

## Системи приводів. Технологія і обладнання машинобудівного виробництва. Мехатроніка

УДК: 621.644:621.833.15

Ю.В. Кулешков, д-р техн. наук,  
М.І. Черновол, д-р техн. наук,  
Т.В. Руденко, канд. техн. наук,  
В.І. Гуцул, канд. техн. наук,  
М.В. Красота, канд. техн. наук

Кіровоградський національний технічний університет,  
Кіровоград, Україна

### ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ЗНИЖЕННЯ ПУЛЬСАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ МИТТЄВОЇ ПОДАЧІ ШЕШТЕРЕННОГО НАСОСА

### THEORETICAL ASSUMPTIONS OF DECREASE OF PULSATION OF GEOMETRIC INSTANT FEED OF GEAR PUMP

*Доведено теорему про особливості руху елементів евольвентного зубчастого зачеплення, яка дає можливість визначити зниження пульсації геометричної миттєвої подачі шестеренного насоса. Площину описано радіусами, які поєднують центри обертання шестерен з полюсом зачеплення. Теорему можна використовувати при проектуванні зубчастого зачеплення у шестеренних насосах. Вона є теоретичною базою зниження пульсації геометричної миттєвої подачі шестеренного насоса.*

*Ключові слова: евольвентне зубчасте зачеплення, точка зачеплення, інволюта, кут зубчастого зачеплення, шестеренний насос, миттєва подача, геометрична подача.*

#### Вступ

Евольвентний профіль зуба, запропонований Л. Ейлером в середині XVIII століття, досі не має альтернативи з точки зору кінематики, міцності і технологічності для силових зубчастих передач. За 250 років існування зубчастого зачеплення з евольвентним профілем теоретично досліджено більшість особливостей його роботи у силових передачах, проте, особливості функціонування евольвентного зубчастого зачеплення в специфічних машинах, зокрема в шестеренних гідромашинах, досліджені недостатньо.

У шестеренних насосах (НШ) евольвентне зубчасте зачеплення, крім традиційної функції передачі крутного моменту, виконує ще декілька функцій: всмоктування робочої рідини, перенесення її з камери всмоктування в камеру нагнітання і нагнітання в магістраль високого тиску гідросистеми.

Як відомо, одним з недоліків шестеренних насосів, що обумовлений його конструктивною особливістю, є наявність нерівномірності подачі за часом, тобто пульсація миттєвої подачі. Пульсація подачі, в свою чергу, є причиною пульсації тиску, що створюється шестеренними насосами. Однак, якщо пульсація тиску і подачі не має істотного впливу на якість роботи робочих органів машин, то включення пульсуючого насоса до гідросистеми управління (наприклад, у верстатах) просто неприпустиме. Отже, усунення пульсації подачі та тиску шестеренних насосів має велике значення для подальшого їх вдосконалення і розширення галузі використання.

#### Актуальність досліджень

Зазначена проблема пульсації миттєвої подачі і тиску не може бути вирішеною без встановлення фізичної суті процесів, що відбуваються при подачі робочої рідини у шестеренних насосах.

Аналіз результатів як теоретичних [1], так і експериментальних [2] досліджень, опублікованих у науково-технічних джерелах свідчить, що вони мають досить суперечливий характер. Слід відзначити певну невідповідність експериментальних результатів теоретичним, що дає підстави стверджувати, що існуючі фізико-математичні моделі, які пояснюють процес пульсації, не відповідають повною мірою дійсному стану речей.

Функції евольвентного зубчастого зачеплення пов'язані із зміною об'єму робочої камери шестеренних насосів. Виявлення закономірностей зміни об'єму робочої камери дозволяє обґрунтувати фізичну модель процесу подачі, що пропонується, та розробити математичні моделі, які більш точно відповідають робочому процесу подачі та дозволяють з'ясувати особливості миттєвої подачі, зокрема закономірності її пульсації.

Проблема, що вирішується, пов'язана з важливими науковими та практичними задачами виробництва та експлуатації шестеренних насосів. Підвищення їх технічного рівня сприятиме підвищенню їх конкурентоспроможності та подальшому просуванню на ринку об'ємних насосів. Це також забезпечить розвиток та поширення гідропривода у різних технічних системах, завдяки низькій собівартості шестеренних гідромашин.

