

此为《中国公路学报》投稿模板-2016版（2016年5月更新）

投稿前请到我刊网站下载最新版：<http://zgglxb.chd.edu.cn/CN/column/column22.shtml>

# 正交异性钢桥面板裂纹扩展的均质化方法

王本劲<sup>1,2</sup>, Hans De Backer<sup>2</sup>, 陈艾荣<sup>1</sup>

(1. 同济大学桥梁系, 上海, 200092;

2. 比利时根特大学土木工程系, Zwijnaarde, 9052)

## A Homogenization Method on Crack Growth on Orthotropic Steel Decks

Benjin Wang, Hans De Backer, Airong Chen

(1. Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092

2. Department of Civil Engineering, Ghent University, Zwijnaarde, 9052)

**基金项目:** 基金项目类别、名称（附项目编号）

**作者简介:** 姓名（出生年份-），性别，籍贯，职称（是院士、博导、博士后的要标明），学位，E-mail:（写常用的电子信箱地址）。

**第一作者联系信息:** 包括邮编，地址，收件人，固话、手机。

**通讯作者:**（所需信息与第一作者简介相同）

说明：通讯作者为可选项，投稿时可以标注通讯作者。通讯作者一般要求为副教授以上职称；在读研究生不标注为通讯作者；博士生为第一作者时，通讯作者一般标注为博士生导师。

**第二作者联系信息:** 固话、手机。

**完善【研究方向】信息。**在线提交投稿过程中，在录入作者【研究方向】信息时，请尽可能详细填写具体的研究方向及所发论文等成果，便于编辑部据此将作者遴选为审稿专家。

投稿请推荐两名审稿专家（非本单位）

推荐专家 1:

姓 名		性 别		电子信箱	
职 称		学 历		学科专业	
工作单位					

推荐专家 2:

姓 名		性 别		电子信箱	
职 称		学 历		学科专业	
工作单位					

# 正交异性钢桥面板裂纹扩展的均质化方法

**摘要：**考虑焊接缺陷对焊缝疲劳性能的影响，基于扩展有限元法提出了含缺陷的焊接裂纹扩展的均质化方法。该方法基于等效裂纹扩展长度准则，通过数值算例证明了其在早期裂纹扩展中的适用性。作为重要的多尺度方法之一，该均质化方法被用于正交异性钢桥面板受车辆荷载作用下的裂纹扩展计算。根据某正交异性钢桥面板的车辆荷载的现场实测数据，以及 Eurocode 建议的车辆横向分布，采用均质化的模型对 U 肋-顶板焊趾处的宏观裂纹形成寿命进行了计算。结果表明，该方法可有效呈现宏观裂纹形成寿命的概率分布，但该分布的统计特性依赖于所选择的 Paris 公式形式及其中的材料常数取值。

**关键词：**裂纹扩展；均质化；扩展有限元法；随机缺陷

## A Homogenization Method on Crack Growth on Orthotropic Steel Decks

**Abstract:** Based on eXtended Finite Element Method (XFEM), a homogenization method was proposed to study the crack growth affected by random defects, since they play a significant role on the fatigue performance of welded joints. Based on the concept of equivalent crack growth length, the homogenization process for simulating crack growth was proven to be feasible in the early stage of crack growth. As an option of multi-scale method, the homogenization method was applied on orthotropic steel decks (OSDs) with respect to vehicle loads. According to the on-site test data and the transverse location of vehicles suggested on Eurocode, the macro-crack initiation life (MCIL) on rib-to-deck weld toe was calculated using homogenized model. The results, in the form of possibility distribution, show that the method is applicable and effective to demonstrate the variation of MCIL. However, the statistical characteristics of the distribution are dependent on the form of the Paris law and the values of the constants in it.

**Key words:** Crack growth; Homogenization; XFEM; Random defects

中图分类号：U441+.4

文献标志码：A

## 0 引言

正交异性钢桥面板的使用性能和耐久性往往受焊接疲劳问题影响，现已有大量的试验及数值模拟研究在关注这一问题[1,2]。然而，从试验结果的离散程度来看，很有必要对正交异性钢桥面板的疲劳开裂中的随机因素开展研究。现有的研究方法主要考虑了开裂过程中随机载荷作用，而针对由焊接过程导致的随机性的研究仍有不足。

焊接过程对焊缝疲劳性能影响主要体现在残余应力和初始缺陷方面。已有研究[3,4]表明了减小残余应力对正交异性钢桥面板疲劳性能的有利影响。不过，对于焊接初始缺陷的研究却较为缺乏，其原因主要在于大型土木工程结构与疲劳裂纹的尺度差异带来的试验及计算方面的困难。正交异性钢桥面板中存在着大量焊缝，首先将带来的是缺陷检测的巨大的工作量。不仅如此，由文献[5]给出的受循环荷载作用的构件的缺陷尺度，可见缺陷的尺度之小使得无损探伤方法的精度难以覆盖其所有可能的尺度[6]。

由于上述困难,部分疲劳设计建议中提出了含假设的缺陷的及疲劳性能评估方法,即有效切口应力法。然而,由于该方法的结果对切口的细部几何,尤其是尖端半径较敏感,其取值也引起了部分讨论[7][8]。这表明,仍需更多的研究以改善目前的疲劳设计方法中对缺陷的考量。作者认为可能的解决方案是生成大量含焊接缺陷的样本,采用数值方法评估其导致的疲劳性能的不确定性。

