

UN MODELO CONTINUO-DISCRETO PARA EL ESTUDIO DE LA EVOLUCIÓN DIARIA DEL DESEQUILIBRIO EN LAS REDES DE TRANSPORTE URBANO

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b}

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur. Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras clave: asignación de tráfico, día-a-día, modelo continuo anisótropo.

Resumen. El problema de asignación de tráfico urbano de la ingeniería de transporte consiste en la determinación de los flujos horarios de vehículos en cada arteria de una ciudad. Tal determinación se basa en el conocido principio de Wardrop que asume condiciones de equilibrio, es decir las variables involucradas son independientes del tiempo.

Cuando en la red de transporte se produce una modificación de las características de la circulación, por ejemplo por trabajos de construcción en ciertos tramos, los usuarios se ven forzados a tomar otros caminos y en consecuencia se altera el funcionamiento normal de la red. Esto es, se rompe el equilibrio temporalmente hasta que la situación alcanza un nuevo estado de equilibrio.

En este trabajo se estudia tal proceso de evolución del flujo en desequilibrio después de la perturbación de cierta parte de la red. Se propone un modelo dinámico de evolución diaria hacia el nuevo estado de equilibrio que describe el comportamiento de los conductores intentando minimizar su tiempo de viaje.

En tal modelo, la red troncal de autopistas se representa de manera discreta como un conjunto de arcos y nodos mientras que las calles y avenidas de la ciudad se aproximan mediante un modelo continuo, interactuando ambos sistemas en los puntos de intercambio.

Se proporciona un ejemplo numérico para ilustrar acerca de las posibilidades de tal modelo.

1 INTRODUCCIÓN

La congestión de tráfico es un problema cotidiano para los habitantes de las grandes ciudades. En determinadas horas del día, la gran cantidad de vehículos en la red de transporte produce demoras en la circulación que afectan física y anímicamente a los conductores y a los habitantes en general.

Las ciudades están en constante expansión y para atender la creciente demanda de viajes la red de transporte se modifica y se agranda continuamente requiriendo una cuidadosa planificación. En tal proceso se utilizan modelos matemáticos que permiten obtener patrones de flujo y tiempos de viaje de acuerdo a la disponibilidad de rutas y servicios, a la demanda de viajes y a criterios de selección de rutas por parte de los usuarios.

La demanda de viajes está determinada por una serie de factores tales como el uso del suelo (ubicación de centros comerciales, edificios de oficinas, complejos residenciales), las características socioeconómicas de las personas y la disponibilidad de instalaciones y servicios de transporte. La disponibilidad de rutas involucra las características de las calles existentes (cantidad de carriles, accesos, semaforización, etc.) y sus posibilidades de ampliación. Por otra parte, el comportamiento colectivo de los usuarios en cuanto a la elección de rutas se basa en el denominado primer principio de [Wardrop \(1952\)](#). Este principio establece que “para cada par origen-destino, el tiempo de viaje es igual sobre todos los caminos usados y también menor o igual al tiempo de viaje que experimentaría un vehículo aislado por un camino no utilizado”, es decir que todos los conductores elegirán las rutas de mínimo tiempo (o costo) de recorrido y ninguno podrá experimentar un tiempo menor utilizando otra ruta.

A partir de tal principio puede formularse el denominado problema de asignación de viajes, cuyas incógnitas corresponden a los flujos de tráfico circulando en cada una de las arterias con destinos diferentes así como los tiempos de viaje entre orígenes y destinos.

Para ello, la ciudad se divide en zonas donde las características de demanda son relativamente homogéneas y se asume que toda la actividad de las mismas se concentra en puntos denominados “centroides” que generan y atraen los viajes hacia y desde otras zonas. Matemáticamente, la ciudad se modela como un grafo dirigido donde los “centroides” y las intersecciones de calles son los nodos, y los tramos de ruta entre intersecciones constituyen los arcos de dicho grafo. Los arcos tienen asociadas funciones que representan el costo de viajar a través de ellos.

Con estos datos es posible construir un problema variacional equivalente al primer principio de Wardrop, tal como el propuesto por [Beckmann \(1956\)](#). Esta formulación conduce a un problema de optimización matemática de gran escala (enfoque discreto clásico).

Recientemente se ha presentado un enfoque diferente que representa a la red de calles en una ciudad como un medio poroso continuo. De acuerdo a este modelo el problema de asignación de tráfico se puede representar con ecuaciones análogas a las de flujos en medios porosos con permeabilidad no lineal ([Dominguez, 2013](#)). Se ha mostrado que tal enfoque resulta más conveniente desde el punto de vista computacional que el clásico enfoque discreto ([Beckmann, 1956](#)).

Sin embargo las redes de transporte en las grandes ciudades están compuestas por dos tipos de vías diferentes, por un lado las avenidas y calles que forman el entramado continuo y por otro los tramos de autopistas que tienen conexión con las primeras solo en las rampas de acceso. Éstas últimas quedan adecuadamente representadas mediante un enfoque discreto. En consecuencia el problema de asignación de tráfico urbano puede ser formulado mediante un modelo continuo-discreto híbrido que trata a las calles y avenidas como un medio poroso continuo y a las autopistas como un medio discreto. Las incógnitas de las ecuaciones

fundamentales corresponden a los tiempos de viaje desde un punto de la red hacia los puntos de destino.

En años recientes se ha comenzado a estudiar otro tipo de problemas de la red de tráfico relacionado con su dinámica, existiendo diferentes escalas para analizarla. Ciertos fenómenos tales como la formación de colas y los embotellamientos pueden estudiarse a partir de la dinámica vehicular dentro de cada tramo. Otros problemas analizan la dinámica en una escala de tiempo horaria tal como la elección de ruta de los conductores ante un cambio en la demanda de viajes en períodos menores a un día (problema de asignación dinámica). Finalmente existe el problema de estudiar cual es la evolución del patrón de tráfico cuando aparece una modificación en la red que provoca un cambio en la elección de ruta que conduce a un nuevo estado de equilibrio. Este último problema conocido como modelación de tráfico día-a-día es el que se analiza en este trabajo y pretende determinar la evolución de los flujos en cada arteria de la red entre el original y el nuevo estado de equilibrio.

Se han propuesto diversos modelos para analizar esta problemática. Los más antiguos tratan con las variables de flujo a lo largo del camino entre los puntos de origen y destino (Friesz et al., 1994; Zhang y Nagurney, 1996; Yang y Liu, 2007). Más recientemente se han desarrollado modelos dinámicos día-a-día basados en los flujos en cada arteria (He et al., 2010; Han y Du, 2012). Estos modelos han utilizado generalmente el enfoque tradicional de asignación de tráfico desde el punto de vista discreto, sin embargo también se ha utilizado el modelo dinámico día-a-día basado en los flujos en cada arteria en combinación con un modelo de asignación continuo desarrollado por Wong et al. (1998). La teoría de estos autores es muy eficiente para analizar el problema de asignación de tráfico en la red de transporte superficial urbana (calles y avenidas), sin embargo carece de una metodología para la calibración adecuada de algunas de las ecuaciones empíricas en las que está basada y asimismo no considera la anisotropía de la red urbana. Estos aspectos fueron subsanados en el modelo desarrollado por los autores de este trabajo (Cortínez y Dominguez, 2013; Dominguez, 2013).