Представлені у роботах [1, 2, 3, 4] результати не дозволили якісно наблизитися до вирішення проблеми пульсації. Отже, існує необхідність у проведенні подальших теоретичних та експериментальних досліджень у напрямку вирішення даної проблеми.

Метою дослідження є розробка теоретичних основ, що дали б можливість обґрунтувати зниження пульсації геометричної миттєвої подачі і тиску шестеренного насоса.

**Постановка задачі**

Розглянемо схему зубчастого зачеплення (рисунок 1 [3, 4]), на якій показано наступні елементи шестерень та їх взаємозв'язки:

$MN$  — лінія зачеплення зубців шестерень;

$P$  — полюс зачеплення;

$O_1A = R_{el}$ ,  $O_2B = R_{el}$  — радіуси, відповідно, ведучої і веденої шестерні;

$O_1T = \rho_1$ ,  $O_2B = R_{el}$  — радіуси, проведені з центрів обертання шестерень  $O_1$  і  $O_2$  до поточної точки  $T$  зачеплення евольвентних профілів на лінії зачеплення  $MN$ ;

$PT = x$  — координата точки зачеплення евольвентних профілів на лінії зачеплення;

$O_{1K} = d_1/2$ ;  $O_{2L} = d_2/2$  — радіуси, проведені з центрів обертання шестерень в точку перетину робочої сторони евольвентного профілю з початковим колом;

$\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — кути, на які необхідно повернути радіуси  $O_{1K}$ ,  $O_{2L}$ , щоб точки  $K$  і  $L$  одночасно опинилися в полюсі зачеплення  $P$ , при цьому, точка зачеплення  $T$  також переміститься по лінії зачеплення  $MN$  в полюс зачеплення  $P$  на відстань  $PT = x$ .

З рисунку 1 видно, що при обертанні шестерень точка  $T$  рухається по лінії зачеплення  $MN$ . При цьому відбувається постійна зміна довжини радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , висоти  $h$  і кутів нахилу радіусів до основи трикутника  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ .

Нехай точка  $T$  відображає поточне положення точки зачеплення на лінії зачеплення зубів шестерень насоса. За початок відліку виберемо полюс зачеплення у точці  $P$ . Тоді координати поточної точки  $T$  на лінії зачеплення відповідає відрізок  $PT = x$ , при цьому при русі ліворуч вгору  $x < 0$ , а праворуч донизу  $x > 0$ ;  $x$  — координата точки зачеплення на лінії зачеплення.

Для ведучої шестерні за центр її обертання приймемо точку  $O_1$ , за додатній напрямок обертання радіус-вектора приймемо обертання проти годинникової стрілки.

Аналогічно, для веденої шестерні за центр її обертання приймемо точку  $O_2$ , за додатній напрямок обертання радіуса приймемо його обертання за годинникової стрілки.

Введемо наступні позначення:  $O_{1K} = r_1$ ,  $O_{2L} = r_2$ ,  $O_1T = \rho_1$  і  $O_2T = \rho_2$ . Тоді маємо:

$\chi_1 = \angle PO_1T$  — кут, на який необхідно повернути радіус  $\rho_1$ , щоб він зайняв нульове горизонтальне положення —  $O_1P$ ;

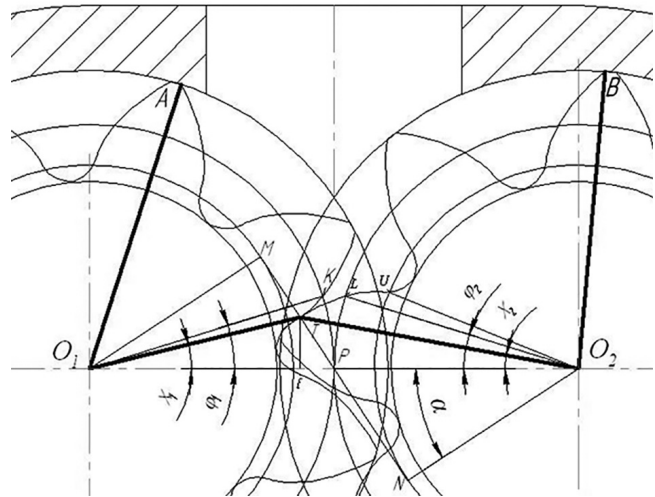


Рисунок 1 — Схема зубчастого зачеплення шестеренного насоса

$\chi_2 = \angle PO_2T$  — кут, на який необхідно повернути радіус  $\rho_2$ , щоб він зайняв нульове горизонтальне положення —  $O_2P$ ;

$\varphi_1 = \angle PO_2K$  — кут, на який необхідно повернути ведучу шестерню, щоб радіус  $\rho_1$  зайняв нульове (горизонтальне) положення  $O_1P$ ;

$\varphi_2 = \angle$  кут, на який необхідно повернути ведену шестерню, щоб радіус  $\rho_2$  зайняв нульове (горизонтальне) положення  $O_2P$ .

