Sobre Constructivismo y Lógica Epistémica Dinámica*

Guallart, Nino (Grupo de Lógica, Lenguaje e Información - Universidad de Sevilla)
Ángel Nepomuceno (Grupo de Lógica, Lenguaje e Información - Universidad de Sevilla)

1. Introducción

La lógica epistémica dinámica es una lógica multimodal desarrollada en los últimos 30 años, centrada en los cambios del conocimiento, cuya semántica se suele presentar a partir de marcos de Kripke o, menos frecuentemente, otros similares como los de Beth (Cfr. van Ditmarsch at al., 2008). En este trabajo hacemos una propuesta inicial de interpretación de un sistema de lógica epistémica dinámica desde un punto de vista constructivista, en el que se considerarán anuncios públicos, adoptando un enfoque intuicionista que identificará la verdad de una proposición con su demostrabilidad. En la segunda parte estudiaremos los modelos de este sistema lógico dados por la teoría de categorías, lo cual permitirá estudiar también la relación entre el conocimiento y las pruebas que existen del mismo, entendidas en un sentido algorítmico. De este modo, el presente artículo quiere servir de partida para el estudio de la relación entre conocimiento, anuncios públicos y constructibilidad de pruebas, y se discutirán y analizarán las dificultades que pueden surgir de considerar determinados axiomas en el sistema, en especial aquellos que consideran el operador de anuncio público.

2. Presentación de la lógica epistémica dinámica

Sea P un conjunto de símbolos proposicionales y $p \in P$ una cualquiera de ellos; la sintaxis viene dada en notación BNF de este modo:

$$\varphi ::= \bot \mid p \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid \varphi \to \bot \mid K\varphi \mid [\varphi!]\varphi$$

$\bot \in P$ es una constante proposicional, mientras que la expresión $\varphi \to \bot$ puede abreviarse como $\neg\varphi$; también podemos abreviar $\bot \to \bot$ como $\top$. K es el operador básico epistémico, $K\varphi$ expresa que "se conoce φ". $[\varphi!]\chi$ debe entenderse como "tras el anuncio de φ, χ es el caso". Desde un punto de vista clásico, los operadores duales se definen como $\hat{K}\varphi = \neg K \neg\varphi$ y $\langle\varphi!\rangle\chi = \neg[\varphi!]\neg\chi$, respectivamente.

Un sistema axiomático básico estándar comprende las tautologías clásicas, la distributividad del operador K, el axioma T, la introspección positiva y la negativa, así como los axiomas propios de anuncios públicos (permanencia atómica, anuncios y negación, conjunción y conocimiento, composición de anuncios) y las reglas de modus ponens y necesitación respecto de K (van Ditmarsch et al. 2008).

En su variante constructivista, en el lenguaje no se define el operador dual de K ni el dual de $[\varphi!]$ y la noción de estado (o mundo) posible no coincide exactamente con la que mantiene la perspectiva clásica. En primer lugar, consideraremos estados no predeterminados; para ello se adoptan marcos de Beth, definidos de la siguiente manera: $F = (W, \leq)$, donde $W \neq \varnothing$, $\leq$ es una relación de orden parcial, es decir, $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un modelo viene dado por un marco y una función que asigna variables proposicionales a elementos de X; más concretamente, $M = (F, v)$, donde $F = (W, \leq)$ y v se define con dominio en W y rango en P: $v : W \longrightarrow \wp(P)$; además v verifica que para todo $r, s \in W$, si $r \leq s$, entonces $v(r) \leq v(s)$ (Ramezanian, 2013).

Para la evaluación de los distintos signos lógicos, se tendrá en cuenta que se han asignado variables proposicionales a estados, a diferencia de lo que se hacía en la valoración clásica, en la que se asignaban estados a variables proposicionales. Para un modelo M, y un estado s, la noción de satisfacción $\models \subseteq W \times P$, de manera que

*Este paper ha sido financiado por un contrato predoctoral de personal investigador en formación del V Programa Propio de I+D+i de la Universidad de Sevilla.