En consecuencia, en este estudio se propone un nuevo modelo dinámico día-a-día de tráfico que se basa en las ideas de Guo y Liu (2011) aunque adoptando un modelo continuo-discreto que permite considerar en forma más precisa las características de la red tal como el desarrollado por Dominguez y Cortínez (2011, 2012).

Asimismo en este trabajo se presenta una derivación del problema de asignación de tráfico que no hace uso de la formulación de Beckmann a diferencia de trabajos previos (Cortínez y Dominguez, 2013; Wong et al., 2002).

En la sección 2 se describe el modelo continuo-discreto de asignación de tráfico urbano desarrollado por los autores y en la sección 3 se presenta el modelo dinámico día-a-día propuesto. En la sección 4 se expone el método computacional de solución del problema presentado y luego, en la sección 5 se muestran dos ejemplos numéricos. Finalmente se enuncian las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

2 ASIGNACIÓN DE TRÁFICO. MODELO CONTINUO-DISCRETO

El problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos horarios de vehículos x_a (veh/h) en cada segmento a ($a=1,2,\dots,A$) de una red de tráfico a partir del conocimiento de la tasa horaria de viajes Q_j (veh/h) generados en cada nodo j ($j=1,2,\dots,R$) de la red, de la localización de los centros de destino y de la estructura de la red de tráfico.

En esta sección se presenta un modelo continuo-discreto para la formulación del problema de asignación (Dominguez, 2013).

El modelo consiste básicamente en la utilización de un enfoque continuo para representar

el tráfico en las calles de la ciudad acoplado a una formulación discreta para estudiar el tráfico en las autopistas. Ambos modelos interactúan en los puntos de acceso a las autopistas. En estos puntos, los usuarios pueden optar por realizar sus viajes a través de las calles de la ciudad o acceder a las autopistas, de acuerdo al primer principio de Wardrop (1952). Cuando el sistema está en equilibrio, este costo por cualquiera de las rutas es el mismo.

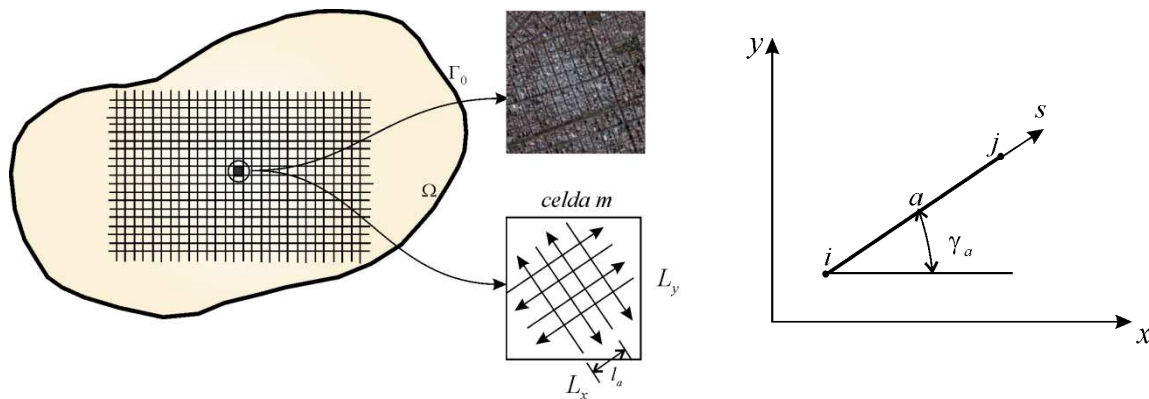


Figura 1: Características del modelo de tráfico

El tiempo de viaje en un tramo de calle o arco a (Figura 1) entre los nodos i y j es una función creciente del flujo en el mismo es decir $t_a = F(x_a)$, relación que se expresa mediante fórmulas empíricas ampliamente utilizadas tales como la propuesta en el Manual de Asignación de Tráfico de la U.S. Bureau of Public Roads (1964), conocida como función BPR:

$$t_a = t_{a_0} \left(1 + \alpha_a \left((x_a + x_{Ra}) / C_a \right)^{\varphi_a} \right) \quad (1)$$

donde x_{Ra} corresponde a flujos que no siguen el primer principio de Wardrop, por ejemplo el correspondiente a transporte público, C_a es la capacidad del arco a y α_a y φ_a son parámetros que tienen en cuenta las características viales.

Asimismo es posible invertir esta expresión y obtener el flujo en función del tiempo de viaje como $x_a = G(t_a)$. En este caso:

$$x_a(t_a) = \left(\frac{t_a - t_{a_0}}{\alpha_a t_{a_0}} C_a^{\varphi_a} \right)^{\frac{1}{\varphi_a}} - x_{Ra} \quad (2)$$

Para facilitar la explicación del modelo se considera inicialmente el caso de una ciudad monocéntrica.

En todo nodo j perteneciente a la red de tráfico, es posible establecer la condición de conservación de flujo en régimen estacionario, es decir, se puede escribir la siguiente ecuación de continuidad entre los flujos entrantes y salientes desde los nodos adyacentes i ($i = 1, 2, \dots, M_j$) y la cantidad de viajes generados en el mismo Q_j :

$$\sum_{i=1}^{M_j} x_a \lambda_{ij} + Q_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, R \quad (3)$$

donde λ_{ij} vale 1 si el flujo va desde i hacia j , vale -1 si va en sentido contrario.

Por otra parte, el problema de asignación de tráfico basado en el primer principio de Wardrop (1952) fundamentalmente significa que el tiempo de viaje desde un punto dado hasta el centro de destino será el mismo para todos una vez que hayan seleccionado su ruta. Luego es posible definir una función $u(x, y)$ que expresa el tiempo de viaje desde la localización (x, y) hasta el punto de destino.

El tiempo de recorrido del arco a puede expresarse como la diferencia entre el tiempo que requiere movilizarse desde el punto i hasta el destino y el que requiere ir desde el punto j hasta el mismo, es decir:

$$t_a = u_i - u_j = \Delta u \quad (4)$$

Es posible observar que la introducción de (4) en (2) y el resultado en (3) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que permite obtener las variables u_j y entonces a partir de (4) y (2) los flujos en cada arteria de la red considerada. Obviamente si la red es muy grande tal sistema de ecuaciones también lo será.

