física
núm 13 PRIMAVERA 2014 Societat Catalana de Física

EL RACÓ OBSCUR . EL GPS

Xavier Jaén

Avui moltíssima gent utilitza el GPS sense saber-ne gran cosa. Es tracta d'un sistema de localització relativament senzill per a baixa resolució però que es complica molt en augmentar la resolució, fins al punt que ens fa ballar el cap amb els conceptes de temps i també d'espai... Però aquest cop no es tracta de "filosofia"!

Introducció

Fig. 1: *Global positioning system.*

El sistema de localització GPS W (*Global Positioning System*) és un sistema de navegació per satèl•lit. Breument, podem dir que consta d'un mínim de quatre satèl•lits en òrbita coneguda (posició coneguda) cadascun dels quals porta un rellotge idèntic i que estan sincronitzats. Aquest satèl•lits van enviant constantment (cada mil•lisegon) senyals de ràdio amb la informació sobre la seva posició i el temps que indiquen els seus rellotges. Aquesta informació pot ser rebuda per qualsevol receptor. És exactament com si es tractés de quatre emissores de ràdio convencionals (RAC1, Catradio, SER...) amb un contingut avorridíssim. Cada emissora-satèl•lit α $(\alpha = 1,..,4)$ diu "$(x_{S\alpha}, y_{S\alpha}, z_{S\alpha}, t_{S\alpha})$" un cop cada mil·lisegon. Amb aquesta informació rebuda el receptor pot saber la seva localització i el temps (x, y, z, t). Com és això possible? És aquest sistema relativista...Perquè? Vegem-ho una mica tot plegat.

El que volem és explicar l'essència del sistema GPS de manera senzilla, poder veure quina és la idea bàsica del seu funcionament, per la qual no cal apel•lar gaire a la relativitat. Per això ens serà molt útil veure com funciona el sonar i dissenyar un GPS acústic a l'aigua o a l'aire.

Per no embolicar i perquè el paper i la pantalla són bidimensionals, posarem exemples en dues dimensions (2D). Així, ja des d'ara prescindim de z.

El sonar

El sonar W (*sound navigation and ranging*) és un dels sistemes de localització més coneguts gràcies a les pel•lícules. El so rítmic del sonar, BIP-BIP-BIP, l'hem sentit multitud de vegades en incomptables viatges submarins.

Ens situem al fons del mar, d'aigües absolutament tranquil•les i homogènies. No hi ha corrents marins, no hi ha gradients de densitat ni de temperatura.

Fig. 2: La pantalla d'un sonar.

Un submarí en la posició (x_{S1}, y_{S1}) va enviant senyals acústics, BIP-BIP, controlant en quina direcció $\hat{u}_{S1}$ els envia. Va registrant l'interval de temps de rebot del senyal Δt_{S1}. Si la velocitat del so a l'aigua és i el radar detecta un Δt_{S1} inusualment curt, atribuïble a una roca propera en una posició no coneguda (x, y), tindrem que la distància entre el submarí i la roca serà igual a la velocitat del so c_a per $\frac{\Delta t_{S1}}{2}$, ja que Δt_{S1} és el temps que triga el senyal a anar i tornar. El vector que va del submarí a la roca és $c_a \frac{\Delta t_{S1}}{2} \hat{u}_{S1}$ i, per tant, podem escriure

$$(x, y) = (x_{S1}, y_{S1}) + c_a \frac{\Delta t_{S1}}{2} \hat{u}_{S1} \qquad (1)$$

expressió que permet calcular la posició (x, y) de la roca.