1. $M, s \models p$ syss $p \in v(s)$
2. $M, s \not\models \perp$ para todo s
3. $M, s \models \varphi \wedge \chi$ syss $M, s \models \varphi$ y $M, s \models \chi$
4. $M, s \models \varphi \vee \chi$ syss $M, s \models \varphi$ o $M, s \models \chi$
5. $M, s \models \varphi \to \chi$ syss si $M, s \models \varphi$, entonces $M, s \models \chi$
6. $M, s \models \neg\varphi$, de acuerdo con la abreviatura indicada anteriormente, representa $M, s \models \varphi \to \perp$
7. $M, s \models K\varphi$ syss para cada r tal que $s \leq r$, $M, r \models \varphi$
8. $M, s \models [\varphi!]\chi$ syss se verifica que si $M, s \models \varphi$, entonces $M|_{\varphi}, s \models \chi$, teniendo en cuenta que $M|_{\varphi} = (W^*, \leq^*, v^*)$, de manera que
   a) $W^* = \{s \in W : M, s \not\models \neg\varphi\}$[1]
   b) $\leq^* = \leq \cap (W^* \times W^*)$
   c) $v^*(s) = v(s)$, siempre que $s \in W^*$

Nótese que la relación $\leq$, que es reflexiva y transitiva, determina una relación de orden parcial entre las fórmulas bien formadas (fbfs, para abreviar), de modo que estas forman un retículo acotado inferiormente por $\perp$ y superiormente por $\top$[2]. El carácter intuicionista de este sistema viene dado por la necesidad de construir una prueba para afirmar la validez de una fbf; nótese en particular la definición de implicación, que difiere de la clásica y está dada en términos de paso de una prueba a otra. En efecto, la lógica intuicionista tiene un carácter intrínsecamente dinámico en cuanto enfoque constructivista, ya que la satisfacibilidad de una fbf depende de las pruebas que hayamos construido hasta ese momento, dejando la puerta abierta a futuras construcciones. Como lógica monótona, si $M \models \phi$, podemos afirmar que la satisfacibilidad de una fórmula se mantendrá en el futuro una vez que ha sido demostrada, pero si no tenemos un s tal que $M, s \models \phi$ ni que $M, s \models \neg\phi$, no podemos afirmar que en un futuro no tengamos una prueba de alguna de esas dos fbfs. Como sistema axiomático básico de lógica epistémica dinámica con carácter constructivo (Lógica Básica Constructiva de Anuncios Públicos o LBCAP, para abreviar), establecemos el que comprende todas las expresiones válidas desde un punto de vista constructivo, además de los siguientes axiomas:

1. $K(\varphi \to \chi) \to (K\varphi \to K\chi)$ — Distributividad (axioma de normalidad)
2. $K\varphi \to \varphi$ — Esquema T
3. $K\varphi \to KK\varphi$ — Introspección positiva
4. $[\varphi!]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$ — Permanencia atómica
5. $[\varphi!](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\varphi!]\psi \to [\varphi!]\chi)$ — Anuncios y conjunción
6. $[\varphi!]K\chi \leftrightarrow (\varphi \to K[\varphi!]\chi)$ — Anuncios y conocimiento
7. $[\varphi!][\psi!]\chi \leftrightarrow [\varphi \wedge [\varphi!]\psi]\chi$ — Composición de anuncios

Las reglas de inferencia son las de *modus ponens* y necesitación (respecto del operador K). Los esquemas 1, 2 y 3, son válidos en relación a los modelos de Beth, dado el carácter de la relación $\leq$ en los mismos; en cuanto a los esquemas 5, 6 y 7, se comprueban fácilmente con sólo aplicar la evaluación de las conectivas correspondientes y del operador K. Otros axiomas, cuya conveniencia requeriría una discusión más amplia, permiten avanzar en extensiones de LBCAP; entre ellos destacamos los que expresan introspección negativa $\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$, así como anuncios y negación: $[\varphi!]\neg\chi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[\varphi!]\chi)$, no serán discutidos aquí por merecer una consideración más amplia.