Con el propósito de disminuir la carga computacional se aplica el método de Galerkin sobre la ecuación (3) obteniendo la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^R \sum_{i=1}^{M_j} x_a \lambda_{ij} \delta u_j + \sum_{j=1}^R Q_j \delta u_j = 0 \quad (5)$$

Utilizando la definición de λ_{ij} se puede reescribir (5) como:

$$\sum_{a=1}^A x_a \delta t_a + \sum_{j=1}^R Q_j \delta u_j = 0 \quad (6)$$

Debe observarse en la ecuación (6) que δu_j corresponde a una variación virtual del valor de u_j y que $\delta t_a = \delta u_i - \delta u_j$.

Para desarrollar un modelo continuo se considera la ciudad como una región Ω en la cual la tasa de viajes q (veh/h/km²) se genera de manera distribuida en la superficie de la misma. Se asume asimismo que la ciudad está delimitada por un borde exterior Γ_0 a través del cual no ingresan ni egresan vehículos (Figura 1), o donde se conoce el flujo vehicular que lo atraviesa.

Se divide el dominio completo de la ciudad Ω en M celdas de área $L_x L_y$, donde las longitudes L_x y L_y son pequeñas con respecto a las dimensiones de la ciudad y se supone que en el área que se examina existe un sistema de calles paralelas de tal manera que para cada calle en una dirección y sentido, existe otra en igual dirección y sentido contrario.

A partir de la definición (4), considerando la función $u(x, y)$ como continua y derivable, el tiempo de viaje puede aproximarse como:

$$t_a = \Delta u \approx -\frac{\partial u}{\partial s} l_a = -l_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma_a + \frac{\partial u}{\partial y} \sen \gamma_a \right) \quad (7)$$

Por otra parte, la ecuación (6) considerando la división de la ciudad en celdas se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{a \in m} x_a(t_a) \delta t_a + \sum_{j=1}^R Q_j \delta u_j = 0 \quad (8)$$

Teniendo que cuenta que:

$$\delta t_a = \left(\frac{\partial t_a}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial t_a}{\partial u_y} \delta u_y \right) \quad (9)$$

donde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, multiplicando y dividiendo por $L_x L_y$ y el primer término de (8) por t_a y tomando a continuación el límite cuando el área $L_x L_y$ tiende a un diferencial de área $d\Omega$ se llega a la siguiente expresión (Cortínez y Dominguez, 2013):

$$\delta\omega = \int_{\Omega} \delta u q d\Omega - \int_{\Omega} (k_x u_x \delta u_x + k_{xy} u_x \delta u_y + k_{xy} u_y \delta u_x + k_y u_y \delta u_y) d\Omega \quad (10)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_x &= \sum_{a \in m} \frac{x_a(t_a)}{t_a} \frac{l_a^2 \cos^2 \gamma_a}{L_x L_y} \\ k_y &= \sum_{a \in m} \frac{x_a(t_a)}{t_a} \frac{l_a^2 \sin^2 \gamma_a}{L_x L_y} \\ k_{xy} &= \sum_{a \in m} \frac{x_a(t_a)}{t_a} \frac{l_a^2 \cos \gamma \sin \gamma}{L_x L_y} \end{aligned} \quad (11)$$

Integrando por partes el segundo término de (10) y teniendo en cuenta que δu es arbitraria se obtiene la ecuación diferencial y las correspondientes condiciones de contorno que resuelven el problema continuo de asignación de tráfico:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (12)$$

La condición a cumplir en el borde de la ciudad es:

$$f_x n_x + f_y n_y = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_0 \quad (13)$$

donde

$$\begin{aligned} f_x &= - \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ f_y &= - \left(k_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

mientras que n_x y n_y son las componentes del versor normal a la curva que define el contorno de la misma. Asimismo, en el punto de destino (x_s, y_s) , el tiempo de viaje debe ser nulo, y entonces

$$u(x_s, y_s) = 0 \quad (15)$$

Para la red de autopistas el tiempo de viaje desde un nodo J ($J = 1, 2, \dots, N$) hasta el punto de destino se designa U_j , luego, el tiempo de recorrido en cada tramo l ($l = 1, 2, \dots, L$) de

autopistas se expresa como:

$$t_l = (U_I - U_J) \tag{16}$$

Para cada nodo de autopistas, algunos de los cuales coinciden con los de la red densa de calles (rampas de acceso), debe verificarse la ecuación (3) conjuntamente con la (2) y la (16). Estas ecuaciones deben ser resueltas en forma simultánea con la ecuación (12) considerando además que la tasa de generación de viajes debe contemplar el ingreso/egreso desde y hacia la autopista por las rampas de acceso, es decir debe reescribirse de esta manera:

$$\hat{q} = q - \sum_{J=1}^N Q_J \delta(x - x_J) \tag{17}$$

donde $\delta(x - x_J)$ es la distribución delta de Dirac y Q_J es la cantidad de viajes que, en el acceso J ingresan (si son positivos) o salen (si son negativos) de la autopista.

Asimismo debe contemplarse que en cada nodo de intercambio, el tiempo de viaje hasta el punto de destino es el mismo en cualquier sistema, es decir:

$$U_J = u(x_J, y_J) \tag{18}$$

En definitiva, el problema continuo-discreto consiste en resolver la ecuación diferencial (12) con sus correspondientes condiciones de contorno (13 a 15) conjuntamente con el sistema de ecuaciones algebraicas (3) para el conjunto de nodos N del sistema discreto ($J = 1, 2, \dots, N$).

El modelo desarrollado se puede generalizar para considerar múltiples destinos s y diferentes clases de usuarios c (para mayores detalles consultar [Dominguez, 2013](#)) en cuyo caso es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial x} + k_{xy}^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{xy}^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial x} + k_y^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial y} \right) + q^{c,s} - \sum_{J=1}^N Q_J^{c,s} \delta(x - x_J) = 0 \tag{19}$$

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad s = 1, 2, \dots, M \quad c = 1, 2, \dots, C$$

$$f_x^{c,s} n_x + f_y^{c,s} n_y = 0; \quad u^{c,s}(x_c, y_c) = 0 \tag{20}$$

$$f_x^{c,s} = - \left(k_x^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial x} + k_{xy}^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial y} \right)$$

$$f_y^{c,s} = - \left(k_{xy}^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial x} + k_y^{c,s} \frac{\partial u^{c,s}}{\partial y} \right)$$

donde los coeficientes $k_x^{c,s}$, $k_y^{c,s}$ y $k_{xy}^{c,s}$ son función de:

$$x_a^{c,s} = \left(\frac{t_a^{c,s} - t_{a_0}^{c,s}}{t_{a_0}^{c,s}} \frac{C_a^{\phi_a^c}}{\alpha_a^c} \right)^{\frac{1}{\phi_a^c}} - \left(\sum_{i,i \neq s} \sum_{j,j \neq c} x_a^{j,i} + x_{Ra} \right) \quad \text{y} \quad t_a^{c,s} = -l_a \left(\frac{\partial u^{c,s}}{\partial x} \cos \gamma_a + \frac{\partial u^{c,s}}{\partial y} \sin \gamma_a \right) \tag{21}$$

conjuntamente con los sistemas de ecuaciones algebraicas correspondientes para cada destino y cada clase de usuario:

$$Q_J^{c,s} = -\sum_{l=1}^{M_J} \lambda_{lj} x_l^{c,s} (U_l^{c,s}, U_J^{c,s}) \quad J = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