本文基于扩展有限元法提出对大量含缺陷的样本进行均质化处理的方法。文章组织结构如下:首先介绍扩展有限元法的原理,及其在代表体积元(RVE)的裂纹扩展中的应用。然后给出了均质化方法的准则及数值算例。最后基于现场实测车辆荷载,并考虑其横向分布,对正交异性钢桥面板的焊缝热影响区的宏观裂纹形成寿命进行了评估。

## 1 基于扩展有限元法的裂纹扩展

出于大量计算的目的,经典的有限元法由于其建模及网格划分的效率问题而无法适用。因此,本文采用了扩展有限元方法,其几何形状与网格相互独立,使其可对大量含缺陷的模型进行高效的计算。

扩展有限元由 Belytschko 等提出,之后又根据不同的非连续特征提出了各种解决方案[9,10,11,12]。该方法的主要思路是通过局部函数之和来表示目标函数,即只要局部函数足够精确,便可逼近目标函数。在有限元方法中引入这一思路,则位移场函数  $u(x)$  可表示为:

$$u(x) = \sum_{I \in \Omega} N_I(x) (u_I + \sum_{I \in \Omega_d} \varphi(x) a_I) \quad (1)$$

故针对各增强域确定其增强函数。

1. 对被裂纹完全穿透的单元,其增强函数为 Heaviside 函数:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{单元在裂纹上方} \\ -1, & \text{单元在裂纹下方} \end{cases} \quad (2)$$

2. 对裂尖在其内部的单元,增强函数的形式如下:

$$B_a(x)_{a=1,4} = [\sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin \theta \sin(\theta/2), \sqrt{r} \sin \theta \cos(\theta/2)] \quad (3)$$

其中  $r, \theta$  为裂纹尖端的局部极坐标。

3. 对包含夹杂的单元,其增强函数由 Moes 等提出:

$$\psi(x) = \sum N_I(x) |\zeta_I| - \left| \sum N_I(x) \zeta_I \right| \quad (4)$$

其中  $\zeta_I$  为节点的水平集函数。

4. 对包含孔洞的单元,增强函数仅需将在孔洞内部的节点移除计算,则位移场函数为:

$$u(x) = P(x) \sum N_I(x) u_I$$

$$P(x) = \begin{cases} 1, & \text{节点在气孔外} \\ 0, & \text{节点在气孔内} \end{cases} \quad (5)$$

基于准定常假设,采用经典的 Paris 公式模拟裂纹扩展:

$$da/dN = C(\Delta K_{eff})^m \quad (6)$$

其中,有效应力幅由 Tanaka[13]给出:

$$\Delta K_{eff} = \sqrt[4]{K_I^4 + 8K_{II}^4} \quad (7)$$

裂纹扩展角  $\theta_c$  服从最大周向应力准则:

$$\theta_c = 2 \arctan(K_I / K_{II} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{(K_I / K_{II})^2 + 8}) / 4 \quad (8)$$

## 2 含缺陷焊趾裂纹问题的均质化方法

### 2.1 概述

考虑正交异性钢桥面板中典型的顶板-U肋焊缝在焊趾处开裂的情形。焊趾处由于几何突变而存在应力集中,本就易形成裂纹,而焊接过程导致的材料不均匀问题更加大了这一可能性。另一方面,焊接热影响区中可能存在的气孔、夹杂等缺陷,也会加速宏观裂纹的形成。因此,如图 1 所示生成该易疲劳细节的代表体积元。其中包含随机分布的夹杂和气孔,而体积分数均为 0.05,即  $\lambda_I = \lambda_P = 0.05$ ,其中下标  $I$  是指夹杂,  $P$  指气孔,后同。由于代表体积元仅用于均质化计算,从而对缺陷影响下的材料常数进行等效,故焊趾处的几何不考虑在内,其影响通过应力强度因子的形状系数体现。

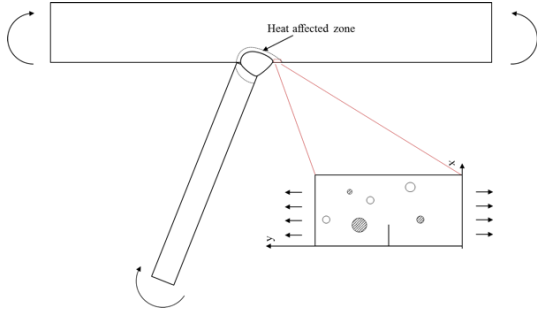


图 1 顶板与 U 肋间焊缝的代表体积元  
Fig. 1 RVE in the welded joint of trapezoidal stiffener and deck plate

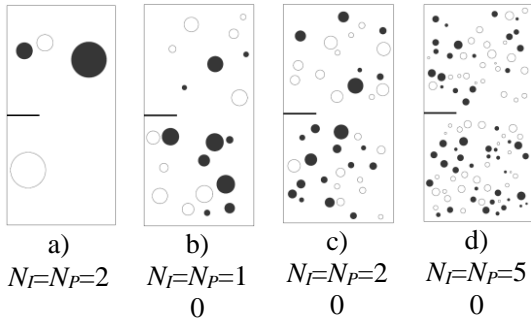


图 2 含不同数量的夹杂和气孔的代表体积元  
Fig. 2 Representative volume elements with randomly distributed inclusions & pores