Значимо, що кут повороту шестерень  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  і кути повороту радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , відповідно  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , хоч і мають взаємозв'язок, але не рівні між собою, що до теперішнього часу залишалося неочевидним фактом [5].

Отже, задачею досліджень є визначення закономірностей обертання радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , які з'єднують центри обертання шестерень з точкою зачеплення. Для цього необхідно вирішити декілька послідовних задач:

- визначити взаємозв'язок між кутковими параметрами положення елементів зубчастого зачеплення;
- визначити довжину радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  від положення точки зачеплення на лінії зачеплення  $x$  і від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi$ ;
- довести теорему про швидкість зміни площі, що описується радіусами, які з'єднують точку зачеплення з центрами обертання шестерень.

Положення точок  $K$ ,  $L$  можливо визначити координатами  $(r_1; \varphi_1)$ , де  $r_1$  — радіус початкової окружності ведучої шестерні,  $mm$ ;  $\varphi$  — кут повороту, на який необхідно повернути радіус  $r_1$ , щоб точка  $K$  опинилася в полюсі зачеплення  $P$ , град. або radian.

Положення точки  $L$  можливо визначити координатами  $(r_2; \varphi_2)$ , де  $r_2$  — радіус початкового кола веденої шестерні,  $mm$ ;  $\varphi_2$  — кут повороту, на який необхідно повернути радіус  $r_2$ , щоб точка  $L$  опинилася в полюсі зачеплення  $P$ , град. або radian.

Аналогічний підхід був започаткований у роботі [5]. Проте, вихідні передумови, які полягають у тому, що кут

повороту радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  жорстко пов'язаний відповідно з кутом повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$  і веденої  $\varphi_2$  є помилковим. Доведемо це.

На рисунку 1 розглянуто точки  $K$  і  $L$  при повороті ведучої і веденої шестерен на кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , одночасно опиняться у полюсі зачеплення  $P$ . Точка зачеплення  $T$  переміститься по лінії зачеплення  $MN$  на відстань  $PT=x$  і теж опиниться в полюсі зачеплення точки  $P$ .

При цьому слід звернути увагу на той факт, що кут повороту шестерень і кут повороту радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  не збігаються:

$$\chi_1 < \varphi_1, \chi_2 < \varphi_2. \quad (1)$$

Цю особливість роботи евольвентного зубчастого зачеплення не відзначено попередниками через наявність відносного ковзання робочих боків евольвентних профілів зубів шестерень один відносно іншого [6, 7, 8]. І якщо для зубчастого зачеплення шестерень, що використовуються у силових передачах, це явище впливає хіба що на зношення евольвентних робочих профілів, то у шестеренних насосах чинить істотніший вплив на характер миттєвої подачі.

Визначимо взаємозв'язок між згаданими координатними величинами. Насамперед знайдемо взаємозв'язок між положенням точки зачеплення  $T$  на лінії зачеплення  $x$  і кутом повороту ведучої шестерні  $\varphi_1$ . Такий взаємозв'язок за умови, що початок координат знаходиться у полюсі зачеплення  $P$ , може бути отриманий, виходячи з визначення евольвенти:

$$\varphi_1 = \frac{x}{r_{01}}. \quad (2)$$

де  $r_{01}$  — радіус основної окружності ведучої шестерні, мм;

$$\varphi_1 = \frac{x}{r_{02}}. \quad (3)$$

де  $r_{02}$  — радіус основного кола веденої шестерні, мм.