[1] Nótese que esto indica que, tras el anuncio de φ, tenemos una prueba de χ, lo cual no requiere tener ya dada una prueba de φ, aunque sí carecer de pruebas de $\neg\varphi$ al estar en un sistema consistente. Una definición $W^* = \{s \in W : M, s \models \varphi\}$ es una alternativa más restrictiva, pero se preferirá aquí la primera.

[2] Hay que notar que la interpretación dada por modelos de Beth es fácilmente convertible en un modelo topológico (van Dalen, 2001).

3. Modelo categorial de la LBCAP

La teoría de categorías ha demostrado ser una herramienta muy útil a la hora de ofrecer una interpretación semántica de distintos sistemas formales. Recordemos que, partiendo de las nociones básicas de *objeto* y *morfismos* entre objetos tales que cada morfismo tiene un origen y un destino, una categoría ha de cumplir las siguientes condiciones:

1. Cada objeto tiene un morfismo identidad.

2. La composición de morfismos es asociativa: Si f, g, h son morfismos en $\mathcal{C}$, $(fg)h = f(gh)$.

El modelo categorial de la lógica proposicional intuicionista es una bi-categoría cartesiana cerrada (bi-CCC), que tiene un objeto inicial, el cual equivale a la contradicción (lo llamaremos $\bot$ o 0), uno final, que equivale a la taulogía (lo llamaremos $\top$ o 1), una serie de objetos elementales y objetos obtenidos por composición exponencial, producto y coproducto de objetos, equivalentes a la composición de proposiciones mediante la implicación, conjunción y disyunción de proposiciones previas, respectivamente. Si tomamos como es usual el cálculo λ como lenguaje interno de las CCC, puede verificarse que los axiomas de la lógica intuicionista son expresables en términos λ como combinadores, es decir, términos λ que no tienen variables libres y que por tanto pueden ser obtenidos sin necesidad de presupuestos hipotéticos (Cfr. Johnstone, 2003).

Un sistema de lógica epistémica como el que consideramos puede ser descrito categorialmente por una CS4-categoría $\mathcal{C}$, una bi-CCC sobre la cual se define un functor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ con sus transformaciones naturales (Fribourg, 2001); a partir de éste, más adelante añadiremos la estructura correspondiente a los anuncios públicos. Dado que no tenemos operador dual de K, la categoría $CS4$ es equivalente en lo que nos concierne a una $S4$. De este modo, tenemos una interpretación canónica del lenguaje de modo que:

1. Para toda fórmula ϕ existe un objeto en la bi-CCC $\mathcal{C}$ que es su interpretación.

2. El conjunto de todos los morfismos de la categoría es interpretación de W[3], esto es, $W = arr(C)$.

3. $\top \to \phi$, o simplemente ϕ expresado como proposición, indica que existe al menos un morfismo $a \in W$ desde el objeto final (que sirve de tautología y es tal que los morfismos que lo tienen como origen pueden considerarse como pruebas elementales), hasta el objeto ϕ[4], por lo que en términos epistémicos podemos decir que ϕ tiene una demostración.

4. La composición de objetos y morfismos es:

   a) Si existe un morfismo $a : \phi$ y un morfismo $b : \psi$, consideramos el par (a, b) como morfismo producto.

   b) Si existe o bien un morfismo $a : \phi$ o bien un morfismo $b : \psi$, consideramos el par $\langle a, b\rangle$ como morfismo coproducto, es decir $\phi + \psi$ (más exactamente, si existe o bien un morfismo $a : \phi$ o bien un morfismo $b : \psi$, entonces existe un morfismo $p : \phi + \psi$ tal que $a = inl(p)$ o $b = inr(p)$).

   c) Si existe al menos un morfismo a que va de ϕ a ψ, consideramos que pertenece al objeto exponencial ψ^ϕ, equivalente al espacio de funciones $\phi \to \psi$.