## 2.2 均质化方法

考虑到于土木工程结构和焊接缺陷的尺度在量级上的差异，需采用多尺度方法计算，而均质化方法是考虑多尺度效应的方式中较简化的一种。

已有研究利用扩展有限元法对非均质材料的力学性能进行均质化处理。这些研究都是基于等效应变能的，证明其在考虑力学性能方面是一种有效的假设[14]。然而，对于裂纹扩

展的问题，已有研究[15]中的均质化方法被限制在远离裂纹的区域，其原因主要在于缺陷和裂纹的相对位置的关键作用难以通过应变能表达出来。因此，本研究采用的方法是基于初始状态下的裂纹扩展长度等效实现均质化。

基于 Paris 公式的差分形式可得到裂纹扩展长度，

$$\Delta a = C \Delta N (\Delta K)^m \quad (9)$$

由于在均质化之后的代表体积元中不存在夹杂和气孔，其裂纹扩展长度仅与材料常数和边界条件相关。因此，通过修改 Paris 常数 C 实现裂纹扩展长度等效，即使得目标函数 R (式(10))最小，得到归一化的均质化系数  $a_c$ 。

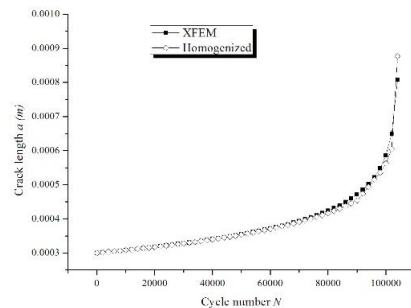
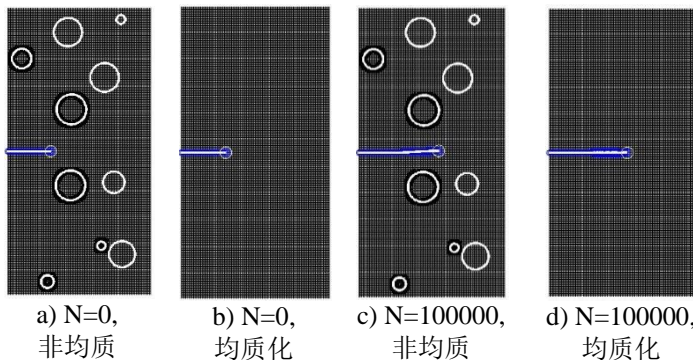
$$R = [C_0 \Delta N (\Delta K)^m]_{heter} - [C_{eff} \Delta N (\Delta K)^m]_{homo} \quad (10)$$

$$a_c = C_{eff} / C_0 \quad (11)$$

## 2.2 均质化算例

以下给出一些数值算例来证明该方法的可行性。算例考虑含夹杂和气孔的尺寸及数量不同，体积分数均在 0.05 左右的代表体积元，边界条件为 70MPa 均匀受拉。对其中的裂纹扩展同时使用非均质模型和均质化模型计算，比较二者在循环次数 100000 次以内的裂纹长度。

结果显示，由于均质化系数  $a_c$  由模型的初始状态得到，因此均质化带来的误差在裂纹扩展的前期较小，但随着裂纹扩展逐渐增大。不过由于裂纹扩展服从以 Paris 指数 m 为基准的幂指数率，即前期扩展寿命远高于后期，因而带来的误差较小，算例中最大误差为 2.67%。



