la fiabilitat del procediment. El nostre resultat final pel mètode estàtic és:

$$m_{st} = (3,98 \pm 0,05) \text{ A m}^2 \quad (2)$$

Una altra verificació de la validesa del mètode es basa en el significat de l'ordenada en l'origen de les rectes que apareixen a la figura 3. És clar que aquesta ordenada ha de correspondre al valor B_0 de la component del camp magnètic extern (no degut a l'imant) en la direcció del regle. Però aquest component se suma al camp creat per l'imant quan mesurem $B_{ex,N}$ i es resta en mesurar $B_{ex,S}$. Per tant, les dues ordenades han de tenir iguals valors absoluts i signes oposats. Això és, en efecte, el que resulta de l'ajust anterior, ja que: $B_{0,N} = (4,7 \pm 0,5)10^{-5} \text{ T}$ i $B_{0,S} = (4,3 \pm 0,5)10^{-5} \text{ T}$.

Si l'únic camp magnètic present fos el de la Terra i el regle es col·loqués apuntant cap a nord, els valors anteriors correspondrien al component horitzontal del camp magnètic terrestre.

Mètode de les oscil·lacions transversals

Aquest mètode és molt conegut (Hallyday i Resnick, 1978) i consisteix a mesurar la freqüència (per exemple

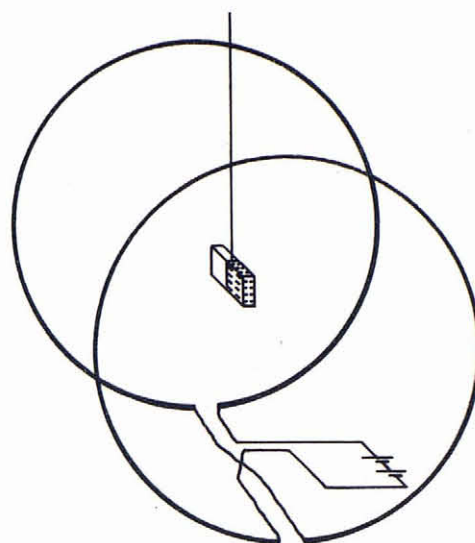


Figura 4: Esquema del muntatge experimental pel mètode de les oscil·lacions transversals

mitjançant una cèl·lula fotoelèctrica) de les oscil·lacions transversals d'un imant al voltant d'un eix vertical quan se'l posa en un camp magnètic extern (vegeu la figura 4). En el nostre muntatge experimental, aquest camp té un valor conegut (Purcell, 1989 i 1990) i ve proporcionat per unes bobines de Helmholtz (Phywe 06960.00). Com mostra la figura 4, l'imant es penja d'un fil i se situa sobre l'eix definit pels centres de les bobines. El camp magnètic B_{ct} en el punt de l'eix que està situat a una distància $R/2$ dels centres de les bobines és

$$B_{ct} = \frac{NI\mu_0}{2R} (1 + (1/2)^2)^{-3/2} \quad (3)$$

on R és el radi de les bobines, N el nombre d'espores i I la intensitat del corrent elèctric que circula per cada una.

Si l'imant de la figura 4 se separa un angle petit θ de la posició d'equilibri, oscil·larà a l'entorn de l'esmentada posició d'acord amb l'equació de moviment

$$I_n \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mB_{ct}\theta, \quad (4)$$

on I_n és el moment d'inèrcia de l'imant. Si substituïm la massa de l'imant, $M=78,4$ g, i les seves dimensions, obtenim

$$I_n = M(a^2 + b^2)/3 = (3,23 \pm 0,02)10^{-5} \text{ kg m}^2 \quad (5)$$

La freqüència d'oscil·lació ve donada per

$$\omega_{tr}^2 = \frac{mB_{ct}}{I_n}$$

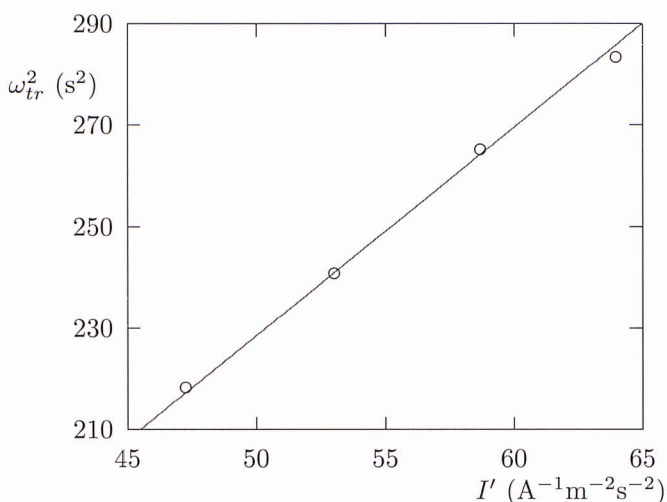


Figura 5: Resultats experimentals per a ω_{tr}^2 (mètode de les oscil·lacions transversals) per a diferents valors de I' (equació 7)