Normalment al submarí només li interessa la posició relativa de la roca $(x_{(S1)}, y_{(S1)})$

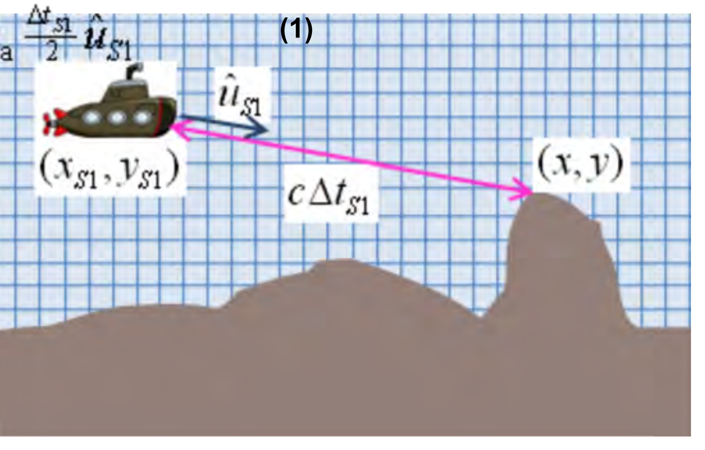

Fig. 3: Funcionament d'un sonar.

$$(x_{(S1)}, y_{(S1)}) = (x, y) - (x_{S1}, y_{S1}) = c_a \frac{\Delta t_{S1}}{2} \hat{u}_{S1} \qquad (2)$$

Un GPS acústic

Ens situem de nou al fons del mar, d'aigüess absolutament tranquil•les i homogènies. No hi ha corrents marins, no hi ha gradients de densitat ni de temperatura.

Suposem que és el submarí, el que vol saber la seva localització. Per a això té un sistema d'emissors acústics, que en direm *torres*. En 2D es necessiten un mínim de tres torres. Cada torre té un bon rellotge i els tres rellotges estan *sincronitzats*, que per a nosaltres de moment vol dir que "indiquen la mateixa hora". Una mica més avall tornarem sobre aquest punt. Cada torre envia periòdicament un senyal acústic. Ara, enlloc de fer BIP-BIP-BIP, els senyals acústics duen informació. Cada torre, cada molt poc temps, envia un senyal que diu la seva posició i el temps d'emissió: . $(x_{S\alpha}, y_{S\alpha}, t_{S\alpha})$, $\alpha = 1, 2, 3$. Si els senyals acústics viatgen a una velocitat c_a , en l'arribar al submarí es poden ajuntar les dades i raonar amb "senzillesa no relativista" que la distància entre cada torre i el submaríés igual a la velocitat del senyal per la diferència entre els temps de sortida i d'arribada:

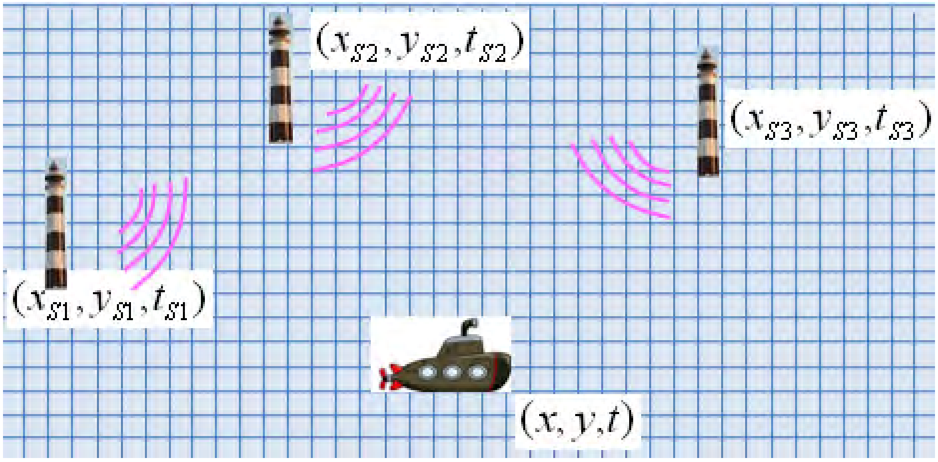

Fig. 4: Un GPS acústic.

