

## CARACTERIZACIÓN DEL INICIO Y CRECIMIENTO DE GRIETAS DE INTERFAZ ENTRE FIBRA Y MATRIZ BAJO CARGAS TRANSVERSALES BIAXIALES USANDO EL MODELO DE INTERFAZ ELÁSTICA LINEAL-FRÁGIL

L. Távora, V. Mantič, E. Graciani, A. Blázquez, F. París

Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales,  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla,  
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España.

E-mail: ltavara@esi.us.es, mantic@esi.us.es, graciani@esi.us.es, abg@esi.us.es, paris@esi.us.es

### RESUMEN

En el presente trabajo se estudia el inicio y crecimiento de una grieta de interfaz entre fibra y matriz bajo cargas transversales biaxiales de tracción - tracción y tracción - compresión. Se considera un problema simplificado en relación a una lámina unidireccional real, con una fibra inmersa en una matriz cuyas dimensiones externas son mucho más grandes que el radio de la fibra. El objetivo es predecir por un lado las cargas de fallo (cargas críticas) que originan el despegue en la interfaz para distintas combinaciones de cargas biaxiales, y por otro lado los ángulos de crecimiento inestable del despegue correspondientes a estas cargas críticas. Para la resolución de este problema se aplica un modelo de interfaz débil que permite el crecimiento de una grieta en un modo mixto de fractura. En este modelo se considera una (posiblemente ficticia) interfase, una capa fina de material entre dos materiales adyacentes, representada mediante una distribución continua de muelles, de rigidez adecuada. La rotura de estos muelles que trabajan con tensiones normales y tangenciales está controlada por una ley de comportamiento elástica lineal - frágil que se propone en este trabajo.

### ABSTRACT

In the present numerical study the crack onset and propagation along fibre-matrix interface under transverse loads (tension-tension or tension-compression) is characterized. A simplified problem of a unidirectional lamina is considered, with a fibre embedded in a large matrix with dimensions much larger than the fibre radius. The aim is to predict the failure loads (critical loads) originating a debond at the interface for different biaxial combinations and also the debond angle of unstable growth corresponding to these critical loads. The weak interface model used allows a crack growth in a fracture mixed mode. In this model it is assumed that an interphase (possibly fictitious), a thin layer between two adjacent materials, exists. This interphase is represented by a continuum distribution of springs with adequate stiffness. The failure of these springs, that support normal and tangential stresses, is controlled by a linear elastic-brittle constitutive law.

**PALABRAS CLAVE:** Materiales compuestos, Fallo de la matriz, Fractura en modo mixto, Grietas de interfaz

### 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los mecanismos de rotura más comunes en láminas unidireccionales de materiales compuestos, ante la aplicación de cargas en la dirección perpendicular a las fibras, es el denominado fallo de la matriz o fallo entre fibras. Este mecanismo se caracteriza por la aparición de despegues en las interfaces entre las fibras y la matriz cuando está dominado por cargas de tracción. La conexión entre los despegues iniciales en las interfaces y la macro grieta final pasa por el crecimiento de estos despegues, convertidos en grietas de interfaz, a lo largo de las propias interfaces, su desvío posterior para internarse en la matriz, y la coalescencia final de las grietas provenientes de distintas interfaces [1, 2, 3].

El problema de una inclusión circular (2D) o cilíndrica (3D) inmersa en una matriz elástica con un despegue parcial en su interfaz (modelado como grieta de interfaz) sometida a una carga uniaxial en el infinito ha sido estudiada profundamente en el pasado, una revisión de los trabajos más importantes se puede encontrar en [3]. Para

el estudio de este problema se usaron diferentes modelos basados en la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) [4], así como Modelos Cohesivos de Fractura (MCF) [5], más recientemente también se ha usado el modelo basado en la Mecánica de la Fractura Finita [6] y el Modelo de interfaz elástica lineal-frágil (también conocido como interfaz débil) desarrollado por los autores de este trabajo. En el presente trabajo se extiende el modelo de interfaz elástica lineal-frágil desarrollado en [3]. Así, el nuevo modelo se rige por una ley de comportamiento que tiene en cuenta la variación de la energía de fractura con la mixticidad del modo de fractura, permitiendo incluso la iniciación y crecimiento de grietas en modo II puro.

