

## APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO AL PROBLEMA DE CONTACTO SIN FRICCION UTILIZANDO DISCRETIZACIONES NO CONFORMES.

Blázquez A.; París, F.; Cañas, J.  
Departamento Mecánica de Medios Continuos  
E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad de Sevilla  
Avda. Reina Mercedes, s/n. Sevilla 41012.

**Resumen.**- Existen numerosos problemas en ingeniería en los que se producen interacciones directas entre los contornos de dos o más sólidos cuando estos se someten a un estado de carga externa. Tal es el caso de uniones atornilladas o roblonadas, cojinetes, aparatos de apoyo, pilotes de fricción, y un largo etcétera. En el presente escrito se presenta la aplicación del M.E.C. al problema de contacto, sin fricción, de dominios bidimensionales, en el campo elástico y utilizando discretizaciones distintas en cada una de las zonas de los cuerpos que van a contactar.

**Abstract.**- There are many problems in engineering involving interactions between bodies boundaries. Examples are riveted joints, bearings, etc. In this paper we show a B.E.M. application for two-dimensional frictionless contact problem using different discretizations in the bodies in contact.

### 1.-INTRODUCCION.

Desde que Hertz [4] desarrollara en 1882 la formulación matemática que permite el estudio analítico de tensiones de contacto entre cuerpos sin fricción, con zona de contacto pequeña comparada con los radios de curvatura y fuerzas de masa despreciables frente a las de contorno, numerosos investigadores han desarrollado nuevas formulaciones con objeto de estudiar analíticamente el problema de contacto relajando alguna de las hipótesis establecidas por Hertz. Sin embargo, la aplicación de dichos estudios a problemas de geometría arbitraria y condiciones de contorno no ideales no resulta factible dada la complejidad matemática que conlleva la resolución analítica. Por ello, el conocimiento y avance en este campo ha estado íntimamente ligado con el desarrollo de métodos numéricos y experimentales.

Ya desde principios de los años 70 son numerosas las publicaciones en las que se aplica el M.E.F. a los problemas de contacto entre sólidos. La aplicación del M.E.C., a estos problemas es más tardía, la primera publicación es debida a Andersson, Fredricksson y Persson [1]. Andersson destaca algunas ventajas de la utilización del M.E.C. frente al M.E.F.: la importancia que supone manejar solamente grados de libertad asociados al contorno, el poder acoplar directamente en el sistema las componentes intrínsecas de la tensión en la zona de contacto y el hecho de manejar directamente las tensiones como incógnitas. En [3] Garrido implementa un algoritmo incremental para el estudio del problema de contacto con y sin fricción entre 2 cuerpos usando elementos discontinuos.

Hasta ahora todos los trabajos en los que se usaba el M.E.C. utilizaban discretizaciones idénticas en las zonas de contacto para ambos cuerpos. En este artículo se presenta un algoritmo que permite que las discretizaciones de estas zonas no sean idénticas en ambos cuerpos, lo cual tiene como ventaja fundamental el poder disminuir el tamaño del

sistema de ecuaciones cuando se presentan singularidades, además su uso es obligado cuando se estudian problemas con grandes desplazamientos, adicionalmente, el uso de discretizaciones no conformes facilita la entrada de datos dado que no es necesario conocer a priori que pares de puntos van a contactar.

### 2.- DEFINICION DEL PROBLEMA

En la figura 1 se representa un problema general de contacto entre dos dominios,  $D^A$  y  $D^B$ , con sus contornos respectivos,  $\partial D^A$  y  $\partial D^B$ , sometidos a unas acciones externas  $t_j^K$  y unos desplazamientos prescritos  $u_j^K$  ( $K=A$  ó  $B$ ).

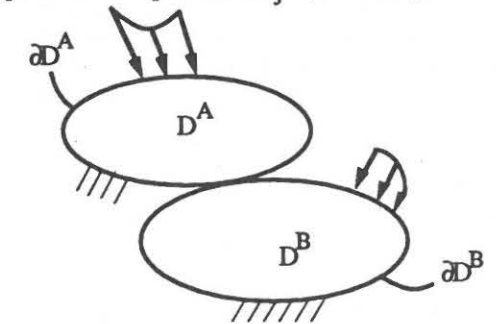


figura 1. Definición del problema.

