Treball de Fi de Grau

Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials

Maria Gaetana Agnesi: la veritable parametritzadora de *la Versiera*?

ANNEX

Autor: Elisenda Clèries Tardío
Director: Maria Rosa Massa Esteve
Convocatòria: maig 2018

ETSEIB

Escola Tècnica Superior
d'Enginyeria Industrial de Barcelona

UPC

PREFACI

Original

On avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cosa, non sappia altresí quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio dell' Analisi, e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperersi nell'avvenire; che però non voglio, nè debbo tratternermi qui in lodando quella scienza, que punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invogli di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà, qui vi s'incontrano, sendo noto, e duor di dubbio que non ogni Città, almeno nella nostra Italia, â perdone, que sappiano, o vogliano insegnarla, e non tutti ânno il modo di andar fuori della Patria a cercarne i Maestri.

Io lo so per prova, ed ingenuamente il confesso, mentre con tutto lo studio, ch'io mi sono sforzata di fare da me medesima sostenuto dalla pì forte inclinazione per questa scienza, mi troverei tuttavia intricata nel gran labirinto d'insuperabili difficoltà, se trattta non me m'avesse la ficura guida, e faggi direzione del dottissimo Padre Don Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano ora Professore di Matematica nella Regia Università di Pavia, a cui mi riconosco altamente debitrice di tutti que' progressi(quali essi sieno) de' quali è stato capace il mio picciol talento, le di cui lodi io tralascio come superflue ad un soggetto sì celebre, e spezialmente per non offendere la nota, e forse troppo rigida di lui modestia. Al sopraccennato incomodo possono rimediare, non v'â dubbio. in parte i buoni libri, quando essi sieno con quella chiarezza, che basta scritti, e con quel metodo, che pur troppo è necessario; quindi è, che quantunque le cose Analitiche sieno tutte pubblicate con le stampe, pure perche esse sono scollegate, senz' ordine, e sparse quà, e là nell' opere di molti utori, e principalmente negli Atti di Lipsia, nelle Memorie dell' Accademia di Parigi, ed in altri Giornali, cosicchè non potrebbe certamente un Principiante ridurre a metodo le materie, quando anche egli fosse di tutti i libri fornito, pensò il rinomato Padre Renau al comune vantaggio, e diede alla luce l'utilissimo libro de L'Analise demontréé, opera degna di tutte quelle lodi, che maggiori si possono.

Dopo di che sembrerà forse affatto inutile, que compariscano queste mie Instituzioni, avendo altri già da molto tempo così largamente proveduto all' altrui bisogno. Ma su questo punto io prego il cortese Lettore a riflettere, che crescendo le scienze di giorno in giorno, dopo l'edizione del lodato libro moltissimi, ed importantissimi sono stati i nuovi ritrovamenti inseriti dai loro Autoti in diverse opere, come era suceduto degli anteriori; quindi per iscemare agli studiosi la fatica di andare fra tanti libri ripescando i metodi di recente invenzione, mi sembravano utilissime, e necessarie nuove Instituzioni di Analisi. Le nuove scoperte m'ânno obbligata ad un'altra disposizione di cose, e ben fa qui pon mano in sì fatte materie, quanto sia difficile il ritrovare quella, che sia dotata della dovuta chiarezza, e semplicità, omettendo tutto il superfluo, senza lasciare cosa alcuno, che esser possa utile o necessaria, e che proceda con quell ordine naturale, incui forse consiste la miglior istruzione, ed il maggior lume. Questo naturale ordione io ô certamente sempre avuto in vista, e l'ô sommamente procurato, ma non so poi se sarò stata bastamente fortunata per conseguirlo.

Nell' atto poi di maneggiare vari metodi, mi si sono parate alla mente alcune estensioni, e parecchie diverse cose, le quali per avventura, non saranno prive di novità, e d'invenzione: a *queste darà il benigno Lettore quel peso, que a lui sembrerà, non intendendo io di raccoglier lodi, contenta di essermi con sodo, e vero piacere divertita, e di aver procurato di giovare altrui.*

Nel Tomo secondo per entro il Calcol Integrale ritroverà il Lettore un Metodo affatto nuovo per li Polinomi, nè in luogo alcuno prodotto; questo è del celebre, e non mai abbastanza lodato Signor Conte Jacopo Riccati Cavaliere di singolarissimo merito nelle scienze tutte, e ben noto al mondo letterario. 'A egli voluto fare a me quella grazia nel comunicarmelo, che io non meritava, ed io rendo a lui, ed al Publico quella giustizia, che si conviene.