Із виразів (2) і (3) можливо отримати і зворотні залежності:  $x = \varphi_1 r_{01}$

$$x = \varphi_1 r_{01}, \quad (4)$$

$$x = \varphi_2 r_{02}. \quad (5)$$

Далі можна записати:

$$\chi_1 = \angle PO_1M - \angle TO_1M, \chi_1 = \alpha - \angle TO_1M \quad (6)$$

$$\angle TO_1M = \arctg(TM/O_1M) = \arctg \frac{PO - PM}{r_{01}}$$

Але, оскільки  $PT=x$ , то

$$\angle PO_1M = \arctg \frac{PM - x}{r_{01}}. \quad (7)$$

В свою чергу з рисунку 1 бачимо, що

$$PM = r_{01} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

де  $\alpha$  — кут зачеплення передачі, *радіан* або *градусів*.

Підставивши вираз (8) у (7), отримаємо

$$\angle PO_1M = \arctg \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{x}{r_{01}} \right). \quad (9)$$

Тоді, з урахуванням виразу (6), остаточно отримаємо

$$\chi_1 = \alpha - \arctg \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{x}{r_{01}} \right). \quad (10)$$

Аналогічно, з рисунка 1 для  $\chi_2$ , маємо:

$$\chi_2 = \angle TO_2N - \alpha, \quad r_{02} \quad (11)$$

$$\chi_2 = \arctg \frac{r_{02} \operatorname{tg} \alpha + x}{r_{02}} - \alpha. \quad (12)$$

Або, остаточно для  $\chi_2$  отримуємо

$$\chi_2 = \arctg \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{r_{02}} \right) - \alpha, \quad (13)$$

Далі знайдемо взаємозв'язок між величинами  $\chi$  і  $\varphi$ .

$$\varphi_1 = \chi_1 + \operatorname{inv}(\alpha) - \operatorname{inv}(\alpha - \chi_1). \quad (14)$$

Оскільки у відповідності з визначенням

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha, \quad (15)$$

то, підставивши значення функції  $\operatorname{inv}$  з (15) в (14), отримаємо

$$\varphi_1 = \alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \chi_1). \quad (16)$$

І навпаки, з (16) можливо отримати зворотну залежність

$$\chi_1 = \alpha - \arctg(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1). \quad (17)$$

Аналогічно, встановимо залежність між  $\chi_2$  і  $\varphi_2$ .

$$\varphi_2 = \chi_2 + \operatorname{inv}(\alpha + \chi_2) - \operatorname{inv} \alpha. \quad (18)$$

Скориставшись поняттям інволюти (15), вираз (18) можливо привести до вигляду

$$\varphi_2 = \operatorname{tg}(\alpha + \chi_2) - \operatorname{tg} \alpha. \quad (19)$$

Аналогічно виразу (17), можна отримати зворотну залежність до виразу (19)

$$\chi_2 = \arctg(\varphi_2 + \operatorname{tg} \alpha) - \alpha. \quad (20)$$

Оскільки

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2} \quad (21)$$

то підставивши у вираз (20) значення  $\varphi_2$  з (21), отримаємо

$$\chi_2 = \arctg \left( \varphi_1 \frac{r_1}{r_2} + \operatorname{tg} \alpha \right) - \alpha. \quad (22)$$

Далі знайдемо залежність довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  від положення точки зачеплення на лінії зачеплення  $MN$  та від кута повороту ведучої шестерні  $\varphi$ .

За теоремою Піфагора можна записати:

$$O_1T^2 = O_1M^2 + MT^2. \quad (23)$$

$$MT = MP - x = O_1M \cdot \operatorname{tg} \alpha - x = r_{01} \cdot \operatorname{tg} \alpha - x. \quad (24)$$

Тоді

$$\rho_1^2 = (r_{01} \operatorname{tg} \alpha - x)^2 + r_{01}^2 \quad (25)$$

Аналогічно

$$\rho_2^2 = (r_{02} \operatorname{tg} \alpha + x)^2 + r_{02}^2 \quad (26)$$

Аналогічні результати можна отримати, якщо використовувати тригонометричні функції.

$$\angle TO_2N = \operatorname{arctg} \frac{TN}{O_2N}, \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \angle TO_2N = \operatorname{arctg} \frac{NP + PT}{r_{02}}, \quad (28)$$

$$\angle TO_2N = \operatorname{arctg} \frac{r_{02} \operatorname{tg} \alpha + x}{r_{02}}$$

або

$$\angle TO_2N = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{r_{02}} \right), \quad (29)$$

Тоді

$$O_2T = \frac{r_{02}}{\cos \left( \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{r_{02}} \right) \right)}. \quad (30)$$

Але оскільки  $\cos(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$ , то вираз

(30) можливо надати у вигляді:

$$O_2T = r_{02} \sqrt{\left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{r_{02}} \right)^2 + 1}$$

$$\text{або } O_2T = \sqrt{r_{02}^2 \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{x}{r_{02}} \right)^2 + r_{02}^2} \quad (31)$$

Тоді після перетворень

$$O_2T = \sqrt{(r_{02} \operatorname{tg} \alpha + x)^2 + r_{02}^2}. \quad (32)$$

Виконавши заміну, отримаємо вираз, ідентичний залежності (26). Аналогічно можна отримати вираз, ідентичний виразу (25).