Y además debe cumplirse la ecuación de compatibilidad:

$$U_J^{c,s} = u^{c,s}(x_J, y_J) \quad (23)$$

3 MODELO DINÁMICO DE EVOLUCIÓN DIARIA DEL FLUJO DE TRÁFICO

La forma general del problema dinámico (día a día) de asignación de tráfico en función del flujo vehicular es la siguiente (He et al., 2010):

$$\dot{\mathbf{x}} = \eta(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \quad (24)$$

Donde $\dot{\mathbf{x}}$ es la derivada del vector de flujo en los arcos con respecto al tiempo, η es un parámetro constante positivo que determina la tasa de cambio del flujo y $(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$ corresponde a la dirección de dicho cambio.

Esto significa que en un día t , el patrón de flujos en los arcos tiende a moverse desde la configuración actual \mathbf{x} hacia una configuración "objetivo" $\bar{\mathbf{x}}$ basada en la situación actual.

El modelo queda esencialmente determinado por la manera de definir el flujo objetivo. En el trabajo de Guo y Liu (2011) dicho flujo queda definido por la minimización de dos funciones pesadas. La primera es la que corresponde a la minimización del tiempo de viaje de todos los usuarios de la red en la situación actual. Esto significa la búsqueda del menor tiempo de recorrido utilizando las funciones de tiempo de tiempo de recorrido de arco en términos del flujo existente. La segunda corresponde a la diferencia entre el flujo objetivo y el actual. Esta última reflejaría la inercia de los conductores, es decir la resistencia al cambio de ruta.

En dicho trabajo se demuestra que el punto fijo del problema dinámico día-a-día propuesto es el patrón de flujos del EU para la nueva situación. En el presente modelo se propone formular el problema de Guo y Liu (2011) a partir del tiempo de viaje desde cada punto de la ciudad hasta el punto de destino en lugar de los flujos en los arcos.

El problema para una ciudad monocéntrica se puede plantear de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta(\bar{u} - u) \quad (25)$$

donde \bar{u} se calcula de acuerdo a (12) y sus correspondientes valores de contorno, que en este caso se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{k}_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{k}_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{k}_{xy} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{k}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + q - \sum_{J=1}^N Q_J \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J) = 0 \quad (26)$$

y:

$$\begin{aligned} \bar{k}_x &= \sum_{a \in m} \frac{x_a^t(t_a^t)}{\bar{t}_a} \frac{l_a^2 \cos^2 \gamma_a}{L_x L_y} \\ \bar{k}_y &= \sum_{a \in m} \frac{x_a^t(t_a^t)}{\bar{t}_a} \frac{l_a^2 \sin^2 \gamma_a}{L_x L_y} \\ \bar{k}_{xy} &= \sum_{a \in m} \frac{x_a^t(t_a^t)}{\bar{t}_a} \frac{l_a^2 \cos \gamma_a \sin \gamma_a}{L_x L_y} \end{aligned} \quad (27)$$

$$Q_J^{c,s} = -\sum_{I=1}^{M_J} \lambda_{IJ} \lambda_I^{c,s} (\bar{U}_I^{c,s}, \bar{U}_J^{c,s}) \quad (28)$$

$$\bar{U}_J^{c,s} = \bar{u}^{c,s}(x_J, y_J) \quad (29)$$

Como se demostrará en los ejemplos numéricos el modelo planteado evoluciona hacia un nuevo estado de equilibrio de usuario.

Debe observarse que en los coeficientes (27), el tiempo de viaje \bar{t}_a se calcula con la variable \bar{u} mientras que el flujo en los arcos se obtiene para el tiempo que corresponde a la configuración actual t . Tal modelo corresponde a la búsqueda del tiempo de minimización de cada conductor asumiendo que conocen las características del flujo en el estado actual.

Asimismo y siguiendo las ideas de Guo y Liu (2011) es posible formular una versión discreta del modelo. En este caso:

$$u^{t+1} = u^t + \eta \Delta t (\bar{u} - u^t) \quad (30)$$

En la versión discreta Δt corresponde a 1 día y el valor de η es el que determina la suavidad de la trayectoria entre los estados de equilibrio inicial y final. Valores muy grandes del mismo pueden hacer que no haya convergencia (Han y Du, 2012). Al utilizar la versión discreta debe procurarse que $\bar{u} - u^t$ no sea demasiado grande a efectos de representar la inercia del sistema. Esto se puede considerar agregando en el miembro derecho de la ecuación diferencial (26) el siguiente término:

$$-\kappa(\bar{u} - u^t)^2 \quad (31)$$

Donde κ es una constante que mide la inercia del sistema. Esta constante, el valor de η , así como la conveniencia de utilizar la versión continua o discreta, deben determinarse a partir de observaciones de situaciones reales de perturbación de redes de transporte (He y Liu, 2012).

Debe notarse que la expresión (30) es válida aún en la versión continua tomando un Δt pequeño.

Es fácil generalizar este modelo para un problema con varios centros y usuarios siguiendo los pasos de las ecuaciones (19) a (23).

4 SOLUCIÓN COMPUTACIONAL

La solución de la ecuación diferencial no lineal del problema de asignación requiere técnicas aproximadas que permiten transformarla, mediante algún procedimiento de discretización, en un sistema de ecuaciones algebraicas, aunque de menor escala que el sistema original (3) que pueden resolverse computacionalmente sin dificultad. En este trabajo se utiliza el software FlexPDE[®] que resuelve ecuaciones diferenciales a derivadas parciales utilizando el Método de Elementos Finitos.

En dicho programa es necesario escribir en un archivo de texto, siguiendo un orden preestablecido, las variables del problema, las constantes y ecuaciones auxiliares, las ecuaciones fundamentales y las condiciones de contorno conjuntamente con la geometría del problema. Asimismo se deben definir los tipos de salidas gráficas que se requieren.

El proceso de discretización es automático a partir de la fijación de un límite de error en la solución de las ecuaciones algebraicas que se realiza por el método de Newton-Raphson.

Para el problema presentado en la sección 3 el algoritmo es el siguiente:

Paso 1. Se calcula el equilibrio de usuario de la situación original y se almacenan los

valores del tiempo de viaje u' desde cada punto de la ciudad hasta el destino y los flujos en los arcos.

Paso 2: Se recuperan los valores de tiempo de viaje y flujos en los arcos obtenidos en el Paso 1 (o en el Paso 3, luego del cálculo inicial). El tiempo de viaje se asigna como valor inicial de \bar{u} (26) y el flujo en los arcos se utiliza en la definición de los coeficientes \bar{k}_x, \bar{k}_y y \bar{k}_{xy} . Se resuelve la ecuación diferencial (26) y se obtiene \bar{u} .