A estas solicitaciones los cuerpos responden deformándose hasta alcanzar un estado de equilibrio del que admitiremos que mantiene a los cuerpos en la zona de comportamiento elástico siendo además las deformaciones pequeñas. A este estado final le corresponderá una zona común de contacto,  $\partial D_C$ , por donde se transmitirán las acciones de un cuerpo a otro. Los contornos de ambos cuerpos pueden dividirse en dos zonas, la zona que está en contacto,  $\partial D_C^K$ , y la zona que no lo está,  $\partial D_L^K$ , a la que llamaremos libre:  $\partial D^K = \partial D_C^K + \partial D_L^K$  con  $K = A$  ó  $B$ . En general esta partición no se puede realizar a

priori a no ser en casos evidentes y será uno de los resultados a obtener.

### 3.- FORMULACION DEL PROBLEMA

Para la formulación del problema elástico mediante ecuaciones integrales de contorno se emplea la fórmula de Somigliana, que para un dominio D con un contorno  $\partial D$  tiene la expresión:

$$C_{ij}(x)u_j(x) + \int_{\partial D} T_{ij}(x,y)u_j(y)ds(y) = \int_{\partial D} U_{ij}(x,y)t_j(y)ds(y) \quad (1)$$

donde:

- $x, y \in \partial D$
- $u_j(y), t_j(y)$  desplazamientos y tensiones
- $U_{ij}(x,y), T_{ij}(x,y)$  la solución de Kelvin
- $C_{ij}(x)$  el término libre

Junto con las condiciones de contorno siguientes:

En la zona libre las condiciones pueden ser en tensiones, en desplazamientos o mixtas  
En la zona de contacto para el caso sin fricción:

$$\begin{aligned} u_1^A(p) + u_1^B(p) &= 0 \\ t_2^A(p) = t_2^B(p) &= 0 \\ t_1^A(p) - t_1^B(p) &= 0 \\ t_1^A(p), t_1^B(p) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde p representa un par en contacto, 1 es la dirección normal y 2 es la dirección tangencial al contorno del cuerpo en el punto p. Con las condiciones (2), aplicadas a todos los pares de puntos de la zona en contacto se impediría que se produzcan interferencias geométricas entre los dos cuerpos, a la vez que se asegura el equilibrio puntual de las tensiones y se cumple la condición de que no hay fricción.

### 4.- APLICACION DEL M.E.C.

En el M.E.C. se realiza una aproximación de las tensiones y los desplazamientos que aparecen en (1) en la forma:

$$u = N_i a_i \quad y \quad t = N_i b_i \quad (3)$$

donde  $a_i$  y  $b_i$  representan los desplazamientos y tensiones en puntos del contorno que se toman como referencia. Aplicando la ecuación (1) a cada uno de los cuerpos para una discretización dada:

$$\sum_{k=1}^{NE^K} \left[ \int_{\partial D_k} T_{ij}^*(x,y)u_j(y)ds_k - \int_{\partial D_k} U_{ij}(x,y)t_j(y)ds_k \right] = 0 \quad (4)$$

donde  $NE^K$  es el número de elementos empleados para discretizar el contorno del cuerpo K. Utilizando la aproximación (3) resulta un sistema lineal de ecuaciones, donde las incógnitas son desplazamientos y tensiones en los nodos.

$$H \cdot u = G \cdot t \quad (8)$$

Si las discretizaciones son idénticas los contactos se realizan entre pares de nodos y la aplicación de las condiciones (2) es inmediata ya que los desplazamientos y tensiones que allí aparecen son incógnitas del sistema de ecuaciones. Si por el contrario las discretizaciones no son idénticas, en general, un nodo de uno de los cuerpos no va a contactar con otro nodo del otro cuerpo, sino que lo hará en una zona intermedia de un elemento. Se podría pensar que bastaría expresar los desplazamientos y tensiones de este punto intermedio en función de los de los nodos utilizando (3), pero lo mismo que se hace con cada nodo de un cuerpo respecto de elementos del otro hay que hacerlo con los nodos de este último respecto de los elementos del primero, resultando que al final tendríamos más ecuaciones que incógnitas.