### 2. INTERFAZ DÉBIL. UN MODELO ELÁSTICO LINEAL - FRÁGIL

El modelo de interfaz débil se caracteriza por simular el comportamiento de juntas adhesivas o de interfaces entre dos materiales por medio de una distribución continua de muelles de rigidez adecuada [7, 8]. Se ha probado que el

comportamiento de la interfaz fibra-matriz en un material compuesto puede describirse razonablemente por medio del modelo de interfaz débil [2, 9].

2.1. Ley de comportamiento de la distribución de muelles

El modelo de interfaz débil es considerado un modelo simple y útil de una fina capa lineal elástica entre dos superficies. La capa sin daño (considerada como un sólido lineal elástico con el módulo de Young  $E_\ell$ , el coeficiente de Poisson  $\nu_\ell$ , el módulo tangencial  $\mu_\ell$ , la constante de Lamé  $\lambda_\ell$ , el ancho  $w$  y un pequeño espesor  $h$ ) se puede modelar como una distribución continua de muelles.

Es útil aclarar las relaciones entre los parámetros de la capa isótropa ( $E_\ell, \nu_\ell, \mu_\ell, \lambda_\ell, h$ ) y los parámetros de la ley de comportamiento de los muelles escrita en términos de una ley de tensión normal vs. desplazamiento relativo normal,  $\sigma = k_n \delta_n$ , y una ley de tensión tangencial vs. desplazamiento relativo tangencial,  $\tau = k_t \delta_t$ .

Teniendo en cuenta que en una capa fina entre dos sólidos se considera que una compresión o tracción en la dirección 1 origina una expansión nula en las direcciones 2 y 3, i.e.,  $u_2 = u_3 = 0$  [2], los valores de  $k_n$  y  $k_t$  se expresan como:

$$k_n = \frac{2\mu_\ell + \lambda_\ell}{h} = \frac{E'_\ell}{h(1 - \nu_\ell^2)} = \frac{E_\ell(1 - \nu_\ell)}{h(1 + \nu_\ell)(1 - 2\nu_\ell)}, \quad (1)$$

$$k_t = \frac{\mu_\ell}{h}. \quad (2)$$

donde  $E'_\ell = E_\ell/(1 - \nu_\ell^2)$  and  $\nu'_\ell = \nu_\ell/(1 - \nu_\ell)$ .

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la relación  $k_t/k_n$ :

$$\frac{k_t}{k_n} = \frac{\mu_\ell}{2\mu_\ell + \lambda_\ell} = \frac{1 - \nu'_\ell}{2} = \frac{1 - 2\nu_\ell}{2(1 - \nu_\ell)} \quad (3)$$

donde  $0 \leq k_t/k_n < 0.5$ .

Es importante mencionar que si consideramos una capa muy fina con espesor tendiente a cero,  $h \rightarrow 0$ , un valor constante de  $k_n$  implica, ver (1) y (2), valores del módulo de Young que tienden a cero,  $E_\ell \rightarrow 0$ , mientras que valores constantes de  $E_\ell$  implican valores crecientes de  $k_n$ ,  $k_n \rightarrow \infty$ . Si se considera que la capa es ortótropa, la relación  $k_t/k_n$  no tendrá las restricciones anteriormente mencionadas.

2.2. Criterio de fallo de la interfaz

El modelo de interfaz débil implica la ausencia de singularidades en tensiones en el vértice de la grieta. El daño y/o rotura de una porción de esta capa es modelada como un disminución abrupta (desaparición) de tensiones de tracción y tangenciales en esa porción de la capa, lo que conlleva a una separación/deslizamiento entre ambas

superficies cuando un punto alcanza el limite de rotura (en el plano  $(\sigma, \tau)$ ). Los límites de las tensiones normales y tangenciales ( $\sigma_c$  and  $\tau_c$ ) dependen de la mixticidad del modo de fractura que en el presente trabajo se caracteriza por el ángulo  $\psi_G$  (basado en la energía de deformación) definido en [2, 3].

La distribución continua de muelles que modela la interfaz es gobernada por una ley elástica lineal-frágil, escrita para un punto  $x$  de la interfaz, mostrado también en la Figura 1:

$$\begin{aligned} \text{Interfaz lin.-elast.} & \begin{cases} \sigma(x) = k_n \delta_n(x) & \delta_n(x) \leq \delta_{nc}(\psi_G(x)) \text{ y} \\ \tau(x) = k_t \delta_t(x) & |\delta_t(x)| \leq \delta_{tc}(\psi_G(x)) \end{cases} \\ \text{Interfaz rota} & \begin{cases} \sigma(x) = \begin{cases} 0 & \delta_n(x) > 0 \\ k_n \delta_n(x) & \delta_n(x) \leq 0 \end{cases} \\ \tau(x) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\sigma(x)$  y  $\tau(x)$  son, respectivamente, las tensiones normales y tangenciales en la capa elástica,  $\delta_n(x)$  y  $\delta_t(x)$  son, respectivamente, los desplazamientos relativos normales y tangenciales entre puntos opuestos de la interfaz.  $\delta_n(x)$  y  $\delta_t(x)$  también son considerados como los valores de la apertura y el deslizamientos entre las superficies de la interfaz.  $k_n$  y  $k_t$  son las rigideces normales y tangenciales de la distribución de muelles.

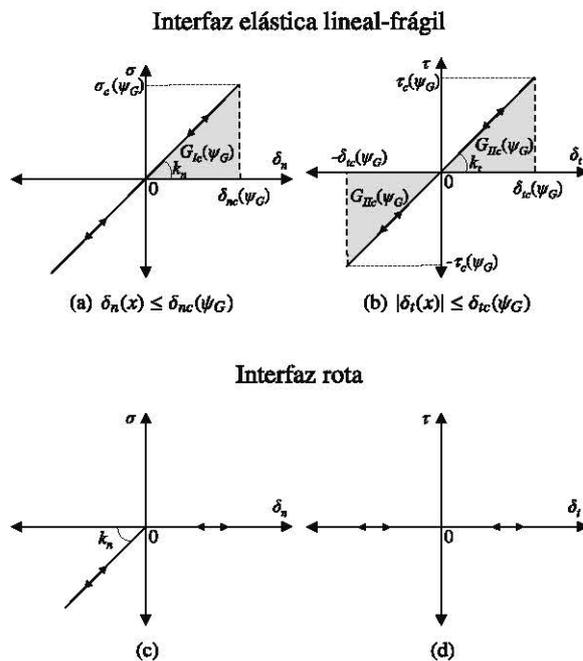


Figura 1: Ley elástica lineal-frágil en la interfaz sin daño (a) normal y (b) tangencial; y ley elástica lineal-frágil en la interfaz rota (c) normal y (d) tangencial.

Es importante notar que los valores críticos  $\sigma_c(\psi_G)$ ,  $\delta_{nc}(\psi_G)$ ,  $\tau_c(\psi_G)$  y  $\delta_{tc}(\psi_G)$  son funciones del ángulo que define la mixticidad del modo de fractura  $\psi_G$  en un punto de la interfaz. Por ello, es posible obtener diferentes valores de estas variables críticas en diferentes puntos de la

interfaz. Se puede definir además que el “muelle” en un punto se rompe cuando  $\delta_n$  ó  $\delta_t$  alcancen su valor crítico,  $\delta_{nc}(\psi_G)$  ó  $\delta_{tc}(\psi_G)$ . En ese momento la rigidez tangencial se vuelve cero en ese punto y como consecuencia de ello  $\tau(\psi_G(x))$  también se hace cero.

Sobre la ley elástica lineal-frágil normal cuando una porción de interfaz se ha roto, el desplazamiento normal negativo,  $\delta_n < 0$ , es restringido por medio de una condición de contacto elástico sin fricción, ver ecuación (4) y Figura 1(c). El uso de la condición de contacto elástico sin fricción esta basado en la idea de que una vez que la interfase asumida se rompe, porciones de esta capa permanecen en las superficies de los sólidos adyacentes. Así, cuando estas superficies entran en contacto, parece razonable que estas porciones puedan comprimirse con la misma rigidez que tenían en dirección normal antes de romper.

El criterio de fallo de la interfaz está basado en el concepto de energía unitaria liberada. La energía unitaria liberada en el modelo de interfaz elástica lineal-frágil está definido como la energía de deformación almacenada por unidad de longitud en el muelle ubicado en el vértice de la grieta sin romper (segmento infinitesimal de la interfaz situado en el vértice de la grieta) como se demuestra en [8] y recientemente de manera independiente en [10]. Así, la energía de deformación para una grieta en modo mixto en una interface elástica lineal se define como:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{\sigma \delta_n}{2} + \frac{\tau \delta_t}{2}. \quad (5)$$