$$\begin{cases} (x - x_{S1})^2 + (y - y_{S1})^2 = c_a^2 (t - t_{S1})^2 \\ (x - x_{S2})^2 + (y - y_{S2})^2 = c_a^2 (t - t_{S2})^2 \\ (x - x_{S3})^2 + (y - y_{S3})^2 = c_a^2 (t - t_{S3})^2 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Aquest sistema d'equacions permet trobar la posició del submarí, (x, y) , a més del temps t en quèestà en aquesta posició. Aquest mètode té molts avantatges respecte del sonar. Les torres envien senyals acústics sense estar pendents de cap submarí en concret. Els senyals les potrebre qualsevol submarí o qualsevol altre nau que tingui un receptor;només ha de resoldre les equacions **(3)**. Podem dir que és un sistema multiusuari, sense limitacions quant a nombre d'usuaris, sempre que cadascun porti el seu receptor....Compte! No resol el problema de la roca que sí resol el sonar.

En el cas del sonar tradicional fem el càlcul de l'espai recorregut pel so com $c_a \frac{\Delta t_{S1}}{2}$, on apareix la diferència de temps d'un mateix rellotge. El càlcul es fa tenint en compte que la velocitat del so i el temps que triga en l'anada i la tornada són iguals. Ara, com a resultat del càlcul, trobem el temps t del submarí en el moment de rebre els senyals. Aquest temps coincideix amb el temps del rellotge que porta el submarí, si s'ha posat prèviament en hora. Si no s'hi ha posat, ho es pot haver desajustat, es pot fer servir t per ajustar el rellotge propi. Si comparem el càlcul **(1)** amb **(3)** trobem que $t - t_{S1} = \frac{\Delta t_{S1}}{2} \Rightarrow t = t_{S1} + \frac{\Delta t_{S1}}{2}$. Això és que el temps de recepció del senyal per part del submaríés igual al temps d'emissió més el temps que triga el senyal a anar de la torre al submarí. Diem que t és un temps *sincronitzat* amb t_{S1}. Això vol dir que, si tot roman en repòs, $\frac{\Delta t_{S1}}{2}$ valdrà sempre el mateix i quan el rellotge de la torre indiqui $t_{S1} + \frac{\Delta t_{S1}}{2}$ des de la torre poden dir "ARA" i el submarí haurà rebut el senyal. No només ho poden dir, sinó que ho poden comprovar fent una trucada "instantània" feta amb un radiotransmissor (*walkie-talkie*). Aquesta relació es donarà també amb els diferents rellotges de les torres. Així, $t_{S2R} = t_{S1} + \frac{\Delta t_{S1}}{2}$, on t_{S2R} és el temps de la torre $S2$ en el moment del rebot del senyal enviat per $S1$ en l'instant t_{S1} i que triga a anar i tornar Δt_{S1}. Aquesta operació de sincronització la podem fer amb so o amb algun altre agent que compleixi que va i torna amb la mateixa velocitat.

Què pot fer que el sistema sonar i el GPS acústic no funcionin tal com s'ha descrit? Perquè aquest mètode sigui viable cal que la velocitat del so per l'aigua sigui rectilínia i uniforme, tant en el camí d'anada com en el de tornada. Pot no ser així a causa de gradients de temperatura o densitat. Però també a causa que les aigües no estiguin tranquil•les. La presència de petits corrents locals o grans corrents globals, encara que siguin uniformes, fan que les expressions deixin de ser certes. En general, el mètode pot funcionar amb algunes modificacions (per tenir en compte els gradients de densitat i temperatura) i admet una resolució limitada. Modificar el sistema per tenir en compte els corrents és difícil a causa de la seva variabilitat. És, però, molt il•lustratiu imaginar que tenim un corrent global que fa que tota l'aigua en bloc se'n vagi cap a la dreta a velocitat uniforme. En aquest cas caldrà fer modificacions en el mètode per tenir en compte la velocitat relativa del so respecte de les torres i el submarí,les quals estan "previstes" per la física no relativista i no representen cap problema conceptual.

Sincronitzar

Com sabem que dos rellotges en diferent lloc indiquen la mateixa hora?. Què volem dir quan diem que indiquen la mateixa hora?... *Quan* indiquen la mateixa hora?