Para explicar con más claridad el algoritmo vamos a separar en las condiciones (2), por un lado la condición en desplazamientos y por otro las condiciones en tensiones. La idea básica del procedimiento que se presenta está en imponer la condición de desplazamientos sólo a los pares de contacto que forman los nodos de uno de los cuerpos, al que vamos a denominar A, se impide de este modo que los nodos de A penetren al cuerpo B, pero se permite lo contrario. Los desplazamientos de los nodos de A se relacionan con los de los nodos de B del elemento con el que establece el contacto.

Respecto a las tensiones, si para cada cuerpo se emplea la aproximación clásica de las variables, es decir según los valores de sus nodos, es evidente que no pueden conseguirse distribuciones idénticas en las zonas de contacto de ambos cuerpos, para ello basta pensar, por ejemplo, en el caso en que un elemento de uno de los cuerpos contacte con varios elementos del otro cuerpo, como se muestra en la figura 2.

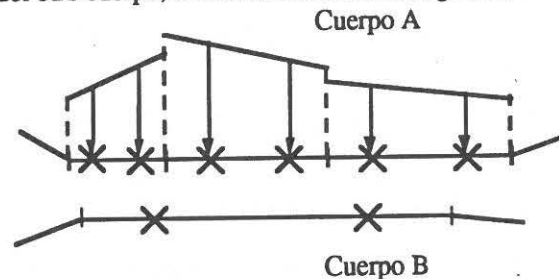


figura 2. Distribución de tensiones

La solución a este problema está en suponer sobre los elementos de B la misma distribución de tensiones que hay sobre el cuerpo A, luego las tensiones de los nodos del cuerpo B desaparecen del problema.

### 5.- PROCESO DE RESOLUCION

Cuando una vez aplicado un incremento de carga aparecen penetraciones de nodos del cuerpo A en el cuerpo B, dado que no les está permitido, se ha de repetir el incremento obligando a que una vez

aplicado este, el nodo esté sobre el elemento de B. Se presenta así el problema de decidir con que punto del elemento de B se va a realizar el contacto del nodo de A; se elige el punto q calculado como indica la figura 3.

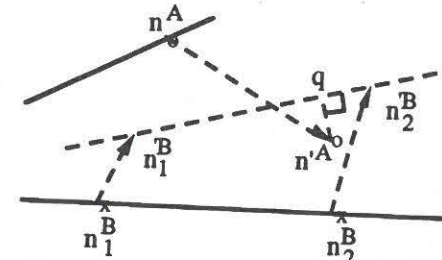


figura 3. Cálculo del punto de contacto

Si aparecen tracciones en la zona de contacto, se ha de repetir el incremento dejando libres a los nodos asociados a dichas tracciones.