Discutiremos ahora las estructuras correspondientes a los operadores K y los de anuncios públicos. Para dar cuenta de los operadores modales en general necesitamos un tipo de construcciones llamados mónadas y comónadas. Una *mónada* es un tipo de endofunctor dotado de dos transformaciones naturales, y una mónada monoidal es una estructura que permite categorizar relaciones de orden en conjuntos parcialmente ordenados, y correspondería al dual de K, el cual no se define en este lenguaje como se ha dicho antes. La interpretación del operador K corresponde a una *comónada monoidal*, siendo una

[3] Nótese que a W se habrá hecho corresponder la unión de las asignaciones de átomos a cada uno de sus elementos.

[4] Como se puede identificar un objeto como el tipo de sus morfismos, la interpretación del tipo de todos los morfismos $\top \to \phi$ es el objeto ϕ.

comónada el dual de una mónada, por lo que una comónada sobre una categoría $\mathcal{C}$ es una mónada sobre su categoría opuesta $\mathcal{C}^{OP}$, es decir, sobre una categoría tal que los morfismos están invertidos respecto de la original. Una comónada monoidal es una comónada sobre una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathcal{C})$ que presenta un endofunctor que permite definir una relación de orden parcial sobre los morfismos, dotado de dos transformaciones naturales monoidales, $\delta_A : K\phi \to KK\phi$ y $\eta_A : K\phi \to \phi$, las cuales permiten definir las condiciones axiomáticas del sistema $S4$ (obsérvese que dichas transformaciones equivalen a los axiomas 2 y 3). Dado que dicho orden es reflexivo y transitivo, para dos morfismos $s, r \in arr(\mathcal{C})$ tenemos que, si $s \leq r$ y $int(s)$ lleva a ϕ, es decir, $im(s) = \phi$, entonces también se cumple que $int(r)$ lleva a ϕ, $im(r) = \phi$. Una bi-CCC S4 es por tanto una bi-CCC sobre la cual se define una mónada comonoidal (K, δ, η, m) (Cfr. Alechina et at, 2001).

La discusión está en la interpretación del anuncio público $[[\phi!]]$ en términos categoriales, que es menos clara y no ha sido caracterizada satisfactoriamente por el momento, por lo que aquí no se ofrece un modelo completo, sino solamente una serie de sugerencias que puedan servir a futuros estudios. Parece claro que dicha operación corresponde a un functor de restricción $[[\phi!]] : \mathcal{C} \to \mathcal{C}|_\phi$ junto con sus correspondientes adjuntos, es decir, de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ restringida al conjunto de objetos y morfismos tales que no existen morfismos a $\neg\phi$, siendo la relación de orden la misma restringida a dicho subconjunto y la interpretación de objetos y morfismos la misma. Igual que en el caso del operador K, lo que necesitamos es que la composición de dicho functor refleje los axiomas de la lógica de anuncios públicos que se han ofrecido antes; por ejemplo, ha de cumplirse el axioma de permanencia atómica, de modo que $[[p!]]\phi$ especifica en $\mathcal{C}|_p$ que, si se verifica p, entonces se verifica ϕ, es decir, si existe en $\mathcal{C}|_p$ un morfismo hacia p, entonces existe en la misma categoría un morfismo hacia ϕ[5]. Lo mismo pasaría con el resto de los axiomas. Dicho functor ha de dar cuenta categorialmente de la adición de nuevas pruebas en términos de anuncios públicos de modo que el anuncio de una proposición dada, simple o compleja, traiga como consecuencia la demostración de otra u otras proposiciones[6]. Dado que este campo es relativamente nuevo, de momento solo podemos ofrecer pistas para futuros desarrollos, no un esquema completo.