Finalmente, siccome non è stata mua mente da orsiccome non è stata mia mente da principio il pubblicar colle stampe la presente opera da me cominciata, e proseguita in Lingua Italiana, per mio particolar divertimento, o al più per istruzione d'alcuno de' miei minori fratelli, che inclinato fosse alle matematiche facoltà, nè essendomi determinata di darla al Pubblico, che dopo di esser già molto avvanzata l'opera, e pervenuta a considerabile volume; mi dono perciò dispensata dal tradurla in Latino Idioma(comecchè da alcuni credasi più convenire a tal materia) sì per l'autorevole esempio di tanti celebri Matematici Oltramontani, ed Italiani ancora, le di cui opere nella loro natia vanno a comune vantaggio stampate, sì per naturale mio rincrescimento alla materiale fatica di trascrivere in Latino ciò, che aveva di già scritto in Italiano. Nè intendo però farmi carico di quella purità di lingua, che lodevolmente viene praticata in materie da questa diverse, avendo io avuto in mira più, che ogni altra cosa, la necessaria possibile chiarezza.

Traducció i adaptació

Algú, per molt que sàpiga de matemàtiques, no sap quant, en l'actualitat, l'estudi de l'Anàlisi és necessari, ni el progrés que s'ha fet amb aquest i que encara es fa i més que es farà al futur. Però no vull, ni he de quedar-me aquí elogiant aquesta ciència, que no ho necessita, i molt menys de mi. D'altra banda, és clara la seva necessitat, perquè quan els joves s'animen encoratjats adquirir-ne els coneixements, les dificultats són grans, ho sap qui s'hi ha trobat, i sobretot aquí, que sens dubte no a totes les ciutats es coneix, almenys a la nostra Itàlia, (em perdonarà qui en sàpiga o vulgui ensenyar) i no tothom pot sortir del país a buscar-ne els mestres.

Jo en sóc la prova, i ingènuament confesso, que tot i l'estudi que he tractat de fer conduïda per la forta inclinació piadosa per aquesta ciència, jo, encara em trobo enredada en un gran laberint de dificultat insuperable, i sort de qui ha estat la figura d'orientació i direcció de qui més vaig aprendre, l'adorat Pare Senyor Ramiro Rampinelli, monjo olivetà, ara professor de Matemàtiques a la Universitat Reial de Pavia. Reconec que li estic molt endeutada de tots els avenços (els que siguin) els que he estat capaç de fer amb el meu petit talent, els meus elogis serien superflus per a un tema tan cèlebre, i sobretot per tal de no ofendre, ja que la seva modèstia potser és massa rígida.

L'esmentat inconvenient es pot solucionar, no hi ha dubte. En part, ho solucionen els bons llibres quan s'escriuen amb suficient claredat, i amb un bon mètode, que és massa necessari. Tot i que les coses analítiques estan sempre totes elles publicades en les impressions oficials, són inconnexes, sense ordre i estan disperses en diferents treballs, i sobretot en els Fets de Leipzig, en les Memòries de la' Acadèmia París, i a altres diaris, de manera que certament no és un bon mètode d'aprenentatge per al principiant. Per tant, cal reduir els materials, fet que també s'ha donat en altres llibres, com ara el reconegut pare Reyneau qui va pensar en el bé comú, i va donar a llum al llibre molt útil de *l'Analyse demontréé*, obra digna de tots els elogis i més.

Llavors poden semblar del tot inútils, les meves institucions, tenint a l'altre cobrint unes necessitats durant molt temps, tan àmpliament aprovat tots, que poden aportar les meves? Però en aquest punt jo demano al cortès lector que pensi que la ciència va creixent dia a dia, després de l'edició dels llibres que han lloat a molts, i tan importants que han estat els nous resultats proporcionats per autors en diferents obres, com va succeint ara; de manera que per als estudiosos que es fatiguen d'anar entre tants llibres repescant els últims mètodes i invencions, semblava útil i necessari unes institucions en noves anàlisis. Els nous descobriments m'han obligat a una altra disposició de les coses, i aquí està ben fet en la matèria, la dificultat està a trobar el que està dotat de la necessària claredat i simplicitat, ometent tot allò que és superflu, sense negligir el que sigui útil o necessari, i procedint amb el seu ordre natural, potser consisteix en la millor instrucció i la major llum. Aquest ordre natural que, sens dubte, he tingut sempre a la vista, i l'he procurat summament, però no sé si he estat prou afortunada d'aconseguir-lo.

En l'acte de manipular diversos mètodes, algunes extensions al meu cap, i diverses coses diferents, que per cert, no tenen pretensió de novetat ni d'invenció: per a aquests, al benigne lector li farà el pes que li sembli, no tinc la intenció de recollir els elogis, sóc feliç per mi, amb el plaer agradable d'ajudar els altres.

En el segon Tom, dins del Càlcul Integral, el lector trobarà un mètode bastant nou per als polinomis, que tampoc és cap producte propi; aquest és el famós i mai prou elogiat el senyor Jacopo Riccati Caballero de mèrit singular en totes les ciències, i ben conegut en el món literari. Em va voler donar la gràcia en comunicar-lo, fet que jo no em mereixia, i ho dedico a ell, i al Públic que li faci justícia, que és convenient.