L'Adelaida i en Joan fa temps que són parella, però per raons laborals estan separats per la distància. L'Adelaida busca la manera de sentir-se pròxima al Joan. L'Adelaida, de Sant Pere de Ribes, molt clàssica ella, envia una postal de les d'abans al seu xicot,en Joan, de Matadepera. A la postal,hi diu que quan la rebi li enviï de seguida una altra postal a ella i que ella farà el mateix i així successivament. En Joan no entén gaire de què van aquestes trifulgues de l'Adelaida, però li fa cas, com sempre. L'Adelaida té una fe cega que el correu triga el mateix a anar de Sant Pere a Matadepera que a tornar. Així, quan rep la primera postal del Joan pot calcular quan en Joan estarà escrivint les postalssegüents:

$$t_{(N)\,\mathrm{PostalJoan}} = t_{(N-1)\,\mathrm{PostalAdelaida}} + \frac{\Delta t_{\mathrm{Postals}}}{2} \quad (4)$$

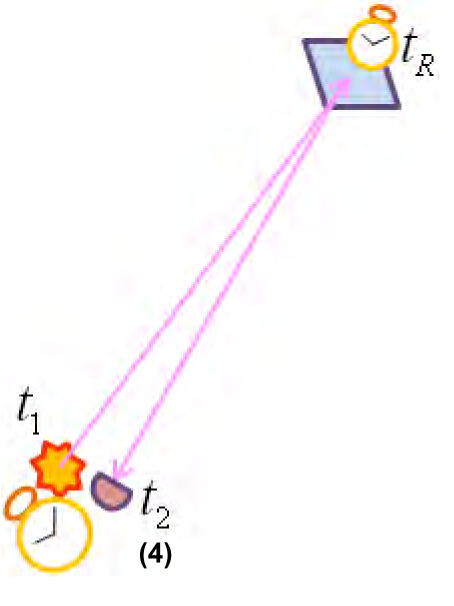

Fig. 5: Sincronització de rellotges.

L'Adelaida, cada cop que el seu rellotge, el d'ella, indica $t_{(N)\ \mathrm{PostalJoan}}$ s'emociona pensant que ARA en Joan li està escrivint una postal.

El que ha fet l'Adelaida és sincronitzar el seu rellotge amb el del Joan, encara que aquest ni tan sols en té, de rellotge. D'aquesta manera pot dir això que "ARA" sé que fa tal o qual cosa. El mètode de sincronització que fa servir l'Adelaida és certament primitiu. Però és essencialment el mateix que se li va ocorre a Einstein per resoldre un conflicte semblant que tenia, no pas amb la seva xicota, certament. Hi ha, però, algunes diferències entre el que fa l'Adelaida i el que fa Einstein. L'Adelaida sempre pot comprovar el moment "ARA", que ella ha calculat, en què espera que en Joan escriu, fent-li una trucada. Einstein va constatar que, no havent-hi una manera de comunicar-se a velocitat infinita, era del tot necessari per fer física sincronitzar rellotges. L'anomenat *protocol d'Einstein* diu que dos rellotges distants en repòs estan sincronitzats si el temps de recepció d'un d'ells t_R d'un senyal lluminós enviat per l'altre al temps d'emissió t_1 compleix

$$t_R = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)}{2} \qquad \textbf{(5)}$$

on t_2 és el temps de retorn del senyal emès (vegeu la figura). Aparentment i de forma essencial, aquest protocol només difereix del de l'Adelaida enel fet que utilitza una velocitat molt més gran que la del correu postal. Però junt amb el principi de relativitat, Einstein requeria que aquest mètode de sincronització fos realitzable en qualsevol sistema de referències inercial. Ara,com que la llum és la màxima velocitat possible, aquest mètode no admet cap comprovació "directa". En tot cas, podrem treure'n conseqüències i veure si s'adiuen amb la realitat. La "paradoxa" dels bessons és una de les conseqüències més conegudes i comprovades.