Підставивши значення  $x$  від  $\varphi$  з (4) і (5) у залежності (25) і (26) відповідно, отримаємо

$$\rho_1^2 = (r_{01} \operatorname{tg} \alpha - \varphi_1 r_{01})^2 + r_{01}^2 \quad (33)$$

Аналогічно з рисунку 1 видно, що

$$\rho_2^2 = (r_{02} \operatorname{tg} \alpha + \varphi_2 r_{02})^2 + r_{02}^2 \quad (34)$$

З (33) і (34) отримаємо

$$\rho_1 = \sqrt{(r_{01} \operatorname{tg} \alpha - \varphi_1 r_{01})^2 + r_{01}^2}, \quad (35)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(r_{02} \operatorname{tg} \alpha + \varphi_2 r_{02})^2 + r_{02}^2}. \quad (36)$$

Таким чином, отримані залежності для визначення радіусів  $\rho_1, \rho_2$  (33)–(36) та їх кутів повороту  $\chi_1, \chi_2$  (17) і (22).

Теорема. При обертанні шестерень з евольвентним зубчастим зачепленням швидкість прирощення площі трикутника  $\Delta S(\Delta\varphi)$ ,  $\rho_2$ , утвореного радіусами  $\rho_1(\varphi)$  і  $\rho_2(\varphi)$ , що з'єднують центри обертання шестерень з точкою зачеплення і відрізком, що з'єднує центри обертання шестерень —  $a$  є величина постійна та визначається, як

$$(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} = 0,5 a \cdot r_0 \cos \alpha, \quad (37)$$

де  $r_0$  — радіус основного кола, мм;  $\alpha$  — кут зачеплення, математична модель;  $\varphi$  — кут повороту ведучої шестерні, *radian*;  $a$  — міжцентрова відстань, мм.

Площу трикутника  $\Delta O_1O_2TE$  можна визначити у відповідності з залежністю

$$S_{\Delta O_1O_2TE} = 0,5 \cdot O_1O_2 \cdot TE = 0,5 \cdot a \cdot h, \quad (38)$$

де  $a$  — міжцентрова відстань, мм;  $h$  — висота трикутника, мм.

Маючи у розпорядженні залежності довжин радіусів  $\rho_1$  і  $\rho_2$  і кутів їх повороту навколо центрів обертання  $\chi_1$  і  $\chi_2$ , від кутів повороту шестерень  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , з прямокутних трикутників  $\Delta O_1TE$  і  $\Delta O_2TE$  можемо записати вирази для визначення висоти трикутника  $\Delta O_1O_2TE$  у функції від  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  у вигляді

$$h(\varphi_1) = \rho_1(\varphi_1) \sin \chi_1(\varphi_1), \quad (39)$$

$$h(\varphi_2) = \rho_2(\varphi_2) \sin \chi_2(\varphi_2). \quad (40)$$

У результаті попередніх теоретичних досліджень було встановлено залежності (35) і (36), з яких отримаємо аналогічні вирази у вигляді функцій від кута повороту ведучої шестерні:

$$\rho_1(\varphi_1) = r_{01} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1)^2 + 1}, \quad (41)$$

$$\rho_2(\varphi_2) = r_{02} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha + \varphi_2)^2 + 1}, \quad (42)$$

$$\chi_1(\varphi_1) = \alpha - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1), \quad (43)$$

$$\chi_2(\varphi_2) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha + \varphi_2) - \alpha. \quad (44)$$

Або, підставивши в (49) і (50) відповідні значення величин з (41)–(44), отримаємо:

$$h = r_{01} \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1)^2 + 1} \times \sin[\alpha - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha - \varphi_1)] \quad (45)$$



$$h = r_{02} \sqrt{(tg \alpha + \varphi_2)^2 + 1} \times \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha] \quad (46)$$