4. Conclusiones

Recapitulando la interpretación categorial de la LBCAP, podemos ver que en dicha semántica una proposición equivale a un objeto de la categoría, mientras que una demostración de la misma equivale a un morfismo hacia el correspondiente objeto. Obsérvese que los estados de W que han sido estudiados en la sección 2 pueden ser vistos entonces como morfismos o pruebas de sus correspondientes proposiciones, por lo que la interpretación standard y la categorial se complementan, y que los objetos o proposiciones pueden ser considerados como el tipo de todos los morfismos o estados que los verifican. Dichos morfismos pueden ser enunciados en términos del cálculo lambda como algoritmos constructivos de las proposiciones que se consideran, en el sentido de que son modelos de los pasos que llevan a obtener una demostración de las mismas.

Más intereresante, como se ha visto, es el caso de la interpretación del operador K y de los anuncios públicos. En el primer caso nos encontramos con una bi-categoría cartesiana cerrada S4, es decir, una bi-CCC dotada de un endofunctor que permite dar cuenta de la relación de orden parcial entre pruebas de las proposiciones; una prueba de $K\phi$ es un algoritmo que permite pasar de todo algoritmo s que demuestra ϕ a todos los algoritmos o pruebas r tales que $s \leq r$. En el caso de los anuncios públicos, un algoritmo o prueba de $[[p!]]\psi$ es un algoritmo que nos indica que, si tenemos un morfismo s tal que nos lleve a p, entonces podemos obtener otro morfismo w que nos lleva a ψ con las restricciones antes consideradas. Habrá que seguir trabajando en la interpretación categorial de los anuncios públicos, tanto en su caracterización básica como en la profundización de los aspectos más complejos de este campo. En futuros artículos esperamos ofrecer una caracterización más completa del modelo categorial de la lógica estudiada aquí, así como su aplicación en el estudio de paradojas epistémicas clásicas, tales como la paradoja del examen sorpresa, la paradoja de Fitch o las sentencias de Moore.

[5]Obsérvese de paso que, aunque relacionados, el anuncio público y la implicación lógica son conceptos distintos; la implicación $\phi \to \psi$ conlleva que se puede pasar de una prueba de ϕ a una prueba de ψ, ya que hay un morfismo que pertenece a ψ^ϕ; el anuncio público $[[\phi!]]\psi$ quiere decir que en la categoría restringida $\mathcal{C}|_\phi$ hay un morfismo a ψ.

[6]Nótese de paso nuevamente el carácter dinámico de esta lógica en cuanto a sus anuncios públicos, ya que el anuncio de una proposición reestructura el conjunto de proposiciones demostradas en el sistema, siempre que siga siendo consistente.

Referencias

[1] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. Kooi (2008): *Dynamic Epistemic Logic*. Synthese Library 337, Springer.

[2] J. Lambek, P. J. Scott (1986): *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge studies advanced mathematics 7, Cambridge University Press.

[3] J. P. Marquis (2014): "Category Theory", Stanford Encyclopedia of Philosophy (revision 1996), http://plato.stanford.edu/entries/category-theory/

[4] R. Ramezanian (2013): "A Constructive Epistemic Logic with Public Announcement (Non-Predetermined Possibilities)", arXiv:1302.0975v1

[5] A. Filinski (1989): *Declarative Continuations and Categorical Duality, Universidad de Copenhague*, Tesis doctoral, 1989

[6] L. Fribourg (ed.) (2001): *Computer Science Logic: 15th International Workshop*, CSL 2001. 10th Annual Conference of the EACSL, Paris

[7] N. Alechina, M. Mendler, V. de Paiva, E. Ritter (2001): Categorical and Kripke Semantics for Constructive S4 Modal Logic in *Computer Science Logic*, Springer, pp. 292-307

[8] D. van Dalen (2002): "Intuitionistic logic" in *Handbook of philosophical logic*. Springer Netherlands, pp. 1-114.

[9] P. T. Johnstone (2003): *Sketches of an elephant: A topos theory compendium-2 volume set.* Oxford University Press.