El GPS o sistema de navegació per satèl·lit

El sis GI ins ac er es fu igi qu el GI ac pe ar llu (o el Er 2E es necessiten un

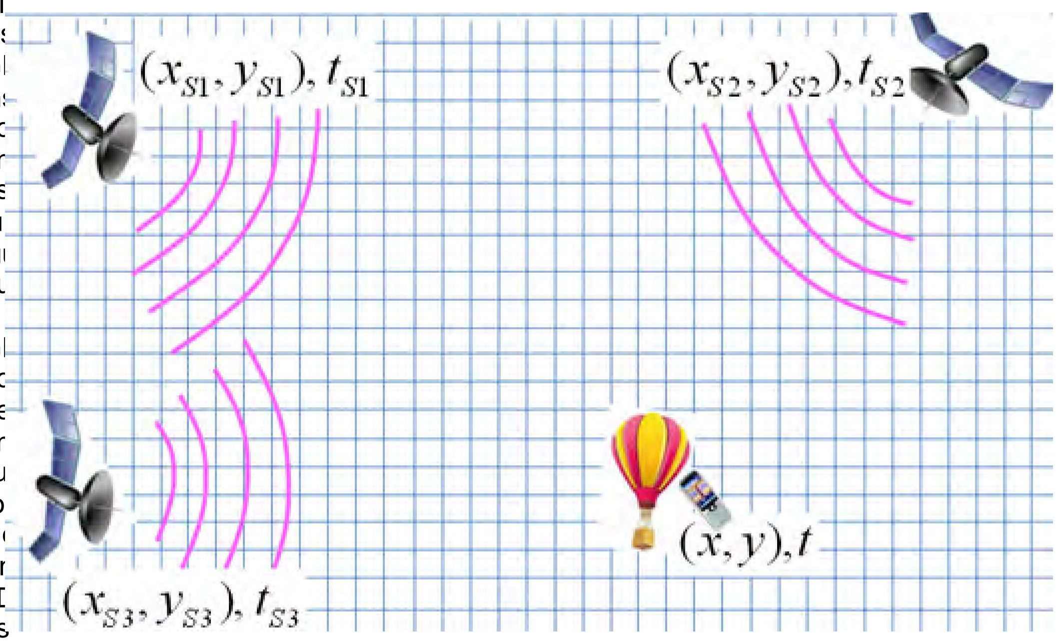

Fig. 6. El GPS

mínim de tres satèl•lits. També requereix que els rellotges dels satèl•lits estiguin sincronitzats segons el protocol d'Einstein. En aquestes condicions cada satèl•lit envia un cop cada mi·lisegon informació sobre la seva posició i el seu temps, $(x_{S\alpha}, y_{S\alpha}, z_{S\alpha}, t_{S\alpha})$, $\alpha = 1, 2, 3$, en totes les direccions de l'espai, com si fossin emissores de ràdio. Les persones del globus de la figura tenen un receptor preparat per rebre simultàniament les emissions dels 3 satèl•lits. Amb tota aquesta informació i gràcies a la sincronització, tenim:

$$\begin{cases} (x - x_{S1})^2 + (y - y_{S1})^2 = c^2(t - t_{S1})^2 \\ (x - x_{S2})^2 + (y - y_{S2})^2 = c^2(t - t_{S2})^2 \\ (x - x_{S3})^2 + (y - y_{S3})^2 = c^2(t - t_{S3})^2 \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

D'aquestes equacions podem trobar (x, y) i t.

Com veiem, no sembla que hi hagi gaires diferències formals en les expressions. Els sistemes d'equacions **(3)** i **(6)** són clavats, amb la excepció que a **(3)** c_a és la velocitat del so per a l'aigua i a **(6)** c és la velocitat de la llum en el buit. No és només un canvi de numeret. c_a es propaga pel medi aigua i és una velocitat relativament discreta. Se'n coneixen de més ràpides, per exemple la llum. c es propaga pel buit, que no és un medi, i no se'n coneix cap de més ràpida.