Тоді, підставивши в (38) значення висоти  $h$  з (45) або (46) площу трикутника можна знайти у відповідності з наступними залежностями:

$$S_{\Delta O_1TO_2} = 0,5 a \cdot \sqrt{(tg \alpha + \varphi_2)^2 + 1} \times \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha] \quad (47)$$

$$S_{\Delta O_1TO_2} = 0,5 a \cdot \sqrt{(tg \alpha + \varphi_2)^2 + 1} \times \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha] \quad (48)$$

Перейдемо до швидкості зміни площі трикутника від кута повороту

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = \frac{dS_{\Delta O_1TO_2}}{d\varphi_1} = 0,5 a \cdot r_{01} \frac{d}{d\varphi} \times \left\{ \sqrt{(tg \alpha - \varphi_1)^2 + 1} \cdot \sin[\alpha - \arctg(tg \alpha - \varphi_1)] \right\} \quad (49)$$

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = \frac{dS_{\Delta O_1TO_2}}{d\varphi_2} = 0,5 a \cdot r_{02} \times \frac{d}{d\varphi} \left\{ \sqrt{(tg \alpha + \varphi_2)^2 + 1} \times \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha] \right\} \quad (50)$$

Через диференціювання залежностей (49) і (50), отримаємо

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = 0,5 a \cdot r_{01} \times \left\{ \frac{\cos[\alpha - \arctg(tg \alpha - \varphi_1)]}{\sqrt{(\varphi_1 - tg \alpha)^2 + 1}} + \frac{\sin[\alpha - \arctg(tg \alpha - \varphi_1)](\varphi_1 - tg \alpha)}{\sqrt{(\varphi_1 - tg \alpha)^2 + 1}} \right\} \quad (51)$$

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = 0,5 a \cdot r_{02} \times \left\{ \frac{\cos[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha]}{\sqrt{(\varphi_2 + tg \alpha)^2 + 1}} + \frac{\sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_2) - \alpha](\varphi_2 + tg \alpha)}{\sqrt{(\varphi_2 + tg \alpha)^2 + 1}} \right\} \quad (52)$$

Виконаємо низку тригонометричних перетворень

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + tg \alpha)^2 + 1}} \times \left\{ \cos[\arctg(tg \alpha + \varphi_1) - \alpha] + \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_1) - \alpha](\varphi_1 + tg \alpha) \right\} \quad (53)$$

Скориставшись формулами додавання з виразу (53), отримаємо

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + tg \alpha)^2 + 1}} \times \left\{ \cos[\arctg(tg \alpha + \varphi_1)] \cos[\alpha] - \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_1)] \sin[\alpha] + \left[ \sin[\arctg(tg \alpha + \varphi_1)] \cos[\alpha] + \cos[\arctg(tg \alpha + \varphi_1)] \sin[\alpha] \right] (\varphi_1 + tg \alpha) \right\} \quad (54)$$

$$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (55)$$

$$1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (56)$$

Тоді з (55) і (56) знайдемо, що

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \alpha}} \quad (57)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}} \quad (58)$$

Виразимо у (54) функції  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  через функцію  $tg \alpha$ . У результаті отримаємо:

$$V_{S_{\Delta O_1TO_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + tg \alpha)^2 + 1}} \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}} \cos[\alpha] - \frac{tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}{\sqrt{1 + tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}} \sin[\alpha] + \left[ \frac{tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}{\sqrt{1 + tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}} \cos[\alpha] + \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 [\arctg(tg \alpha + \varphi_1)]}} \sin[\alpha] \right] (\varphi_1 + tg \alpha) \right\} \quad (59)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \cos \alpha - \\ & \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \sin \alpha + \\ & \left[ \sqrt{\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \sin \alpha \right] (\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \cos \alpha - \\ & - (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \sin \alpha + \\ & \left[ (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \sin \alpha \right] \times (\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \times \\ & \left\{ \cos \alpha - (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \sin \alpha + \right. \\ & \left. + [(\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \cos \alpha + \sin \alpha] \cdot (\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \times \\ & \left\{ \cos \alpha - (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \sin \alpha + \right. \\ & \left. + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2 \cos \alpha + \sin \alpha (\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \times \\ & \left\{ \cos \alpha + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2 \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \sin \alpha (\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) - (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1) \sin \alpha \right\} \\ & \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \times \\ & \left\{ \cos \alpha [1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2] + \right. \\ & \left. + \sin \alpha [(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha) - (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01}}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \left\{ \cos \alpha [1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01} \cos \alpha}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \cdot [1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2] \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01} \cos \alpha}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{\frac{[1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2] \cdot [1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2]}{1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = \frac{0,5 a \cdot r_{01} \cos \alpha}{\sqrt{(\varphi_1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + 1}} \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sqrt{[1 + (\operatorname{tg} \alpha + \varphi_1)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