De les equacions (3), (5) i (6), amb $R = 20$ cm i $N = 154$, obtenim ω_{tr}^2 en funció del corrent I i el moment m de l'imant

$$\omega_{tr}^2 = 21,43mI = mI' \quad (7)$$

Els resultats obtinguts es mostren a la figura 5 i el valor trobat per a m és

$$m_{tr} = (4,1 \pm 0,2)A \text{ m}^2 \quad (8)$$

Malgrat la simplicitat del muntatge experimental utilitzat, l'imant oscil·la de forma regular sempre que el corrent sigui prou elevat ($I > 2A$). A menors intensitats, les oscil·lacions no tenen lloc al voltant d'un eix fix. No obstant això, es poden observar oscil·lacions regulars per a qualsevol corrent elèctric si s'utilitza un instrument de moment d'inèrcia conegut que mantingui sempre l'imant en un pla d'oscil·lació fix (Levin, 1984).

Mètode de les oscil·lacions longitudinals

En aquesta secció modificarem l'experiment descrit a la referència (Bisquert, 1990) de manera que el resultat final sigui ara el moment magnètic de l'imant. L'imant es posa sobre el vagó d'un carril d'aire (Phywe 1120217) de tal manera que només pugui oscil·lar longitudinalment segons l'eix de la bobina. Si es considera que l'imant és puntual (en negligim la grandària) i que la bobina és infinitament prima (en negligim el gruix), la freqüència teòrica (vegeu l'equació (5) de la referència Bisquert, 1990) és

$$\omega_{L1}^2 = 3\mu_0 mNI / 2M_T R^3 \quad (9)$$

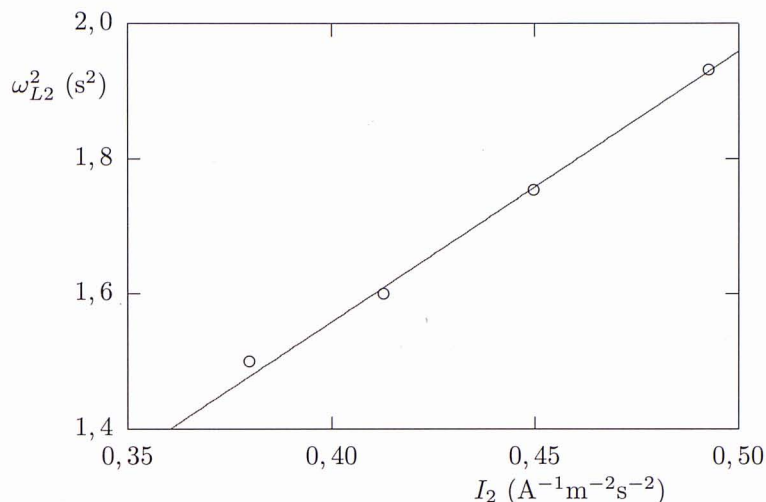


Figura 6: Resultats experimentals per a ω_{L2}^2 (mètode de les oscil·lacions longitudinals) per a diferents valors de I_2 (equació 11)

on M_T és la suma de les masses del vagó i de l'imant. L'equació (9) es pot escriure com

$$\omega_{L1}^2 = 0,146mI \equiv mI_1 \quad (10)$$

Un mètode teòric més refinat que tingués en compte la grandària finita de l'imant i el gruix de l'espira (vegeu l'equació (24) de la referència Bisquert, 1990) portaria a

$$\omega_{L2}^2 = 0,138mI \equiv mI_2 \quad (11)$$

Els resultats experimentals per a ω_{L2}^2 es mostren en la figura 6 (s'obté també una dependència similar a ω_{L1}^2 i, per tant, hem omès la figura corresponent). Dels pendents de les rectes respectives per a ω_{L1}^2 i ω_{L2}^2 es té que

$$m_{L1} = (3,8 \pm 0,2)A \text{ m}^2 \quad (12)$$

i

$$m_{L2} = (4,0 \pm 0,2)A \text{ m}^2 \quad (13)$$

Els resultats que es mostren a les expressions (12) i (13) concorden raonablement bé amb els obtinguts mitjançant els dos mètodes anteriors (vegeu les equacions (2) i (8)). En particular, els dos procediments més refinats porten a resultats molt similars (equacions (2) i (13)).