Los detalles de la deducción del criterio se pueden encontrar en [2, 3], donde finalmente se llega a la expresión general de la tensión crítica normal y desplazamiento crítico normal como funciones del ángulo  $\psi_G$ :

$$\sigma_c(\psi_G) = \bar{\sigma}_c \sqrt{1 + \tan^2[(1 - \lambda)\psi_G]}. \cos \psi_G, \quad (6)$$

$$\delta_{nc}(\psi_G) = \frac{\sigma_c(\psi_G)}{k_n}. \quad (7)$$

donde  $\tan^2 \psi_G = G_{II}/G_I$ ,  $\lambda$  es un parámetro de sensibilidad del modo de fractura (un rango típico de  $0.2 \leq \lambda \leq 0.3$  caracteriza una interfaz que depende de manera moderada del modo fractura).  $\bar{\sigma}_c$  es la tensión crítica normal alcanzada cuando el muelle rompe en modo I. Es decir,  $\bar{\sigma}_c = \sigma_c(0^\circ)$ .

De manera similar a (6) y (7), la tensión crítica tangencial y el desplazamiento crítico tangencial se puede expresar en términos de  $\psi_G$ , como:

$$\tau_c(\psi_G) = \sqrt{\frac{k_t}{k_n}} \bar{\sigma}_c \sqrt{1 + \tan^2[(1 - \lambda)\psi_G]}. \sin \psi_G \quad (8)$$

$$\delta_{tc}(\psi_G) = \frac{\tau_c(\psi_G)}{k_t}. \quad (9)$$

El gráfico del límite de fallo de la interfaz parametrizado por las ecuaciones (6) y (8) se muestra en la Figura 2, para

un valor de  $k_t/k_n = 4$ . Las tensiones críticas normales y tangenciales en modo mixto han sido normalizadas con el valor de la tensión normal crítica en modo I,  $\bar{\sigma}_c$ . En

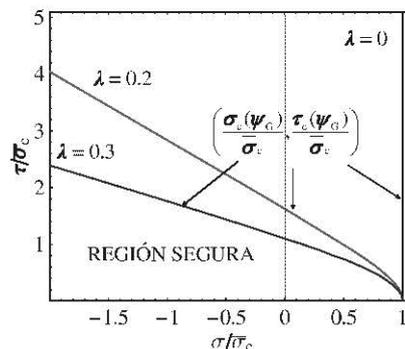


Figura 2: Curvas de fallo de la interfaz en el plano  $(\sigma, \tau)$  para diferentes valores de  $\lambda$  con  $k_n/k_t = 4$ .

la Figura 2 se puede observar como el criterio es capaz de predecir la iniciación de grietas, incluso si aparecen compresiones en el vértice de la grieta (grieta cerrada).

### 3. INCLUSIÓN CILÍNDRICA SOMETIDA A CARGAS BIAxiaLES

#### 3.1. Configuración del problema

El problema de una inclusión cilíndrica (representando una fibra) dentro de una matriz elástica bajo cargas de tensión en el infinito, con o sin despegue parcial a lo largo de su interfaz ha sido estudiada por muchos investigadores, ver referencias en [1, 3, 4, 6].

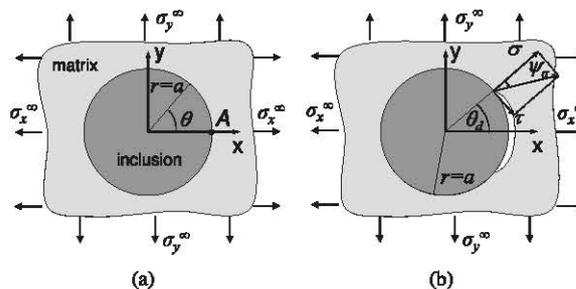


Figura 3: Configuración del problema de inclusión bajo cargas transversales biaxiales (a) sin y (b) con un despegue parcial.

En este trabajo se considera una inclusión cilíndrica infinitamente larga, con una sección circular de radio  $a$ , dentro de una matriz infinita, Figura 3. La matriz y la inclusión son considerados materiales isotropos lineales.  $(x, y, z)$  y  $(r, \theta, z)$  son las coordenadas cartesianas y cilíndricas, siendo el eje  $z$  el eje longitudinal de la inclusión, y los ejes  $x$  e  $y$  paralelos a las direcciones donde se aplica la carga. En el presente estudio se consideran las siguientes cargas biaxiales  $\sigma_x^\infty \geq 0$  y  $\sigma_y^\infty = \eta \sigma_x^\infty$ , donde  $\eta \leq 1$ . El semiángulo de despegue se denomina como  $\theta_d$ . Además, se supone un estado de deformación plana en el sistema.

