Abducción y tablas semánticas: algunas extensiones

Fernando Soler Toscano y Ángel Nepomuceno Fernández
(Universidad de Sevilla)

Introducción

Los trabajos de Marta Cialdea y Fiora Pirri (1993) introducen la aplicación de las tablas semánticas a la resolución de problemas abductivos en lógica de primer orden. Dadas una teoría Θ –conjunto de fórmulas de primer orden– y una observación φ –fórmula de primer orden–, consideran que $\langle\Theta,\varphi\rangle$ es un problema abductivo si no son consecuencia lógica de Θ ni φ ni $\neg\varphi$. Entonces, la fórmula α es una solución abductiva a dicho problema abductivo si cumple:

4. $\Theta,\alpha \models \varphi$ (requisito fundamental).
5. $\Theta \wedge \alpha$ es satisfacible (requisito de consistencia).
6. $\alpha \wedge \neg\varphi$ es satisfacible (requisito explicativo).

En cuanto al uso de tablas semánticas con variables libres, debemos tener en cuenta que $\Theta,\alpha \models \varphi$ equivale –por los teoremas de corrección y completud– a que la tabla de $\Theta \cup \{\alpha,\neg\varphi\}$ sea cerrada. Igualmente, los restantes requisitos se corresponden, respectivamente, a que las tablas de $\Theta \cup \{\alpha\}$ y de $\{\alpha,\neg\varphi\}$, posiblemente infinitas, tengan al menos una rama abierta.

Como ejemplo, tomemos el problema abductivo $\langle\{\forall x(Px \to Qx)\},\forall zQz\rangle$. Creamos una tabla con una sola variable libre por rama (limitamos la construcción de tablas potencialmente infinitas a un número máximo de variables libres) que tiene por raíz las fórmulas de la teoría y la negación de la observación: $\{\forall x(Px \to Qx),\neg\forall zQz\}$. En adelante, $v_1,v_2,\ldots$ son variables libres, y $sk_1,sk_2,\ldots$ funciones de Skolem, seguidas de los argumentos que correspondan (en el ejemplo, sk_1 es una función 0-ádica, o constante). Vemos que la única rama abierta de la tabla contiene, tras la unificación de la variable libre v_1, dos literales, $\neg Psk_1$ y $\neg Qsk_1$. A partir de

$$\forall x(Px \to Qx)$$
$$\neg\forall zQz$$
$$Pv_1 \to Qv_1$$
$$\neg Qsk_1$$
$$\neg Pv_1 \qquad\qquad Qv_1$$
$$\sigma = \{v_1/sk_1\} \qquad \otimes$$

estos literales, es posible crear fórmulas que cerrarían el tablero, des-eskolemizando sus complementarios. Por tanto, las dos explicaciones posibles en este caso son $\forall x Px$ y $\forall x Qx$ (resultado de des-eskolemizar Psk_1 y Qsk_1, respectivamente; puede comprobarse que ambas cerrarían la tabla). La segunda de ellas resulta trivial por ser igual a lo que quiere explicarse, con lo que optamos por la primera. Aunque no vamos a hacerlo aquí, puede comprobarse que dicha explicación cumple también los dos últimos requisitos anteriormente presentados.

Algunas extensiones

- **Regla delta.** F. Pirri y M. Cialdea sugieren la posibilidad de emplear versiones más *liberalizadas* de la regla-δ. Por ello, empleamos la regla δ^{++} (Beckert 1993):

$$\frac{\delta(x)}{\delta(f(v_1,\ldots,v_n))}$$

  donde $v_1,\ldots,v_n$ son las variables libres que ocurren en $\delta(x)$ –y no todas las de la rama– y f un símbolo de función común para todas las fórmulas δ que comparten cierta estructura sintáctica. De esta manera el número de functores que aparecen en las tablas es finito –aunque la tabla sea infinita–. Con esta versión de la regla δ^{++} se llega a reducir exponencialmente el tamaño de las tablas.
- **Forma sintáctica de las explicaciones.** En vez de limitarnos a cuantificaciones de conjunciones de literales, las explicaciones serán fórmulas en forma normal de Skolem con la matriz en forma normal conjuntiva. Del conjunto de literales de cada rama de la tabla se obtiene una disyunción elemental.
- **Introducción de la identidad.** La introducción de la identidad en el cálculo de tablas semánticas aumenta considerablemente la complejidad, pero es posible introducir identidades en la generación de explicaciones. Así, si en una misma rama encontramos los literales $\gamma(a)$ y $\neg\gamma(b)$ –siempre que ni a ni b sean términos de Skolem–, podemos construir la explicación a partir de $a = b$, que cierra la tabla.