Discussió

Hem estudiat tres mètodes independents per a la determinació experimental del moment magnètic d'un imant. El primer es basa en el camp magnètic creat pel mateix imant, mentre que els altres fan ús d'un camp extern.

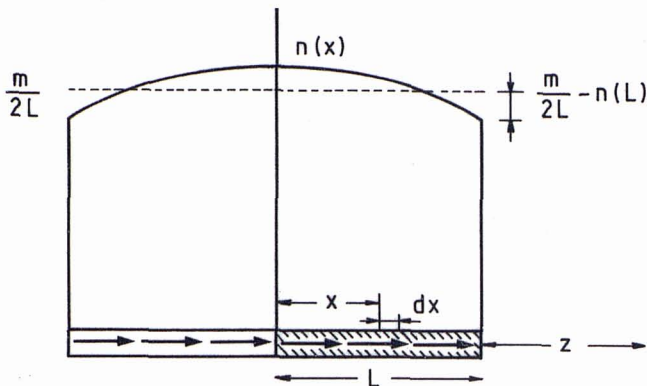


Figura 7: L'imant de la figura 1 suposant una magnetització no uniforme. Es representa en línia contínua la magnetització $n(x)$ per unitat de volum i longitud i, en línia discontinua, una magnetització uniforme, la desviació de la qual s'ha exagerat per motius de claredat. Dins de l'imant es mostren diversos dipols elementals de moments diferents

El concepte de moment dipolar magnètic es presenta d'aquesta forma en dues situacions físiques distintes. Els experiments són molt simples i porten a resultats similars per a m .

Analitzarem finalment les hipòtesis d'imanació uniforme de l'imant. L. Basano, P. Ortonello i C. Pontigia, (Basano, 1988), han afirmat que en realitat la imanació no pot ser estrictament uniforme ja que ha de disminuir en els extrems de l'imant a causa d'efectes magnetostàtics. Un mode intuïtiu d'estudiar aquest fenomen es basa a considerar el moment magnètic per unitat de longitud, $n(x)$, amb una correcció de segon ordre en x respecte al cas uniforme

$$n(x) = \frac{m}{2L} + \frac{kL^2}{3} - kx^2, \quad * (14)$$

on les constants s'escullen de manera que el moment dipolar total de l'imant sigui m (vegeu la figura 7)

$$\int_{-L}^{+L} n(x) dx = m. \quad (15)$$

Si negligim els efectes deguts a l'extensió transversal de l'imant, el camp magnètic en un punt que està situat a una distància z es pot obtenir sumant les contribucions de dipols elementals de moment $dm = n(x)dx$ (vegeu la figura 7)

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{dm}{(z+L-x)^3} \quad (16)$$

amb el resultat

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{4L} \left(m + \frac{2kL^3}{3} \right) \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right) - \frac{\mu_0}{2\pi} k \left[\frac{(z+2L)^2}{2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right) - 2(z+L) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2L} \right) + \log \left(1 + \frac{2L}{z} \right) \right] \quad (17)$$

La qüestió següent és explicar les corbes (paràboles) que apareixen a la figura 2 o, pel cap baix, el fet que els termes quadràtics en B_{th} tinguin coeficients negatius. Per fer-ho, reescriurem l'equació (17) com

$$B(z) = B_{unif}(z) - \frac{\mu_0}{2\pi} k F(z) \quad (18)$$

on $F(z)$ es defineix a partir de les equacions (17) i (18), i

$$B_{unif}(z) = \frac{\mu_0 m}{8L\pi} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+2L)^2} \right) \quad (19)$$

és el camp magnètic creat per un imant d'imanació uniforme. Una expressió similar a la (19) s'obté a partir de l'equació (1) per a $z \gg a, b$. Noteu que B_{unif} és aproximadament el camp magnètic teòric que apareix a l'eix horitzontal de la figura 2. Per tant, si reescriuim l'equació (18) en termes de B_{unif} , la funció resultant ha de donar compte de la dependència parabòlica observada a la figura 2. Com que k és un paràmetre correctiu petit, podem acceptar que B_{unif} ve donat per l'equació (19) i desenvolupar $F(z)$ en sèrie de potències de L/z . Retenint només els termes d'ordre més petit, l'equació (18) queda en la forma

$$B(z) \approx B_{unif}(z) - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{16}{15} K \left(\frac{L}{z} \right)^5. \quad (20)$$

Per introduir B_{unif} en el segon sumand de l'equació (20), utilitzarem l'aproximació dipolar. El resultat final és

$$B(z) \approx B_{unif}(z) - \left(\frac{2\pi}{\mu_0} \right)^{2/3} \frac{16kL^5}{15m^{5/3}} B_{unif}(z)^{5/3}. \quad (21)$$