e) 裂纹长度比较

图 3 数值算例 1  
Fig. 3 Numerical Example 1

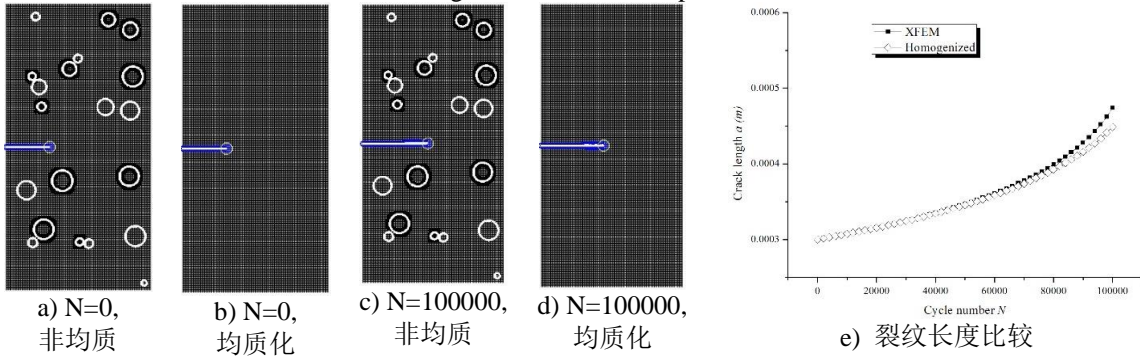


图 4 数值算例 2  
Fig. 4 Numerical Example 2

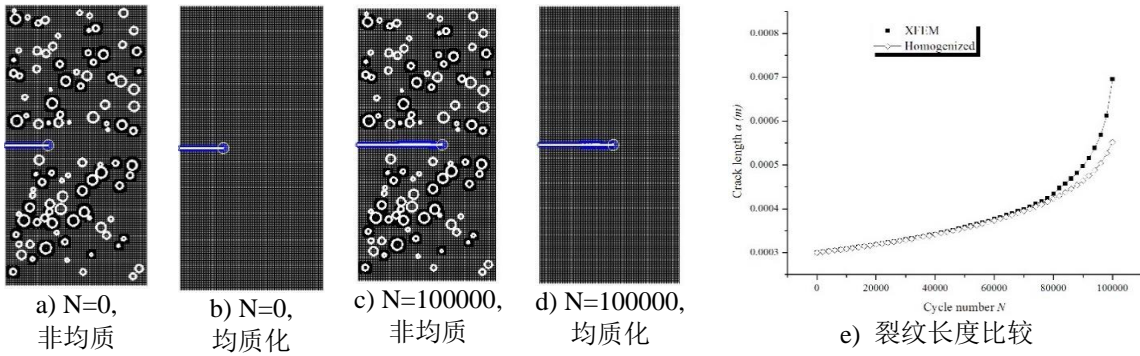


图 5 数值算例 3  
Fig. 5 Numerical Example 3

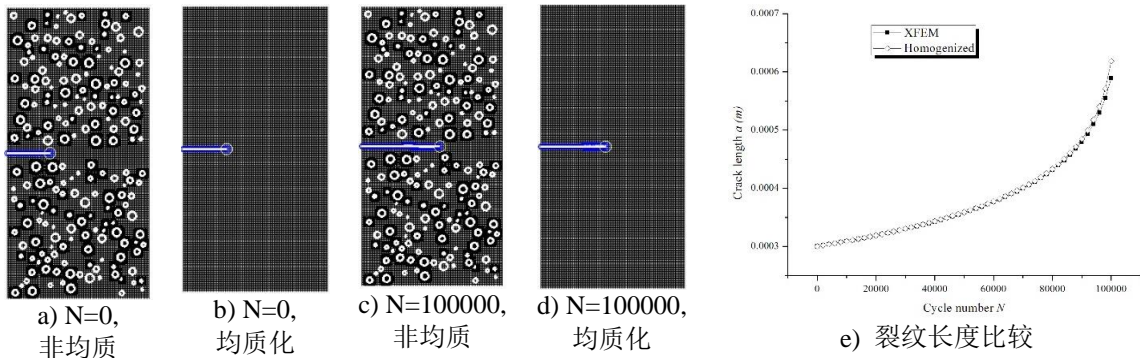


图 6 数值算例 4  
Fig. 6 Numerical Example 4

表 1 数值算例结果对比

Table 1 Comparison of the results of numerical examples

编号	$N_l$	$N_p$	$\lambda_l$	$\lambda_p$	$a_c$	均质化模型所得 裂纹长度 (mm)	非均质模型所得 裂纹长度(mm)	误差 (%)
1	5	5	0.0562	0.0473	1.082	0.4238	0.4167	-1.67
2	10	10	0.0466	0.0372	0.960	0.3992	0.3925	-1.68
3	50	50	0.0522	0.0520	1.114	0.4341	0.4225	-2.67
4	100	100	0.0562	0.0610	1.153	0.4319	0.4329	0.24

### 3 正交异性钢桥面板的宏观裂纹形成寿命估计

#### 3.1 基于现场实测数据的疲劳荷载

研究对比利时安特卫普的 Albert 运河上的 KW05 桥进行评估。该桥为采用正交异性钢桥面板的系杆拱桥，顶板厚度为 15mm。

通过对该桥进行现场实测，确定了焊缝处在车辆不同横向位置作用下的荷载效应。图 20 给出了测试的总体方案，其中测试车重约 44 吨，应变计设置于靠近焊趾处。每个横向位置的测试数据如图 8~图 12 所示，其中可明显区分出测试车辆的五个车轴造成的响应。而后通过雨流计数法得到车载作用于每个位置的应力幅，如表 3 所示，其中略掉 5MPa 下的应力幅。

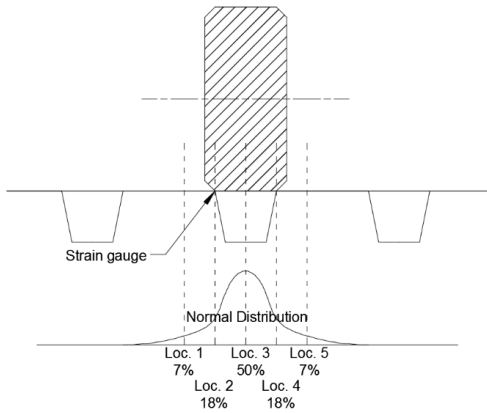


图 7 车辆荷载测试及横向位置分布  
Fig. 7 Test scheme and the assumed possibility of transverse locations

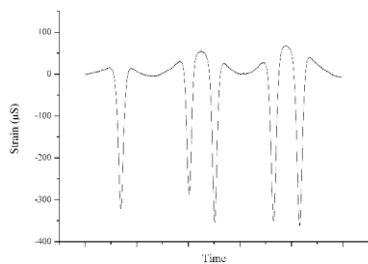


图 8 位置 1 处实测应变时程  
Fig. 8 Measured strain on location 1 ( $\mu\text{S}$ )

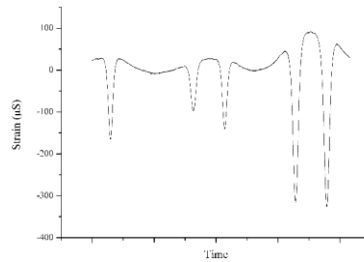


图 9 位置 2 处实测应变时程  
Fig. 9 Measured strain on location 2 ( $\mu\text{S}$ )