Paso 3: A partir de \bar{u} se calcula el tiempo de viaje u^{t+1} con la expresión (30) y los nuevos valores de flujo en los arcos (2) de las calles comunes y las autopistas. Se almacenan estos valores.

Paso 4: Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que la diferencia entre los flujos calculados en dos pasos sucesivos no supere un cierto valor ε .

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para ejemplificar el modelo propuesto se presenta el estudio de la evolución del tráfico en las autopistas de una ciudad en dos situaciones diferentes. En el primer caso se investiga la posible dinámica cuando se reduce la capacidad de uno de los tramos, por ejemplo por construcción de obras civiles. En el segundo caso se estudia la evolución ante un cambio en la demanda de viajes.

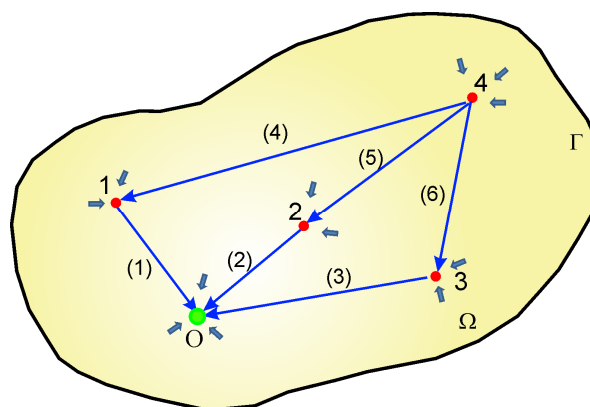


Figura 2: Esquema de la red de autopistas

En ambos casos se analiza una ciudad como la de la Figura 2, de aproximadamente 600 km^2 de superficie, en la hora pico de la mañana cuando los viajes que se generan en la ciudad se dirigen hacia el centro O. La red de tráfico está compuesta por un conjunto denso de calles comunes y una sencilla red de autopistas de 6 tramos y 4 accesos.

Se asume una demanda de viajes constante y uniforme $q = 100 \text{ veh/h/km}^2$. En las autopistas se adopta como función de tiempo de viaje $t_l = t_{l_0} (1 + 0,85(x_l / C_l)^5)$ y en las calles comunes $t_a = t_{a_0} (1 + 0,15(x_a / C_a)^4)$. El tiempo a flujo libre t_{l_0} en las autopistas se calcula para una velocidad máxima de circulación de 120 km/h y t_{a_0} en las calles comunes para una velocidad de 40 km/h . La capacidad de los tramos 1, 2 y 3 de las autopistas se fija en 12000 veh/h y la correspondiente a los tramos 4, 5 y 6 en 6000 veh/h . Se asume que las calles comunes tienen una capacidad de 600 veh/h , una longitud de 100 metros y que están orientadas a 0° y 90° con respecto a los ejes coordenados. Para el cálculo en el sistema continuo se adoptan celdas de $0,8 \times 0,8 \text{ km}^2$.

5.1 Modificación de las características de la vía

En este caso se asume que la capacidad del tramo 5 se reduce de 6000 a 2000 veh/h.

En primer lugar se utiliza la versión discreta del modelo de evolución (30) para dos valores distintos de η y $\kappa=100$. Los resultados se muestran en las Figuras 3 y 4.

Debe observarse que el comportamiento tiende hacia el nuevo estado de equilibrio de una manera ligeramente oscilatoria sobre todo para altos valores de η . En general la dinámica termina en pequeñas oscilaciones alrededor del nuevo estado de equilibrio.