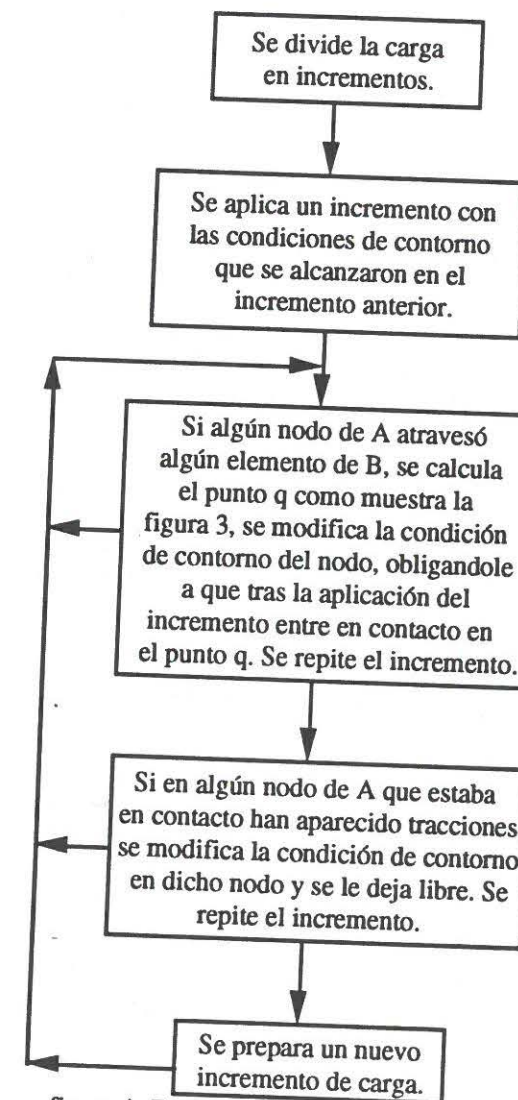


figura 4: Esquema del algoritmo.

### 6. RESULTADOS

Se presenta el problema de compresión de un dominio elástico rectangular sobre una cimentación

también elástica, problema que se representa en la figura 4.

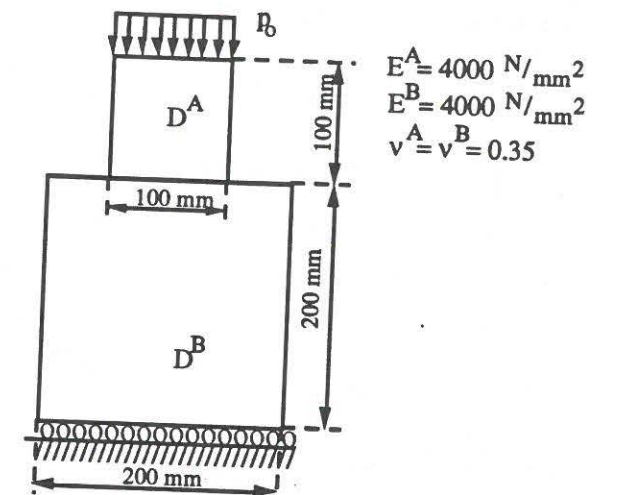


figura 4. Punzón rectangular

Es este un problema en el que la zona de contacto es conocida a priori. Para discretizar la zona de contacto se han utilizado 3 discretizaciones distintas combinándolas, en la primera se utilizan 13 elementos, agrupando la mayor parte en la esquina, en la segunda se emplean tan sólo 6 elementos, y finalmente en la última se emplean 14.

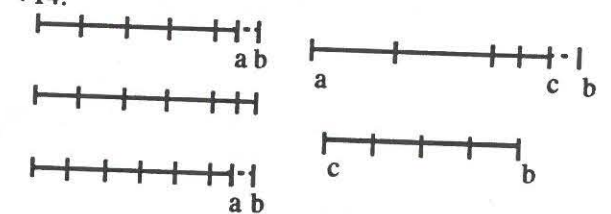


figura 5. Las discretizaciones

Utilizando la primera discretización en ambos cuerpos se obtienen los resultados de la figura 6, en la que se representan las tensiones normales normalizadas, es decir  $t_1/p_0$ , donde se puede apreciar que cuando las discretizaciones son conformes el resultados es el mismo que el que obtiene Garrido [2].

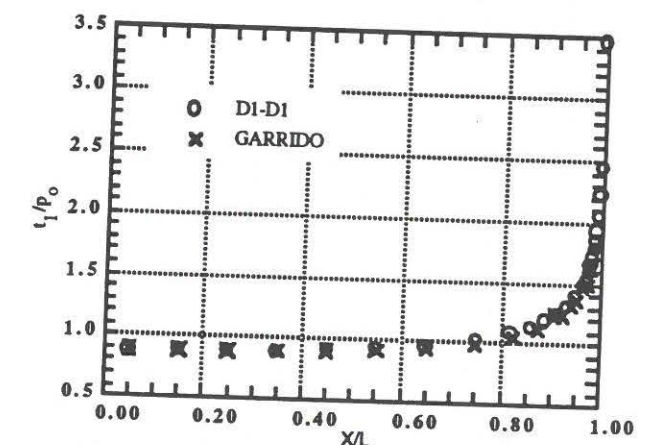


figura 6: Discretizaciones idénticas, D1-D1.