### 3.2. Solución analítica para la interfaz sin daño

Gao [9] desarrolló una solución general para problemas con una inclusión circular que incluye una capa lineal elástica bajo una carga aplicada en el infinito. Los materiales se consideran isótropos con  $\mu_i$ ,  $\kappa_i$ ,  $\mu_m$ , y  $\kappa_m$  como las propiedades de la inclusión ( $i$ ) y la matriz ( $m$ ) respectivamente. Además,  $\mu$  el módulo tangencial,  $\mu = E/2(1 + \nu)$ , y  $\kappa = 3 - 4\nu$  para la deformación plana, donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson. Tomando como base la función de Airy presentada en [9] se obtienen las siguientes expresiones para una carga  $\sigma_x^\infty$  en el infinito ( $\eta = 0$ ).

$$\sigma(x = a, \theta) = \frac{\sigma_x^\infty k_n a (1 + \kappa_m) [A + BC \cos(2\theta)]}{2AC}, \quad (10)$$

$$\tau(x = a, \theta) = -\frac{\sigma_x^\infty k_t a (1 + \kappa_m) [D \sin(2\theta)]}{2A}, \quad (11)$$

donde

$$A = 12\mu_m^2 + a^2 k_n k_t (\kappa_m + t)(1 + \kappa_i t) + a\mu_m (k_n + k_t)(1 + 3\kappa_m + (3 + \kappa_i)t), \quad (12)$$

$$B = 6\mu_m + a k_t (1 + \kappa_i t), \quad (13)$$

$$C = 4\mu_m + a k_n (2 + (\kappa_i - 1)t), \quad (14)$$

$$D = 6\mu_m + a k_n (1 + \kappa_i t), \quad (15)$$

con  $t = \mu_m/\mu_i$ .

## 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Es importante mencionar que aunque el problema es simétrico (geometría y cargas) la iniciación y crecimiento de la grieta de interfaz es no-simétrica, como se puede observar en evidencias experimentales, ver [4]. Así, aunque algunos autores hagan uso de la simetría para estudiar este problema, en el presente trabajo se modela toda la inclusión para ver la capacidad del modelo de representar el comportamiento no-simétrico.

### 4.1. Modelo del Método de los Elementos de Contorno (MEC)

Para este estudio se ha escogido un sistema bi-material típico entre los materiales compuestos reforzados con fibra: fibra de vidrio y matriz epoxi,  $E_m = 2.79$  GPa,  $\nu_m = 0.33$ ,  $E_f = 70.8$  GPa y  $\nu_f = 0.22$  son las propiedades elásticas de la matriz y la fibra respectivamente.

Los valores de los parámetros bi-material de Dundurs obtenidos son,  $\alpha = 0.919$  y  $\beta = 0.229$ , y el valor del módulo de elasticidad efectivo (media armónica) en deformación plana,  $E^* = 6.01$  GPa, definido en [1, 6, 11]. Los valores críticos de la interfaz fibra-matriz en modo I usados en el presente trabajo son: tenacidad a la fractura,  $G_{Ic} = 2$  Jm<sup>-2</sup>, y el valor de la tensión crítica  $\bar{\sigma}_c = 90$  MPa/ $\mu$ m. También se define, una longitud característica del bi-material

$$a_0 = \frac{G_{Ic} E^*}{\bar{\sigma}_c^2} = 1.48 \mu\text{m}, \quad (16)$$

y un parámetro estructural adimensional que caracteriza la fragilidad de la interfaz,

$$\gamma = \frac{1}{\bar{\sigma}_c} \sqrt{\frac{G_{Ic} E^*}{a}} = \sqrt{\frac{a_0}{a}} = 0.44, \quad (17)$$

definido en [6]. El valor de  $k_n = 2025$  MPa/ $\mu$ m es obtenido mediante la fórmula  $k_n = \bar{\sigma}_c^2/(2G_{Ic})$ . Finalmente se escoge una relación constante entre  $k_n$  y  $k_t$  ( $k_t = k_n/4$ ). Este valor es obtenido asumiendo la presencia de un material ficticio, una capa muy fina presente entre la fibra y la matriz, modelada por el modelo de interfaz débil cuyo coeficiente de Poisson es  $\nu_\ell = 0.33$  (similar al de la matriz) de acuerdo con (3).