Las dos últimas extensiones, como se puede objetar, suponen un gran aumento de la complejidad del razonamiento abductivo. Sin embargo también introducimos otras dos modificaciones que abordan ese problema:

- **Posibilidad de seleccionar los predicados abducibles.** Si para cada problema abductivo se exige que las explicaciones se construyan a partir de un cierto conjunto de predicados, se reduce considerablemente el espacio de búsqueda. La definición de predicados *abducibles* es habitual en Programación Lógica Abductiva.
- **Nociones de minimalidad.** Decimos que γ es una solución *minimal*

para el problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ si y sólo si para toda otra solución η se cumple $\models \eta \to \gamma$. Por lo general, la cuestión de la minimalidad no es decidible en lógica de primer orden. Sin embargo, podemos considerar algunos criterios de minimalidad que pueden resultar útiles al des-eskolemizar las explicaciones, determinando un orden minimal de los cuantificadores. En lo que sigue, Q_i es un prefijo cuantificacional –posiblemente vacío– sobre la secuencia de variables V_i –que también puede ser vacía–, y t es un término cualquiera. Se cumple, por ejemplo:

$$\models Q_1 \exists x Q_2 \forall y Q_3 \varphi(V_1, V_2, V_3, x, y) \to Q_1 \forall y Q_2 \exists x Q_3 \varphi(V_1, V_2, V_3, x, y)$$

Ejemplo:

Para ilustrar cómo las extensiones propuestas permiten la generación de soluciones más expresivas, veamos que resulta posible comprender abductivamente ciertos problemas de la teoría de la correspondencia entre lógica modal –proposicional– y lógica de primer orden: la determinación de las propiedades que debe tener la relación de accesibilidad entre mundos para que cierta fórmula –axioma– sea válida. En adelante, $Rm_i m_j$ representará la relación de accesibilidad desde el mundo m_i hasta m_j, y será el único predicado abducible. Además, $Tm_k p_l$ expresa que la proposición p_l es verdadera en el mundo m_k. Entonces, dado el axioma $p \to \Box\Diamond p$, se corresponde con la fórmula de primer orden $\forall m_1 \left(\neg Tm_1 p \vee \forall m_2 \left(Rm_1 m_2 \to \exists m_3 \left(Rm_2 m_3 \wedge Tm_3 p\right)\right)\right)$, que llamaremos φ. Sea el problema abductivo $\langle \varnothing, \varphi \rangle$. Si hacemos una tabla semántica de $\neg\varphi$, en cierto momento, tras cerrarse una rama y unificarse una variable libre, queda una sola rama con el conjunto de literales $\{Tsk_1 p, Rsk_1 sk_2, \neg Rsk_2 sk_1\}$. Empleando la metodología de M. Cialdea y F. Pirri no se obtiene ninguna solución abductiva interesante. Sin embargo, empleando la segunda de las extensiones propuestas es posible obtener, a partir de los dos últimos literales, la explicación $\forall x \forall y \left(\neg Rxy \vee Ryx\right)$, que equivale a $\forall x \forall y \left(Rxy \to Ryx\right)$, que es la simetría de la relación de accesibilidad. Otros resultados interesantes pueden obtenerse con otros axiomas modales, mostrándose el aumento de expresividad de las soluciones abductivas que suponen las extensiones propuestas en este trabajo.

Bibliografía

B. BECKERT, R. HAEHMLE y P. SCHMITT, “The even more liberalized □-rule in free variable semantic tableaux”, en *Computational logic and proof theory*. G. Gottlob (1993), páginas 108-119.

M. CIALDEA y F. PIRRI, "First order abduction via tableau and sequent calculi", Bulletin of the IGPL 1 (1993), páginas 99-117.