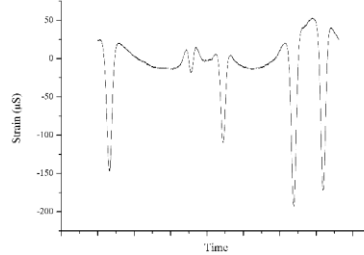


图 10 位置 3 处实测应变时程  
Fig. 10 Measured strain on location 3 ( $\mu\text{S}$ )

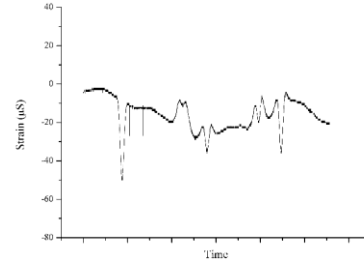


图 11 位置 4 处实测应变时程  
Fig. 11 Measured strain on location 4 ( $\mu\text{S}$ )

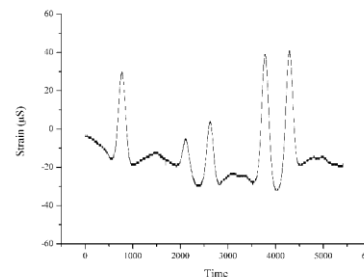


图 12 位置 5 处实测应变时程  
Fig. 12 Measured strain on location 5 ( $\mu\text{S}$ )

表 2 实测车辆荷载循环雨流法计数

Table 2 Rain-flow counting for test data

位置	概率	雨流法计数										
1	0.07	应力幅 (MPa)	35.49	33.29	39.69	39.80	43.05	44.31	45.15	42.21		
		平均应力 (MPa)	-32.13	-26.78	-27.93	-33.92	-31.29	-30.03	-30.87	-33.81		
		循环次数(-)	0.50	1.00	0.50	1.00	0.50	0.50	0.50	0.50		
2	0.18	应力幅 (MPa)	13.13	17.75	20.37	22.05	38.01	42.95	43.89	40.85		
		平均应力 (MPa)	-7.46	-11.87	-14.28	-12.60	-28.56	-23.63	-24.57	-27.62		
		循环次数(-)	1.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50		
3	0.5	应力幅 (MPa)	13.65	17.85	22.89	25.83	23.63	22.26				
		平均应力 (MPa)	-9.45	-13.65	-17.64	-14.70	-12.50	-13.86				
		循环次数(-)	1.00	1.00	0.50	0.50	0.50	0.50				
4	0.18	应力幅 (MPa)	5.04									
		平均应力 (MPa)	-5.46									
		循环次数(-)	0.50									
5	0.07	应力幅 (MPa)	6.30	7.25	7.46	7.67	6.41					
		平均应力 (MPa)	0.00	0.95	0.74	0.95	2.21					
		循环次数(-)	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50					

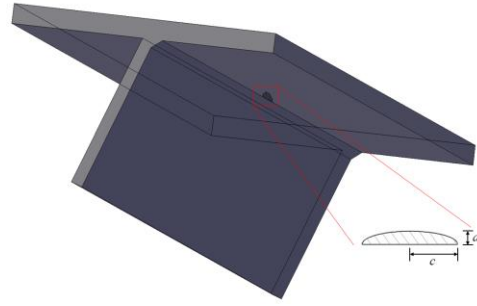


图 13 U 肋与顶板焊缝焊趾处半椭圆片状裂纹  
Fig. 13 Semi-elliptical crack at rib-to-deck weld toe

将均质化系数引入 Paris 公式，则裂纹扩展率为：

$$da/dN = a_c C_0 (M_k \Delta \sigma \sqrt{\pi a})^m \quad (13)$$

则宏观裂纹形成寿命可由上式积分获得。寿命是  $a_c$  和  $\Delta \sigma$  的函数。因此可首先计算一个基准寿命  $N_0$ ，其  $a_c$  等于 1（无夹杂物和孔隙）， $\Delta \sigma$  等于 100MPa。考虑随机缺陷及车流的情况下，宏观裂纹形成寿命可以简单地基于  $N_0$  插值得到：

$$N_0 = \int_{a_0}^{a_d} da / [C_0 (100 M_k \sqrt{\pi a})^m] \quad (14)$$

其中， $a_d$  为 0.5mm，即可探测的裂纹深度。

而后，通过假定其横向位置服从正态分布，如图 7 所示，得到测试车辆通过时的损伤为，

$$D = a_c \sum_j P_j \sum_k c_k / [N_0 (100 / \Delta \sigma_k)^m] \quad (15)$$

其中下标  $j$  是指不同轮载的横向位置， $P_j$  对应位置的概率。下标  $k$  是指位置  $j$  上轮载的第  $k$  个循环。

在得到单辆车的损伤基础上，可基于 Eurocode (NBN EN 1991-2) [18] 计算按年计的寿命值。根据 [18]，可假设 KW05 的慢车道每年经过重车数为两百万辆，并确定不同类型的重车的百分比。假设损伤值与车重成比例，则按年计的损伤值  $D_y$  和寿命  $N_y$  为，

$$D_y = \sum_l T_l P_l w_l D \quad (16)$$

$$N_y = 1 / D_y \quad (17)$$

### 3.2 宏观裂纹形成寿命计算

考虑如图 13 所示的半椭圆片状初始裂纹在前述车辆荷载作用下扩展至宏观可检测尺度的寿命。其中， $c$  为裂纹沿焊缝方向半轴长度， $a$  为垂直于顶板的深度。在本研究中，根据无损探伤的可能达到的检测精度，以及部分正交异性钢桥面板的裂纹扩展研究的初始裂纹尺度 [16]，将宏观可检测尺度确定为  $a_d=0.5\text{mm}$ 。根据文献 [4] 给出的缺陷大概尺度，假设气孔的和夹杂半径  $20\mu\text{m}\sim 90\mu\text{m}$ ，数量在 0 和 10 个之间，而初始裂纹深度为  $0.1\text{mm}\sim 0.3\text{mm}$ 。以上参数都服从均匀分布。