Com en el cas del GPS acústic, com a resultat del càlcul trobem el temps t del globus en el moment de rebre els senyals. Aquest temps coincideix amb el temps del rellotge que porta el globus, si s'ha posat prèviament en hora. Si no l'hi ha posat o se li pot haver desajustat pot fer servir t per ajustar el rellotge propi. Podem tornar a considerar $t - t_{S1} = \frac{\Delta t_{S1}}{2} \Rightarrow t = t_{S1} + \frac{\Delta t_{S1}}{2}$. Això és que el temps de recepció del senyal per part del globus és igual al temps d'emissió més el temps que triga el senyal a anar del satèl•lit al globus. Diem que t és un temps sincronitzat amb t_{S1}: si tot roman en repòs, $\frac{\Delta t_{S1}}{2}$ valdrà sempre el mateix; quan el rellotge del satèl•lit indiqui $t_{S1} + \frac{\Delta t_{S1}}{2}$ des del satèl•lit poden dir que "ara" el globus ha rebut elsenyal. Ara però no poden comprovar-ho fent una trucada pel *walkie-talkie*!

En el cas del GPS acústic, hem comentat que si l'aigua no romangués en repòs hauríem de fer modificacions en el mètode. Aquestes modificacions estan previstes per la física no relativista i no hi ha cap problema conceptual per implementar-les.És tan sols una qüestió "tècnica".
Quin és ara l'equivalent del fet que "les aigües no estiguin tranquil•les"? Doncs en principi la constància de la velocitat de la llum és vàlida en un sistema inercial. Aigües tranquil•les vol dir sistema inercial. Dos sistemes inercials diferents, un que podem considerar quiet i un altre en moviment uniforme, són els dos "aigües tranquil•les ". La teoria que fa compatible que per a dos sistemes inercials diferents la llum, més exactament el mateix focus de llum per als dos, vagi a la mateixa velocitat, és la relativitat especial. Això vol dir que no ens hem de preocupar per si el nostre sistema de referència inercial està o no en moviment. Les equacions que farem servir són les descrites més amunt. Per exemple, en el cas de la translació de la Terra al voltant del Sol, sempre que per als intervals de temps amb què treballem el puguem tractar com a

moviment uniforme, no ens afectarà per res el mètode. La cosa s'embolica quan constatem que la rotació de la Terra, i també la gravetat, fan que el sistema GPS pugui no ser un "bon sistema inercial". Les modificacions que cal fer no pertanyen a la física no relativista. No estaven previstes. Cal tractar aquestes modificacions en el marc de la relativitat general. I això amb prou feines se sap fer avui en dia! Des d'aquest punt de vista, el sistema GPS és un sistema de localització relativista. Però en una primera aproximació, si no volem una gran resolució i nosaltres estem en repòs, o ens movem a baixes velocitats respecte de la llum, podem considerar el sistema GPS com a inercial i fer servir les equacions **(6)** per trobar la localització i el temps d'on som, (x, y) i t exactament igual que fem amb el GPS acústic.

Si podem considerar el sistema de satèl•lits GPS com a inercial i el receptor GPS està en repòs o es mou a velocitats relativament baixes, el mètode no difereix en essència de la localització amb el GPS acústic. Cal tenir en compte que un error d'un microsegon (10^{-6} s) en la mesura dels temps comporta un error d'uns 300 m en la localització amb el GPS amb llum. En el cas del GPS acústic un error d'un mil·lisegon (10^{-3}s) en la mesura del temps comporta "només" un error d' $1,5$ m en la localització. Un dels requeriments essencials del sistema GPS és que els rellotges romanguin sincronitzats, entre ells, amb llum. Com és que ens entestem a fer servir la llum si el fet de ser tan ràpida fa que cometem tant error?. És cert que el fet de ser tan ràpida ens fa cometre un tipus d'error deguts a la mesura del temps, però en canvi el fet que la coneguem amb gran precisió, $c = 299792458 \text{ m/s}$, fa que, respecte al coneixement poc fiable dels senyals acústics i d'altres, la llum sigui un bon agent de transmissió. A més, la llum viatja a una velocitat sensiblement constant per l'atmosfera i...pot viatjar pel buit!

ISSN: 1988-7930 **DL:** B-31773-2012 **Adreça a la xarxa:** www.RRFisica.cat **Adreça electrònica:** redaccio@rrfisica.cat difusio@rrfisica.cat