Si empleamos para el punzón la primera de las discretizaciones y en la cimentación la segunda se obtiene los resultados de la figura 7.

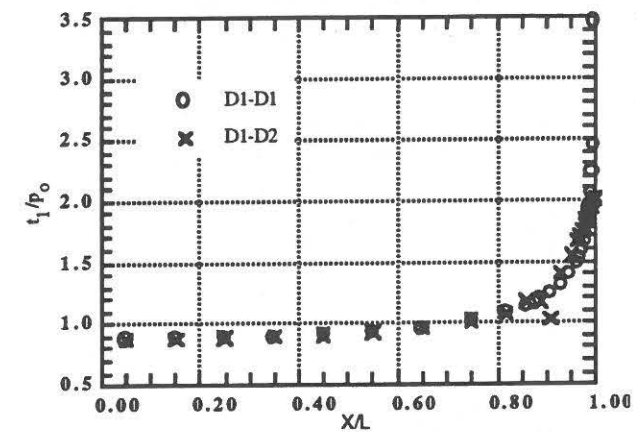


figura 7:D1 y D2.

Finalmente si en el punzón se emplea la tercera discretización y en la cimentación la segunda se obtiene la figura 8.

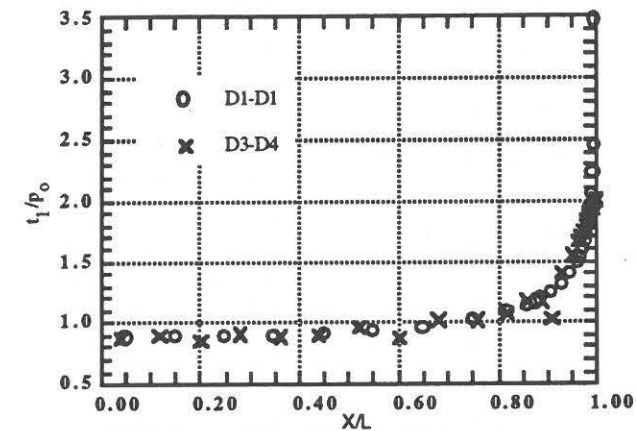


figura 8:D3 y D2

Se observa que cuando las discretizaciones son no conformes se producen algunas oscilaciones en la distribución de tensiones, que están asociadas al hecho de obligar a la discretización del punzón (el cuerpo que se ha tomado como A) a seguir los movimientos de la cimentación (el cuerpo B). Es de observar que cuando en la cimentación se emplea la segunda de las discretizaciones, hay elementos del punzón que son tan sólo el 5% del elemento de B con el que establecen el contacto, y las desviaciones respecto del valor obtenido con discretizaciones conformes es del orden del 10%.

#### 7.- REFERENCIAS.

1. Andersson, T.; Allan Persson, B. G.: "The Boundary Element Method applied to two-dimensional Contact Problems". Progress in Boundary Element Method. Ed. by C. A. Brebbia. Vol. 2 Pentech Press (1983).

2. Garrido, J. A.: "El Problema de Contacto en Elasticidad Mediante Ecuaciones Integrales". Tesis Doctoral, Las Palmas de Gran Canarias (1986).
3. París, F; Garrido, J.A.: "On the Use of Discontinuous Elements in Two-Dimensional Contact Problems". Boundary Element VII, Springer-Verlag (1985)
4. Hertz, H.: Miscellaneous Papers on the Contact of Elastic Solids. Translation by Jones, D.e. McMillan. London (1896).
5. Kalker, J. J.: "Variational Principles of Contact Elastostatics". J. Inst. Maths. Applies, 20, 199 - 219. (1977).