$$V_{S_{\Delta O_1 T O_2}} = 0,5 a \cdot r_0 \cos \alpha \quad (70)$$

Що й потрібно було довести.

## Висновки

Доведено теорему в теорії евольвентного зубчастого зачеплення, що визначає швидкість зміни площі, яка описується радіусами, що з'єднують центри обертання шестерень з полюсом зачеплення. Ця теорема насамперед може бути використана при проектуванні зубчастих зачеплень, які використовуються у шестеренних насосах, оскільки у цьому випадку евольвентне зубчасте зачеплення виконує дві функції. Перша функція — перенесення робочої рідини з камери всмоктування до камери нагнітання і забезпечення підвищення тиску робочої рідини. Друга виконує традиційну роль передачі крутного моменту від привода насоса на ведену шестерню, але це допоміжна функція.

При проектуванні евольвентних зубчастих зачеплень у силових передачах ця теорема навряд чи знайде застосування.

Доведена теорема свідчить, що усталені уявлення про пульсацію миттєвої подачі і тиску впродовж подачі робочої рідини до шестеренного насоса не повною мірою відповідають дійсності.

## Література

1. Кулешков, Ю.В. Анализ теоретических исследований пульсации мгновенной подачи шестеренного насоса / Ю.В. Кулешков, Т.В. Руденко, М.В. Красота, К.Ю. Кулешкова // Загальнодерж. міжвідом. наук.-техн. зб. «Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин». — Кіровоград: КДТУ — 2013. — № 43. — Ч. 1 — С. 83—96.
2. Кулешков, Ю.В. Анализ экспериментальных исследований пульсации мгновенной подачи шестеренного насоса / Ю.В. Кулешков, Т.В. Руденко, М.В. Красота, К.Ю. Кулешкова // Загальнодерж. міжвідом. наук.-техн. зб. «Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин». — Кіровоград: КДТУ — 2013. — № 43. — Ч. II — С. 134—148.
3. Кулешков, Ю.В. Шестеренные насосы с асимметричной линией зацепления шестерен / Ю.В. Кулешков, М.И. Черновол, О.В. Без, Ю.А. Титов // Теория, конструкция и расчет. Монография. — Кіровоград: КОД, 2009. — 243 с.
4. Кулешков, Ю.В. Усовершенствование математической модели мгновенной подачи шестеренного насоса / Ю.В. Кулешков, Р.А. Осин, Т.В. Руденко, О.О. Матвиенко // Загальнодерж. міжвідом. наук.-техн. зб. «Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин». — Кіровоград: КНТУ, 2008. — № 21. — С. 253—262.
5. Леонов, А.Е. Насосы гидравлических систем и машин / А.Е. Леонов. — М.К.: Машгиз, 1960. — 226 с.

6. Гавриленко, В.А. Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. / В.А. Гавриленко. — М.: Машиностроение, 1969. — 431 с.

7. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. — [4е изд. перераб. и доп.] — М.: Наука, 1988. — 640 с.

8. Болотовский, И.А. Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления / И.А. Болотовский, Б.И. Гурьев, В.Э. Смирнов, Б.Й. Шендерей. — М.: Машиностроение, 1974 — 160 с.