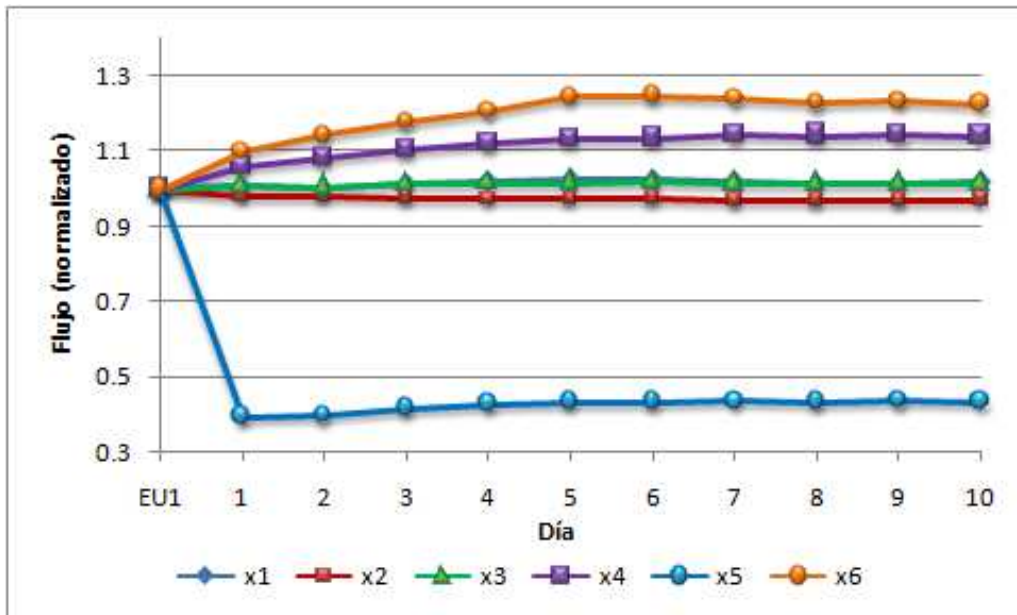


Figura 3: Evolución del flujo en los tramos de autopistas. $\eta = 0,3$

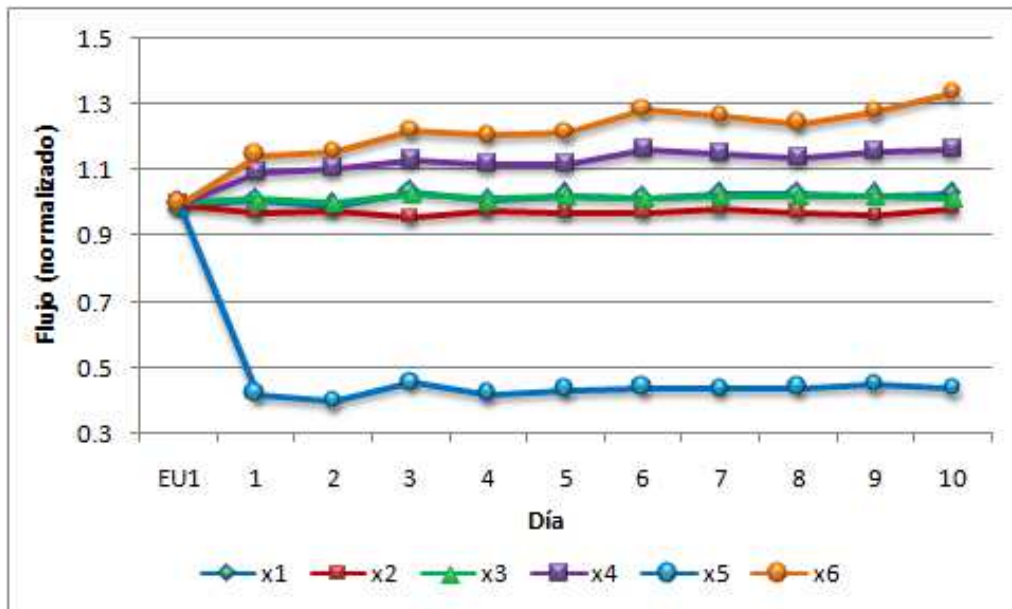


Figura 4: Evolución del flujo en los tramos de autopistas. $\eta = 0,5$

En segundo lugar se asume el modelo dinámico continuo para distintos valores de η (ecuación (30) para $\Delta t=0,1$ día). Los resultados se muestran en las Figuras 5 a 8. Las líneas

punteadas indican el valor del flujo en cada tramo cuando se alcanza el equilibrio de usuario para la nueva configuración. Se puede observar en las Figuras 5 y 6 que para la cantidad de pasos utilizada no se alcanza aún el equilibrio de usuario de la nueva configuración, sin embargo, para un valor mayor de η sí (Figuras 7 y 8).

Es posible apreciar en estas figuras que el modelo continuo produce una respuesta suave en la búsqueda del nuevo equilibrio excepto en los primeros instantes en los cuales puede producirse un cambio apreciable. Luego, la versión continua solo puede dar una idea de la escala temporal en la cual se manifiesta la evolución desde un equilibrio hacia otro una vez que pueden ser estimados los posibles valores de η .

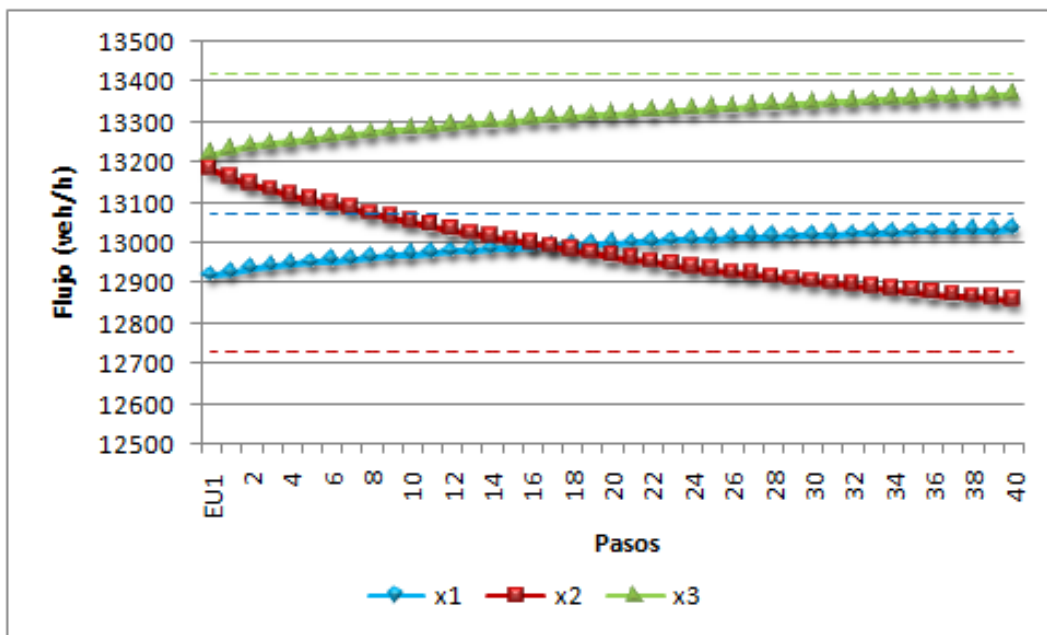


Figura 5: Evolución continua del flujo en los tramos 1 a 3 de autopistas. $\eta = 0,5$

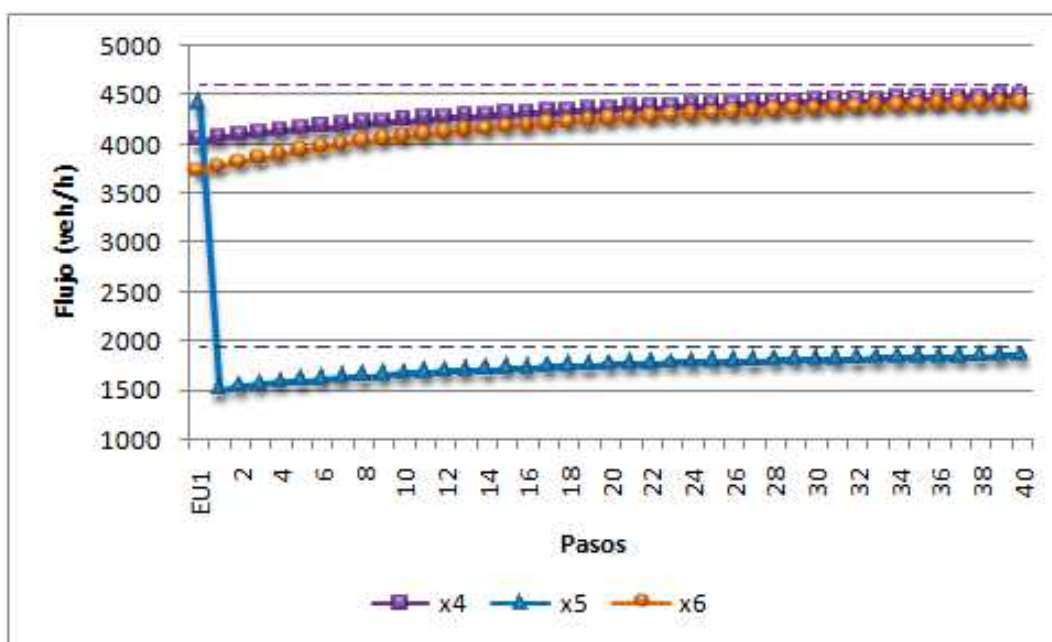


Figura 6: Evolución continua del flujo en los tramos 4 a 6 de autopistas. $\eta = 0,5$