首先计算裂纹深度尖端的应力强度因子：

$$K = M_k \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad (12)$$

其中  $M_k$  为形状系数，与裂纹深度、顶板厚度及焊趾角度相关。然而，由于没有直接针对正交异性钢桥面板的 U 肋-顶板焊趾处的形状系数研究，此处按 Bowness & Lee [17] 对 T 型焊缝焊趾的拟合公式取值，其中半椭圆裂纹的半轴长度比  $a/c$  取 0.2，焊趾角度假设为  $45^\circ$ 。

其中,  $T_j$  指慢车道每年经过的货车的总量, 即 2000000,  $P_l$  为 Eurocode[18]中不同车型所占的比例,  $w_l$  为对应车重与试验车重之比。

### 3.3 结果及讨论

通过对大量含不同裂纹深度的代表体积元进行计算, 对初始裂纹深度分别等于 0.1、0.2 和 0.3mm 的各 2000 个代表体积元进行均质化处理, 得到均质化系数  $a_c$  的分布, 如图 14 a)、b)、c) 所示。结果表明更长的初裂

纹将导致  $a_c$  的平均值、标准差和变异系数均较小, 即夹杂和气孔对疲劳性能的影响更小。其原因在于夹杂和气孔的尺寸相对于裂纹较小, 导致的宏观裂纹形成寿命的离散性也较小, 故初始裂纹深度的影响最为关键。

然而, 在大多数情况下初始裂纹深度亦难以确定, 故对另 2000 个代表体积元进行了计算, 见图 14 d), 其中初始裂纹深度在 0.1mm~0.3mm 间, 服从均匀分布。

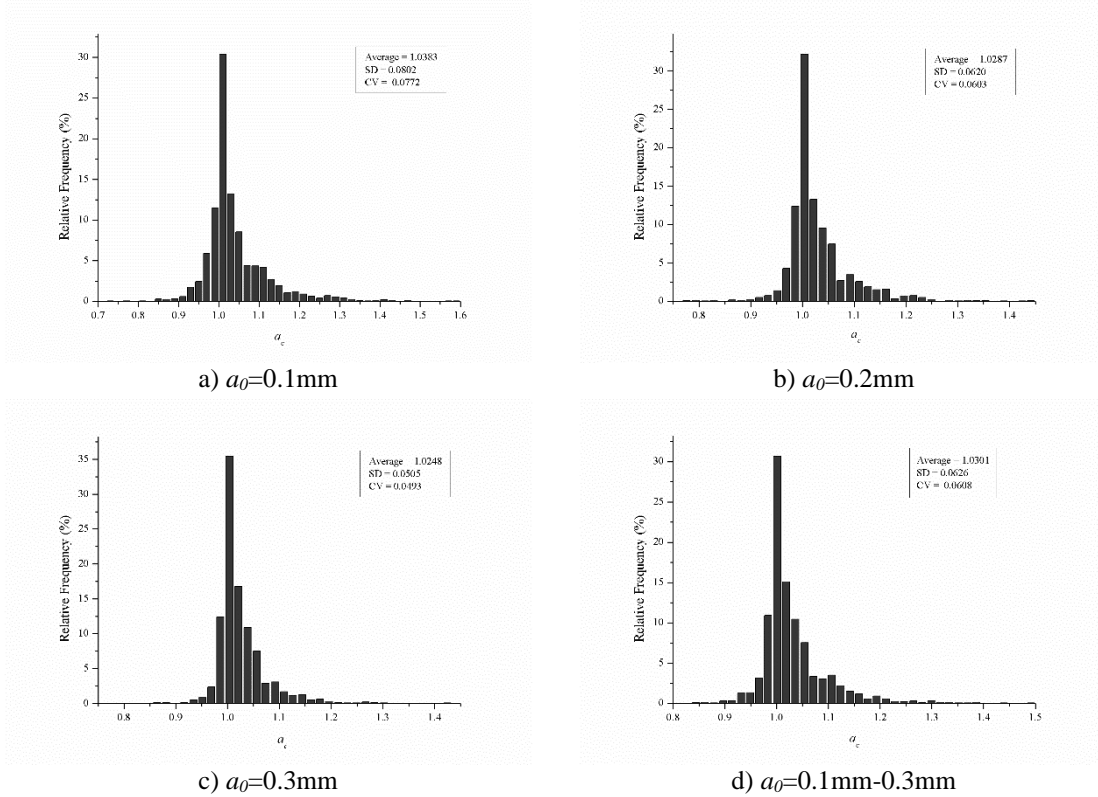


图 14 均质化系数  $a_c$  在不同初裂纹深度下的分布  
Fig. 14 Distribution of homogenization coefficient  $a_c$  for different  $a_0$