El modelo MEC representa una inclusión cilíndrica con un radio  $a = 7.5$   $\mu$ m dentro de una matriz cuadrada relativamente grande con lados iguales a 1 mm. Se usaron 1472 elementos de contorno lineales: 32 elementos para el contorno externo de la matriz y dos mallas uniformes de 720 elementos para modelar la interfaz fibra-matriz (es decir, el ángulo polar de cada elemento es 0.5°).

### 4.2. Efecto de $\eta$

En este estudio se toma un valor del parámetro de sensibilidad  $\lambda = 0.3$ . En la Figura 4 se presentan los resultados para diferentes valores de  $\eta$ ,  $\eta = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ , que caracteriza diferentes cargas biaxiales.

En la parte (a) de la Figura 4 se presenta la carga remota aplicada en el eje  $x$ ,  $\sigma_x^\infty$ , como función del desplazamiento normal relativo (apertura),  $\delta_n$ , evaluado en el punto  $A(a, 0)$  definido en la Figura 3(a). El valor de la tensión (mínima) que es necesaria para causar el inicio de la grieta (en otras palabras, la tensión necesaria para romper el primer punto, el primer muelle, en el modelo discreto de interfaz) es llamado tensión crítica,  $\sigma_{cx}^\infty$ , y corresponde al máximo local de las funciones presentadas en la figura mencionada. También se puede observar en estas figuras que luego de alcanzar esta tensión crítica,  $\sigma_{cx}^\infty$ , el crecimiento de la grieta se torna inestable, requiriendo valores menores de carga aplicada para que crezca la grieta. Este fenómeno de inestabilidad presente en todos los casos es llamado "snap-through".

En la parte (b) de la Figura 4 se presenta la tensión (mínima) aplicada en el eje  $x$ ,  $\sigma_x^\infty$ , necesaria para causar el crecimiento de la grieta versus el semiángulo de despegue  $\theta_d$  (definido en la Figura 3(b)). Cabe destacar que de esta figura es posible tener una estimación del valor,  $\theta_c$ , alcanzado por el semiángulo de despegue  $\theta_d$  una vez terminado el crecimiento inestable de la grieta, y también de la carga  $\sigma_{cx}^\infty$ , que produce el crecimiento. Son destacables los casos en que se aplican tracciones en ambos ejes, obteniéndose semiángulos de despegues mayores a 90° lo que implica que el despegue de la fibra es casi completo.

Respecto a la influencia del coeficiente de biaxialidad  $\eta$ , es

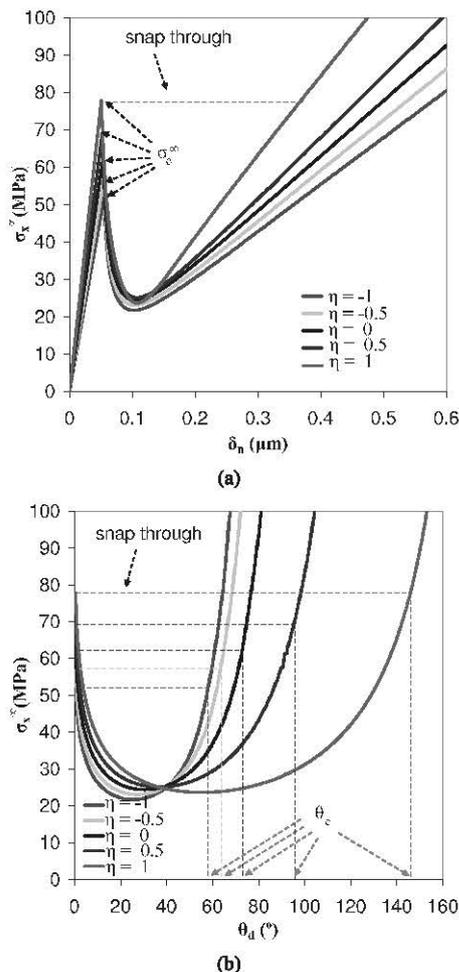


Figura 4: Resultados numéricos obtenidos por el MEC (a) tensión aplicada en el eje  $x$  en función de los desplazamientos relativos  $\delta_n$  en el punto A, ver Figura 3, y (b) tensión aplicada en el eje  $x$  versus el semiángulo de despegue  $\theta_d$  para diferentes casos de cargas biaxiales.

interesante observar que al aplicar una carga de compresión mayor en el eje  $y$  y manteniendo constante la carga de tracción en el eje  $x$  ( $\eta$  tiende a valores negativos mayores), el valor de la tensión crítica  $\sigma_{cx}^{\infty}$  disminuye. Es decir que las compresiones en el eje  $y$  favorecen la iniciación de la grieta con cargas menores, además de disminuir el semiángulo crítico  $\theta_c$ , ver Tabla 1.