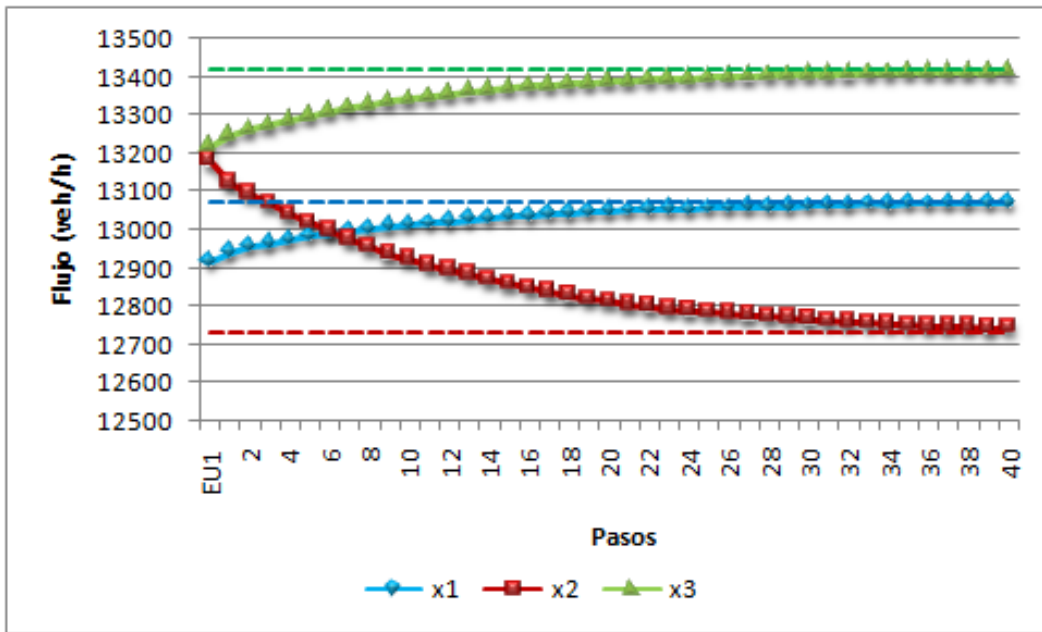


Figura 7: Evolución continua del flujo en los tramos 1 a 3 de autopistas. $\eta = 0,8$

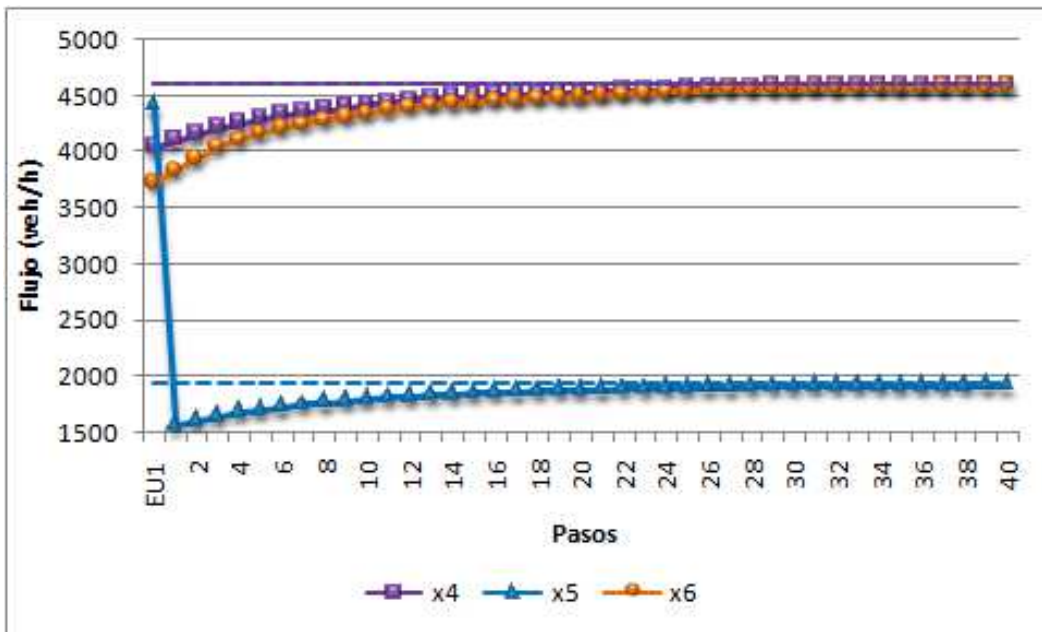


Figura 8: Evolución continua del flujo en los tramos 4 a 6 de autopistas. $\eta = 0,8$

5.2 Modificación de la demanda de viajes

En este ejemplo se muestra la evolución del tráfico en las autopistas, de acuerdo al modelo continuo, cuando la demanda de viajes se incrementa en un 15%.

La evolución desde el equilibrio de usuario original hacia el equilibrio de usuario correspondiente a la nueva configuración sigue un proceso difusivo cuya convergencia depende, al igual que en el caso anterior, del valor de η y del paso de tiempo seleccionado. En las Figuras 9 y 10 se muestra dicha evolución para $\eta = 0,8$.

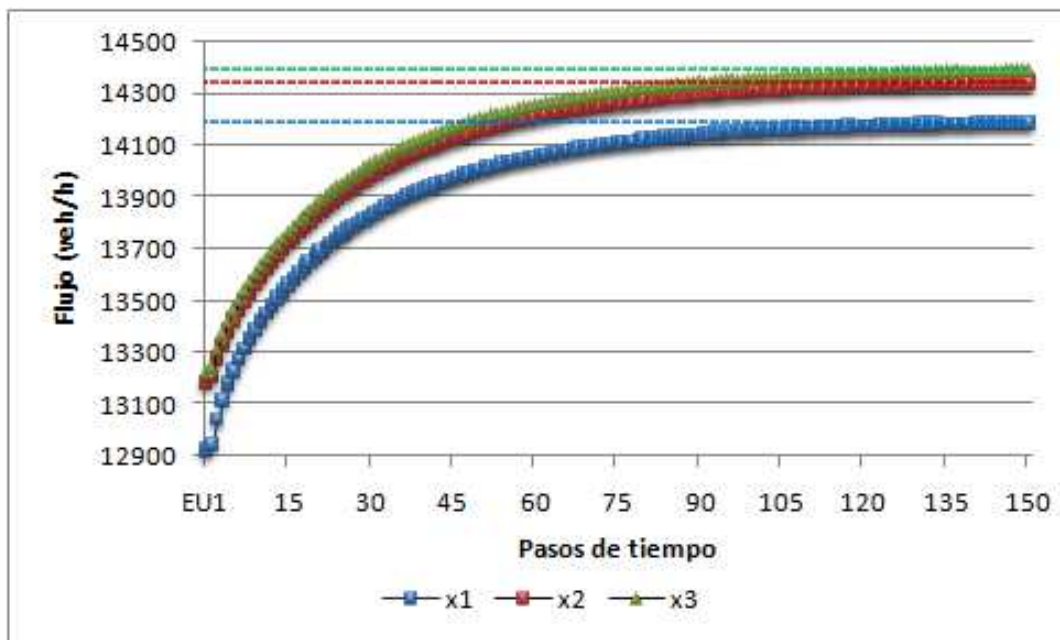


Figura 9: Evolución continua del flujo en los tramos 1 a 3 de autopistas ante un cambio de demanda. $\eta = 0,8$