于是可由式 (16)、(17) 得到宏观裂纹形成寿命。根据 IIW 关于焊接疲劳的设计建议[7], 取 Paris 常数  $C_0=1.65 \times 10^{-11}$ , Paris 指数  $m=3$ , 所得结果见图 15。结果表明, 宏观裂纹形成寿命大约在 0.2~0.5 年左右, 显然偏小。可见由疲劳设计导向制定的建议对 Paris 公式中的取值是相当保守的。另一组结果由 Gurney[19]建议的取值得出, 如图 16 所示。

另一个重要因素是应力比  $R$  的作用。注意到图 8~图 12 中的应变时程大部分时间为负值, 即受压应力作用, 忽视应力比  $R$  的作

用将导致大的误差。考虑应力比的 Paris 公式通常有以下形式:

$$da/dN = C(1-R)^n(\Delta K)^m \quad (18)$$

$$D = a_c \sum_j P_j \sum_k c_k / [N_0(100/\Delta\sigma_k)^m(1-R)^{-n}] \quad (19)$$

图 17 给出了考虑应力比  $R$  的计算结果, 其中的材料常数参考 Liu[20]。结果表明, 正交异性钢桥面板在该荷载作用 10 年后, 将有约 90% 的概率产生宏观裂纹, 此时需对正交异性钢桥面板进行无损探伤找到可能的损伤点, 制定相应管理养护策略。



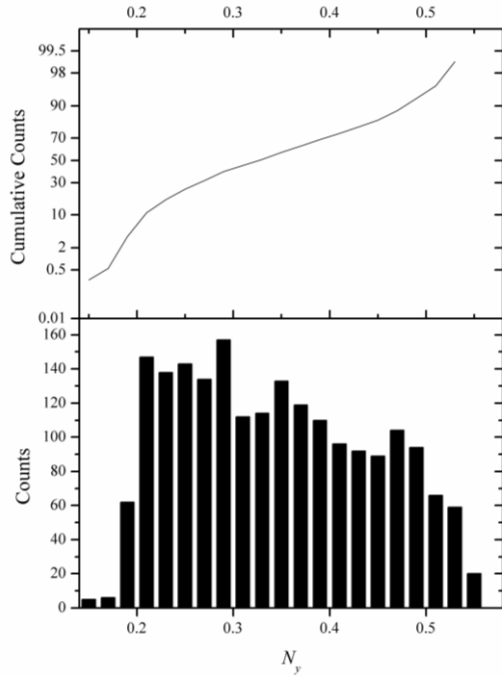


图 15 随机初裂纹深度扩展至宏观裂纹的寿命分布及累积概率, 其中  $C_0=1.65 \times 10^{-11}$ ,  $m=3$  [7] (单位: 年)

Fig. 15 Distribution of macro-crack initiation life  $N_y$  for different  $a_0$ , with  $C_0=1.65 \times 10^{-11}$ ,  $m=3$ , according to IIW [7] (in years)

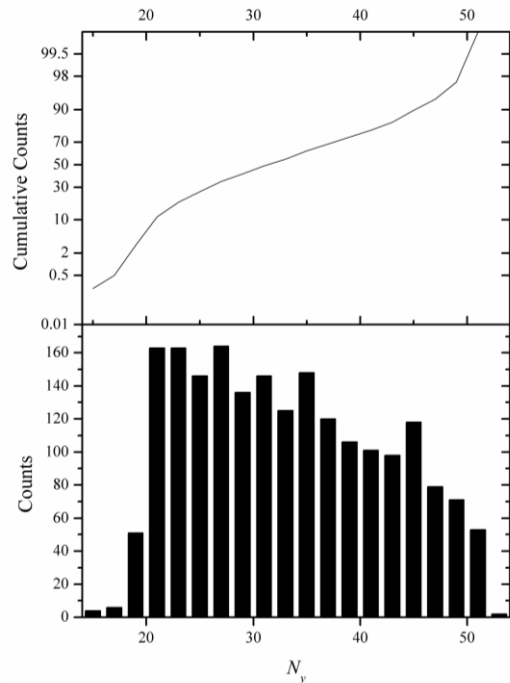


图 16 随机初裂纹深度扩展至宏观裂纹的寿命分布及累积概率, 其中  $C_0=0.183 \times 10^{-12}$ ,  $m=3$  [19]

(单位: 年)

Fig. 16 Distribution of macro-crack initiation life  $N_y$  for different  $a_0$ , with  $C_0=0.183 \times 10^{-12}$ ,  $m=3$ , according to Gurney [19] (in years)

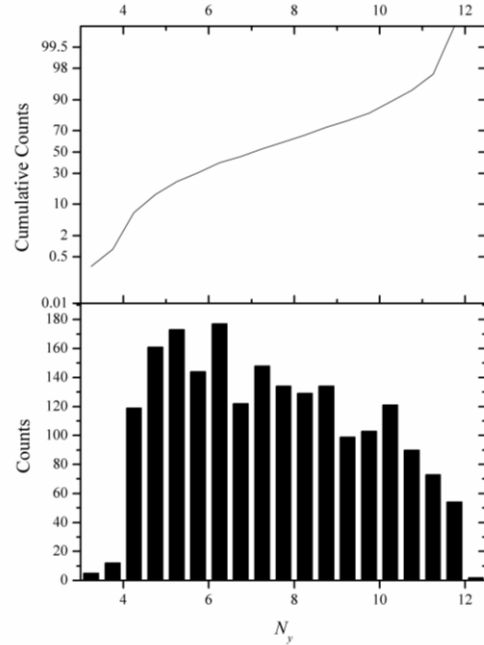


图 17 考虑应力比的宏观裂纹形成寿命分布, 其中  $C_0=4.2 \times 10^{-12}$ ,  $m=2.98$ ,  $n=-0.93$  [20] (单位: 年)