Por otro lado al aplicar una carga de tracción mayor en el eje  $y$  y manteniendo constante la carga de tracción en el eje  $x$  ( $\eta$  tiende a valores positivos mayores), el valor de la tensión crítica  $\sigma_{cx}^{\infty}$  aumenta. En otras palabras la presencia de tracciones en el eje  $y$  hace necesario el uso de cargas más grandes para la iniciación de la grieta, además de aumentar el semiángulo crítico  $\theta_c$ , ver Tabla 1.

4.3. Efecto del tamaño del radio de la inclusión

Haciendo uso de la solución analítica obtenida, ecuaciones (10) y (11), y aplicando el criterio de fallo del modelo

Tabla 1: Cargas que producen la iniciación de la grieta en el eje  $x$ ,  $\sigma_{cx}^{\infty}$  y semiángulo crítico,  $\theta_c$ , para diferentes valores de  $\eta$ .

$\eta$	-1	-0.5	0	0.5	1
$\sigma_{cx}^{\infty}$ (MPa)	51.9	56.6	62.3	69.2	77.8
$\sigma_{cx}^{\infty}/\bar{\sigma}_c$	0.573	0.629	0.692	0.769	0.864
$\theta_c$ (°)	58.25	63.25	72.75	95.25	146.0

de interfaz elástica lineal-frágil es posible obtener una solución analítica de este problema [3].

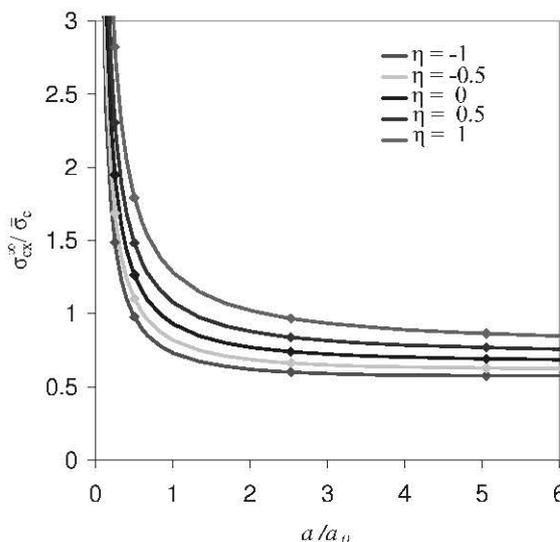


Figura 5: Comparación de los resultados obtenidos por el MEC y la solución analítica. Efecto del tamaño de la inclusión sobre la tensión que produce la iniciación de la grieta,  $\sigma_{cx}^{\infty}$ , como función de  $a/a_0$ .

En la Figura 5 se puede observar la dependencia de la carga crítica en el eje  $x$ ,  $\sigma_{cx}^{\infty}$ , con respecto al tamaño de la inclusión. En este gráfico los valores de  $\sigma_{cx}^{\infty}$  han sido normalizados con el valor de la tensión normal crítica de la interfaz en modo I,  $\bar{\sigma}_c$ , y los valores del radio de la inclusión han sido normalizados con el parámetro  $a_0$ .

Cada uno de los puntos presentes en la Figura 5 representan soluciones obtenidas por el MEC, mientras que las líneas continuas fueron obtenidas con la solución analítica.

4.4. Curva de fallo

Con los desarrollos y resultados obtenidos es posible representar una curva de fallo para una inclusión circular sometida a cargas biaxiales transversales, ver Fig. 6. Se puede asumir que el area cuasi-triangular definida por las curvas de fallo es una zona segura.

Es destacable notar que para casos con un valor de  $\eta$  dentro del rango  $\sim -4 \leq \eta < 1$ , el punto donde se cumple el

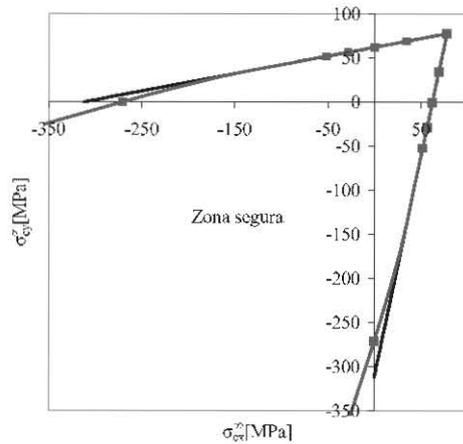


Figura 6: Curva de fallo de una inclusión circular bajo cargas biaxiales transversales.

criterio de fallo, y por ende por donde empieza el fallo de la interfaz, se encuentra en  $\theta = 0$  (punto A de la Figura 3(a)). Sin embargo cuando la compresión se hace mayor el primer punto de fallo aparece en un punto diferente al punto A, haciendo que la curva de fallo se desvíe ligeramente (línea roja en Figura 6). La línea azul presente en la Figura 6 es aquella obtenida asumiendo que el punto inicial de fallo será siempre el punto A.