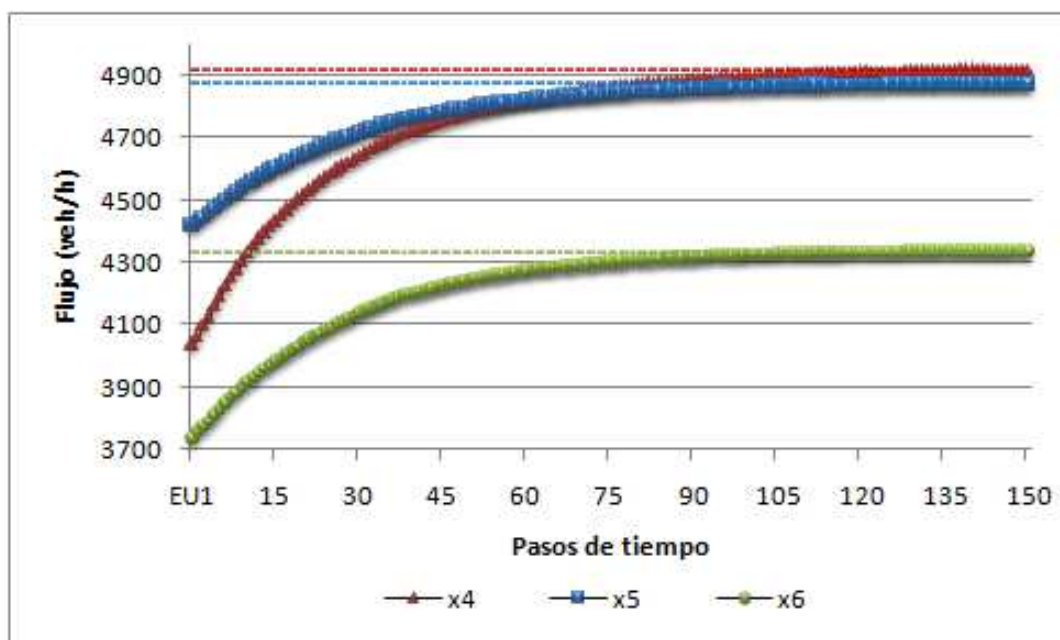


Figura 10: Evolución continua del flujo en los tramos 4 a 6 de autopistas ante un cambio de demanda. $\eta = 0,8$

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un resumen del modelo continuo-discreto de asignación de tráfico desarrollado por los autores. Es de destacar que en esta versión, tal formulación se ha elaborado a partir de una ecuación de continuidad de flujos en los nodos de la red de tráfico sin hacer uso de la tradicional formulación de Beckmann (1956), lo cual puede ser más conveniente desde un punto de vista pedagógico.

Se ha propuesto asimismo, en forma preliminar, un modelo para la evolución dinámica siguiendo las ideas de Guo y Liu (2011), pero basado en este modelo de asignación, tomando como variables fundamentales a los tiempos de viaje.

Debe observarse que las versiones discreta y continua del modelo presentado llevan a dinámicas muy diferentes. La formulación continua conduce a un modelo difusivo suave mediante el cual es posible obtener el tiempo que lleva pasar de un estado de equilibrio a otro luego de una perturbación en la red de transporte. En cambio, la versión discreta tiene una dinámica más rica que muestra las oscilaciones que se pueden producir en el camino.

La real naturaleza de la dinámica de la evolución del desequilibrio de tráfico va a depender de las características de las redes. Se necesitan realizar observaciones en situaciones reales de sistemas de transporte perturbados para decidir cual de las versiones representa mejor la realidad así como para determinar los coeficientes involucrados. Un primer paso en este sentido fue dado por He y Liu (2012).

Es importante remarcar que el modelo propuesto es también de utilidad para resolver el problema de asignación estacionario, ya que el marco teórico evolutivo es eficiente desde el punto de vista computacional para tratar con las no linealidades el modelo continuo-discreto presentado.

7 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte del proyecto “Modelos Matemáticos en Ingeniería Ambiental: Problemas Directos e Inversos” (Director: Dr. Víctor H. Cortínez, Universidad Tecnológica Nacional). Asimismo forma parte del trabajo de tesis desarrollado por Patricia N. Dominguez, bajo la dirección de V. H. Cortínez, para obtener el título de Dr. en Ingeniería en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Beckmann, M.J., Mc Guire, C.B. y Weinstein C.B. *Studies in Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1956.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Un modelo de difusión anisótropa para el estudio del tráfico urbano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 9(1):1-11, 2013.
- Dominguez, P.N. Un nuevo modelo continuo de asignación de tráfico para el diseño óptimo de redes de transporte urbano, Tesis de doctorado, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 2013.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V.H. Un nuevo modelo continuo-discreto para el estudio del tráfico urbano con autopistas. *Mecánica Computacional XXX*:3543-3560, 2011.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V.H. Un método continuo-discreto para el diseño óptimo de sistemas de transporte urbano. *Mecánica Computacional XXXI*:3335-3355, 2012.
- FlexPDE®. V.6, PDE Solutions Inc. www.pdesolutions.com, 2010.
- Friesz, T., Bernstein, D., Mehta, N., Tobin, R. y Ganjalizadeh, S. Day-to-day dynamic disequilibria and idealized traveller information systems. *Operations Research*, 42(6):1120-1136, 1994.
- Guo, X. y Liu, H. A day-to-day dynamic model in discrete/continuum transportation networks. *Transportation Research Record* 2263:66-72, 2011.
- Han, L. y Du. L. On a link-based day-to-day traffic assignment model. *Transportation Research Part B*, 46:72-84, 2012.
- He, X., Guo, X. y Liu, H. A link-based day-to-day traffic assignment model. *Transportation Research Part B*, 44:597-608, 2010.
- He, X. y Liu, H. Modeling the day-to-day traffic evolution process after an unexpected network disruption. *Transportation Research Part B*, 46:50-71, 2012.
- U.S. Bureau of Public Roads. *Traffic assignment manual*. U.S. Department of Commerce,

- Washington D.C., 1964.
- Wardrop, J.G., Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proceeding, Institution of Civil Engineers II (1):325-378, 1952.
- Wong, S., Lee, C. y Tong, C. Finite element solution for the continuum traffic equilibrium problema. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43:1253-1273, 1998.
- Wong, S., Du, Y., Ho, H., Sun, L. A simultaneous optimization formulation of a discrete/continuous transportation system. *Workshop on Theory and Practice of Transportation Science*, China, 2002
- Yang, F. y Liu, H. A general modeling framework for travelers' day-to-day route choice adjustment processes. In R. Alisop (Ed.) *Transportation and traffic theory 2007*, 813-837, 2007.
- Zhang, D. y Nagurney, A. On the local and global stability of a travel route choice adjustment process. *Transportation Research Part B*, 30(4):245-262, 1996.