Ara veiem que l'exponent $5/3$ és proper a 2 i que l'equació 20 pot explicar els termes quadràtics que apareixen en l'ajust no lineal de la figura 2. A més, és possible estimar quantitativament la desviació respecte a la imanació uniforme de l'imant. En efecte, l'equació (14) per a $x = +L$ queda com

$$\frac{n(+L)}{m/2L} = 1 - \frac{4kL^3}{3m}, \quad (22)$$

i, per tant, un paràmetre adient per avaluar aquesta desviació és (vegeu la figura 7)

$$\Delta \equiv \frac{4kL^3}{3m} \quad (23)$$

Observeu que per estimar Δ cal conèixer prèviament k . Podem convertir l'exponent $5/3$ de l'equació (21) en un 2 si hi introduïm el valor mitjà $\langle B \rangle$ del camp magnètic

$$B(z) = B_{unif}(z) - cB_{unif}^2(z) \quad (24)$$

on

$$c \equiv \left(\frac{2\pi}{\mu_0}\right)^{2/3} \frac{16}{15} \frac{kL^5}{m^{5/3}} \bar{B}^{-1/3} \quad (25)$$

Finalment, de l'equació (25) és clar que

$$\Delta \approx \frac{4}{3} \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^{2/3} \frac{m^2 \bar{B}^{1/3}}{L^2} c \quad (26)$$

on c es pot obtenir a partir dels ajustos de la figura 2.

Si introduïm les dades numèriques a l'equació (26), resulta $\Delta=0,0003$ %, que concorda amb la petita desviació respecte a la imantació uniforme a la figura 2. Òbviament, hauria estat possible seguir un procediment alternatiu a l'anterior i ajustar els resultats experimentals de la figura 2 directament a l'equació (21). L'ajust condueix aleshores als valors de m i k (o Δ) buscats. Tanmateix, les conclusions que s'obtenen seguint aquest procés no són gaire diferents a les discutides aquí.

Agraïments

Agraïm a Manuel Delicado i Belén Serrano, estudiants de Física de segon any a la UNED-CA d'Albacete, la seva diligència durant la realització de part de les mesures recollides aquí.

Bibliografia

- BISQUERT, J., HURTADO, E., MAFÉ, S. i PINA, J., *Am. J. Phys.*, **58**, 838 (1990).
 HALLYDAY, D. i RESNICK, R., *Physics*, Wiley. New York (1978).
 LEVIN, E., *Am. J. Phys.*, **56**, 688 (1988).
 BASANO, L., ORTONELLO, P. i PONTIGIA, C., *Am. J. Phys.*, **56**, 517 (1988).
 PURCELL, E.M., *Am. J. Phys.*, **57**, **58**, (1989 i 1990).
 LEVIN, E., *Am. J. Phys.*, **52**, 248 (1984).

(Ve de la pàgina 37)

8) Com ha de contribuir la divulgació al coneixement de la ciència feta al país?

Molt sovint, la divulgació científica s'adreça a temes generals. Convindria, però, que incidís també en fer conèixer l'estat actual de la ciència del país, que actués en ocasions de manera semblant a la dels crítics literaris o dels comentaristes esportius, que informen i valoren les novetats en els seus àmbits.

9) Ha d'opinar la divulgació científica?

Una de les mancances usuals en la divulgació científica és la manca d'opinió i de discussió. Resultaria interessant demanar a diversos

experts contribucions de signe diferent sobre un mateix tema, que ajudaria el lector a afinar el seu sentit crític, tot i que en algunes ocasions el podria desorientar. Seria enriquidora, també, la presència de més articles d'opinió sobre l'organització de la ciència, la política científica, l'estat de la ciència en el país, o sobre temes controvertits com l'energia nuclear, les energies alternatives, l'emmagatzemament de residus industrials, etc.

10) La divulgació, està massa subjecta als alt-i-baixos de les modes?

En la ciència, com en totes les activitats humanes, les modes tenen un pes considerable. Alguns temes (catàstrofes, caos, cosmologia,

efecte hivernacle...) ocupen moltes pàgines d'informació, mentre que progressos d'importància similar en d'altres camps no suscitaven cap atenció. Anàlogament, l'atenció del públic es concentra en unes poques figures científiques (Newton, Galileu, Einstein, Darwin). Caldria contribuir a una presentació prou diversificada de la ciència, que aproximés més la imatge de la ciència a la seva realitat quotidiana.

Opinar, informar, apuntar temes d'actualitat: heus ací una faceta, no gens òbvia, de l'activitat científica que pot ajudar a enfortir la relació entre la ciència i la societat.

David Jou