## 5. CONCLUSIONES

Aunque estrictamente hablando no exista una interfase—una capa de adhesivo—entre la fibra y la matriz, el modelo de interfaz débil ha mostrado que puede ser aplicado para estudiar el comportamiento del sistema fibra-matriz sometido a cargas biaxiales. Se observó que con el criterio de fallo utilizado se pueden obtener resultados bastante aproximados a los que se esperan en la realidad. Los resultados obtenidos son acordes con resultados experimentales biaxiales [12], donde un incremento en las cargas de compresión (como cargas secundarias) conlleva una disminución de la carga de fallo en tracción (dominante). Se ha extendido la aplicación de la solución analítica desarrollada en [3] para obtener resultados en casos de cargas biaxiales. Los resultados obtenidos por el MEC además de darnos las cargas críticas de fallo también nos permiten obtener el tamaño inicial de las grietas producidas por estas cargas críticas. El código MEC ha probado ser una herramienta potente que nos permite modelar el crecimiento de la grieta en todas sus etapas.

Finalmente, se obtuvo la curva de fallo de una inclusión circular bajo cargas transversales biaxiales por medio de la solución analítica y el MEC. Se espera que la curva de fallo de la interfaz obtenida para este problema simplificado dilucide algunos aspectos de la curva de fallo de un material compuesto real sometido a cargas transversales.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el financiamiento de este trabajo por los proyectos TRA2006 - 08077 y MAT2009 - 14022 del Ministerio de Ciencia e Innovación y los proyectos de excelencia TEP - 1207, TEP - 2045 y TEP - 4051 de la Junta de Andalucía.

## REFERENCIAS

- [1] F. París, E. Correa, and V. Mantič. Kinking of transverse interface cracks between fiber and matrix. *Journal of Applied Mechanics*, 74:703–716, 2007.
- [2] L. Távara. *Damage Initiation and propagation in composite materials. Boundary element analysis using weak interface and cohesive zone models*. PhD Thesis. Universidad de Sevilla: Sevilla, 2010.
- [3] L. Távara, V. Mantič, E. Graciani, and F. París. BEM analysis of crack onset and propagation along fiber-matrix interface under transversetension using a linear elastic-brittle interface model. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35:207–222, 2011.
- [4] E. Correa. *Micromechanical study of the “matrix failure” in fiber reinforced composites (in Spanish)*. PhD. Thesis, Universidad de Sevilla, 2008.
- [5] M. Xie and A. Levy. Defect propagation at a circular interface. *International Journal of Fracture*, 144:1–20, 2007.
- [6] V. Mantič. Interface crack onset at a circular cylindrical inclusion under a remote transverse tension. Application of a coupled stress and energy criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 46:1287–1304, 2009.
- [7] F. Erdogan. *Fracture mechanics of interfaces*, In: *Damage and Failure of Interfaces*. Balkema Publishers: Rotterdam, 1997.
- [8] S. Lenci. Analysis of a crack at a weak interface. *International Journal of Fracture*, 108:275–290, 2001.
- [9] Z. Gao. A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby’s tensor and related problems. *Journal of Applied Mechanics*, 62:860–866, 1995.
- [10] A. Carpinteri, P. Cornetti, and N. Pugno. Edge debonding in FRP strengthened beams: Stress versus energy failure criteria. *Engineering Structures*, 31:2436–2447, 2009.
- [11] V. Mantič, A. Blázquez, E. Correa, and F. París. *Analysis of interface cracks with contact in composites by 2D BEM*. In: *Fracture and damage of composites*, M. Guagliano and M. H. Aliabadi (Eds.) WIT Press: Southampton, Boston, 2006.
- [12] F. París, E. Correa, and J. Cañas. Micromechanical view of failure of the matrix in fibrous composite materials. *Composites Science and Technology*, 63:1041–1052, 2003.