## References

1. Kuleshkov, Y.V. Analiz teoreticheskikh issledovaniy pul'satsii mgnovennoi podachi shesterennogo nasosa / Kuleshkov Y.V., Rudenko T.V., Krasota M.V., Kuleshkova K.Y. // Zagalnodержavnij mizhvidomchij naukovotekhnichnij zbirnik «Konstruktuyannya, virobnytstvo ta ekspluatatsiya sil'skogospodarskikh mashin». — Kirovograd: KDTU — 2013. — № 43. — Ch. 1 — S. 83—96.
2. Kuleshkov, Y.V. Analiz eksperimentalnykh issledovaniy pul'satsiyi mgnovennoi podachi shesterennogo nasosa / Kuleshkov Y.V., Rudenko T.V., Krasota M.V., Kuleshkova K.Y. // Zagalnodержavnij mizhvidomchij naukovotekhnichnij zbirnik «Konstruyuvannya, vyrobnytstvo ta ekspluatatsiya sil'skogospodars'kikh mashin». — Kirovograd: KDTU — 2013. — № 43, Ch. II — S. 134 — 148.
3. Kuleshkov, Y.V. Shesterennye nasosi s asimmetrichnoy liniyey zatsepleniya shesteren / [Kuleshkov Y.V., Chernovol M.I., Bez O.V., Titov Y.A.] // Teoriya, konstruktsiya i raschet. Monografiya — Kirovograd: KOD, 2009. — 243 s.
4. Kuleshkov, Y.V. Usovershenstvovanie matematicheskoy modeli mgnovennoi podachi shesterennogo nasosa. / Kuleshkov Y.V., Osin R.A., Rudenko T.V., Matvienko O.O. // Zbirnik naukovikh prats' Kirovograds'kogo natsional'nogo tekhnichnogo universitetu «Tekhnika v sil'skogospodars'komu vyrobnytstvi, galuzeve mashinobuduvannya, avtomatizatsiya». — Kirovograd: KNTU, 2008. — № 21. — S. 253—262.
5. Leonov, A.E. Nasosy gidravlicheskikh system i mashin / A.E. Leonov. — M.K.: Mashgiz, 1960. — 226 s.
6. Gavrilenko, V.A. Osnovi teorii evolventnoy zubchatoy peredachi. / V.A. Gavrilenko. — M.: Mashinostroenie, 1969. — 431 s.
7. Artobolevskiy, I.I. Teoriya mekhanizmov i mashin / I.I. Artobolevskiy. — [4e izd. pererab. i dop.] — M.: Nauka, 1988. — 640 s.
8. Bolotovskiy, I.A. Tsilindricheskie evolventnie zubchatye peredachi vneshnego zatsepleniya. / I.A. Bolotovskiy, B.I. Guryev, V.E. Smirnov, B.Y. Shenderey. — M.: Mashinostroenie, 1974. — 160 s.

Надійшла 11.09.2014 року

УДК: 621.644:621.833.15

UDC: 621.644:621.833.15

**Теоретические предпосылки снижения пульсации геометрической мгновенной подачи шестеренного насоса**

**Ю.В. Кулешков, М.И. Черновол,  
Т.В. Руденко, В.И. Гуцул, М.В. Красота**

Целью исследований является разработка теоретических основ, которые дают возможность обосновать снижение пульсации мгновенной подачи и давления шестеренного насоса.

В работе была доказана теорема в теории эвольвентного зубчатого зацепления, которая дает возможность определить скорость изменения площади, которая описывается радиусами, соединяющими центры вращения шестерен с полюсом зацепления. Эта теорема может быть использована при проектировании зубчатых зацеплений, используемых в шестеренных насосах. Даная теорема является теоретической базой снижения пульсации геометрической мгновенной подачи шестеренного насоса.

Доказательство теоремы показывает, что устоявшиеся представления о мгновенной подаче и давлении в процессе подачи рабочей жидкости в шестеренном насосе не в полной мере отвечают действительности.

*Ключевые слова:* эвольвентное зубчатое зацепление, точка зацепления, инволюта, угол зубчатого зацепления, шестеренный насос, мгновенная подача, геометрическая подача.

**Theoretical assumptions of decrease of pulsation of geometric instant feed of gear pump**

**Yu.V. Kuleshkov, M.I. Chernovol,  
T.V. Rudenko, V.I. Gutsul, M.V. Krasota**

The objective of the research is to develop theory which gives possibility to ground decrease of the pulsation if instant feed and pressure of a gear pump.

The work presents the proof of the theorem of involute toothing which makes it possible to determine the speed of area change that is described by the radiuses connecting the centres of gear rotation and pitch points. The theorem may be applied while designing toothings used in gear pumps. This theorem is a theoretical basis of decrease of pulsation of geometric instant feed of gear pump.

The proof of the theorem shows that the established apprehension of instant feed and the pressure in the process of hydraulic fluid feed in a gear pump is not true to the full.

*Keywords:* involute toothing, gear pump, pulsation, pulsation if instant feed, pitch points, geometric feed, instant feed.