Fig. 17 Distribution of macro-crack initiation life  $N_y$  for different  $a_0$ , with  $C_0=4.2 \times 10^{-12}$ ,  $m=2.98$ ,  $n=-0.93$ , according to Liu [20] (in years)

## 4 结语

本文基于扩展有限元法, 提出了均质化方法及其在焊接接头的裂纹扩展研究中的应用。通过均质化方法对大量含缺陷的代表体积元进行计算, 给出了适用于裂纹早期扩展的均质化系数。

然后进行了该均质化方法在正交异性钢桥面板焊缝中的实际应用。通过对大量含不同缺陷的代表体积元进行均质化, 并将结果与现场实测车辆荷载响应结合, 得到了考虑随机缺陷和随机车流荷载的宏观裂纹形成寿命。结果表明, 夹杂和气孔的作用导致了寿命存在一定的随机性, 但最主要因素在于选择的初始裂纹深度、Paris 公式的形式及其中的常量取值。由之前的研究中提出的多组不同 Paris 公式的

形式及取值, 计算和比较了宏观裂纹形成寿命的分布。

所提出的方法显示出对疲劳裂纹扩展的早期阶段由随机缺陷和随机车流荷载的评估能力, 其结果有利于估计宏观裂纹形成寿命分布, 提供设计建议及制定管养维护策略。然而, 未来仍然需要对真实的缺陷尺寸、位置开展研究, 结合多尺度方法考虑随机车流的影响, 以建立一个可预测大型结构的焊缝疲劳寿命的完整体系。

#### 参考文献：

#### References：

- [1] KOLSTEIN M.H., Fatigue classification of welded joints in orthotropic steel bridge decks, TU Delft, Delft University of Technology, 2007.
- [2] AYGUL M., et al., Modelling and fatigue life assessment of orthotropic bridge deck details using FEM, *International Journal of Fatigue*, 40 (2012) 129-142.
- [3] CHENG X., et al., Residual stress modification by post-weld treatment and its beneficial effect on fatigue strength of welded structures, *International Journal of Fatigue*, 25 (2003) 1259-1269.
- [4] BARSOUM Z., BARSOUM I., Residual stress effects on fatigue life of welded structures using LEFM, *Engineering Failure Analysis*, 16 (2009) 449-467.
- [5] ZERBST U., MADIA M., HELLMANN D., An analytical fracture mechanics model for estimation of S-N curves of metallic alloys containing large second phase particles, *Engineering Fracture Mechanics*, 82 (2012) 115-134.
- [6] TABATABAEIPOUR M., HETTLER J., DELRUE S., VAN DEN ABEELE K., Non-destructive ultrasonic examination of root defects in friction stir welded butt-joints, *NDT & E International*, 80 (2016) 23-34.
- [7] HOBACHER A., RECOMMENDATIONS FOR FATIGUE DESIGN OF WELDED JOINTS AND COMPONENTS, (2008).
- [8] SCHIJVE J., Fatigue predictions of welded joints and the effective notch stress concept, *International Journal of Fatigue*, 45 (2012) 31-38.
- [9] BELYTSCHKO T., BLACK T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International journal for numerical methods in engineering*, 45 (1999) 601-620.
- [10] BELYTSCHKO T., MOES N., USUI S., PARIMI C., Arbitrary discontinuities in finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 (2001) 993-1013.
- [11] MOES N., CLOIREC M., CARTRAUD P., REMACLE J.F., A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192 (2003) 3163-3177.
- [12] SUKUMAR N., CHOPP D.L., MOES N., BELYTSCHKO T., Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 (2001) 6183-6200.
- [13] TANAKA K., Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis, *Engineering Fracture Mechanics*, 6 (1974) 493-507.
- [14] HIRIYUR B., WAISMAN H., DEODATIS G., Uncertainty quantification in homogenization of heterogeneous microstructures modeled by XFEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88 (2011) 257-278.
- [15] KUMAR S., SINGH I.V., MISHRA B.K., A homogenized XFEM approach to simulate fatigue crack growth problems, *Computers & Structures*, 150 (2015) 1-22.
- [16] WANG Y., LI Z.X., LI A.Q., Fatigue crack growth model for assessing reliability of box-girders for cable-stayed bridge combining SHMS with strain data, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 55 (2011) 60-67.
- [17] BOWNESS D., LEE M.M.K., Prediction of weld toe magnification factors for semi-elliptical cracks in T-butt joints, *International Journal of Fatigue*, 22 (2000) 369-387.
- [18] NBN, EN 1991-2, Eurocode 1: Actions on structures - Part 2: Traffic loads on bridges, in, 2004.
- [19] GURNEY T.R., The fatigue strength of transverse fillet welded joints: A study of the influence of joint geometry, Elsevier, 1991.
- [20] 刘艳萍. 焊接桥梁钢疲劳裂纹扩展行为研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2010.  
LIU Y.P., Study on Fatigue Crack Growth Behavior in Welded Steel Plates Used for Bridges (in Chinese), in, Huazhong University of Science and Technology, 2010.