Finalment, perquè no ha estat al meu entendre, ja que al principi no era la meva intenció de publicar els gravats amb el present treball que vaig començar, però que vaig continuar en l'idioma italià, pel meu divertiment particular, o com a màxim per a l'educació d'alguns dels meus germans petits, que estaven inclinats a estudiar les matemàtiques, però no estava pensat per donar-lo al públic, però després en haver avançat ja molt amb el treball, va arribar a un volum considerable. Em considero, per tant, excusada de traduir-lo a la llengua llatina (que per alguns seria més adient per a aquesta matèria), ja que per l'exemple de molts matemàtics famosos d'autoritat, però no pas italians, tenen obres previstes en la seva llengua nativa que van en benefici comú, és natural excusar la feina dura de transcripció al llatí, doncs ja ho havia escrit en italià. No obstant això, tampoc tinc la intenció de fer-me càrrec de la puresa del llenguatge, el qual es practica en diversos materials lloables, perquè no n'he tingut la formació, així que només en puc la claredat necessària.

CONTINGUT DE L'OBRA EN DETALL

De manera més detallada, el contingut dels llibres és el següent:

Llibre I: De l'anàlisi de la quantitat finita

- **Cap. 1**- De la notícia primària, i operacions de l'anàlisi de la quantitat finita

Conté els següents articles:

1. Les operacions aritmètiques (amb números) són les mateixes que les operacions algebraiques(amb símbols o quantitats) però aquestes últimes tenen una avantatge respecte les primeres i és que les expressions es preserven mentre s'operen.
2. Distinció entre nombres positius i negatius. Les quantitats negatives no són a la natura, geomètricament es representen en sentit oposat a les positives(positives a la dreta i amunt)
3. Explicació dels signes: + denota positiu o – negatiu. ±Mostra ambigüitat, = Igualtat. major que> menor que < i :: Indica proporció o igualtat entre ratis. ∞ Denota infinit.
4. Les quantitats simples no estan connectades pels símbols + o -, i les compostes sí.
5. Explicació i exemples de sumes de quantitats simples amb ús de coeficients numèrics.
6. Explicació i exemples de restes de quantitats simples amb ús de coeficients numèrics.
7. Explicació i exemples de productes de quantitats simples segons el signe de les quantitats.
8. Potències com a particularitat de multiplicacions, introdueix el concepte d'índexs i exponents.
9. Nomenclatura segons potència: quadrats, cúbics, biquadrats. L'arrel serà la primera potència(a la 1).
10. Explicació i exemplificació de la divisió de quantitats simples com a inversa de la multiplicació.
11. Explicació de quan acaba la divisió i concepte de Residu. Quocients representats com a fraccions.
12. En la divisió, seguint la natura de la multiplicació, el quocient depèn del signe del dividend i del divisor.
13. Fraccions i signes, es poden canviar de numerador a denominador.
14. Les arrels(quadràtiques, cúbiques...) de quantitats simples poden ser extretes dividint els seus exponents entre el número que denomina l'arrel a ser extreta. (arrel quadrada de dos a la dos és dos)
15. El signe de les arrels parells és ambigu en canvi en les senars en signe serà el mateix que el terme.
16. Quan les arrels són irracionals, poden ser aproximades pel signe del radical i els caràcters.

En els següents punts procedeix a explicar i exemplificar el mateix tipus d'operacions però amb quantitats compostes (quantitats simples unides per signes + o -).

17. La suma de la quantitat composta entera
18. La resta de la quantitat composta entera
19. La multiplicació de la quantitat composta entera

20. La multiplicació de quantitats compostes expressada de forma genèrica amb vincles(línia superior) i unint amb un signe x.
21. Les potències de les quantitats compostes, tampoc han de ser sempre desenvolupades.
22. Explica i exemplifica el Cànon de Newton per potències a la n de quantitats compostes.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n$$

23. La divisió de la quantitat composta entera, amb dos casos diferents dividint quantitats simples i compostes
24. Últim cas del punt 23 amb divisions compostes, posant divisor, dividend quocient i el residu amb forces exemples.
25. Extracció de les arrels quadrades de les quantitats compostes enteres.
26. Extracció de les arrels cúbiques de les quantitats compostes enteres.
27. Extracció de les arrels cúbiques de les quantitats compostes enteres.
28. Explicació de extracció de l'arrel cinquena cap amunt.
29. Càlcul de les fraccions simples i compostes.
30. Reducció de fraccions simples i compostes
31. Explicació del comú denominador per operar en fraccions i exemples.
32. Operacions amb fraccions posant un comú denominador.
33. Multiplicació de fraccions
34. Divisió de fraccions, relacionat amb la multiplicació (numerador-numerador, denominador- denominador)
35. Extracció d'arrels en fraccions: Per separat la del numerador i la del denominador. Si no es pot extreure es deixa en funció.
36. El màxim comú divisor de dues quantitats o fórmules. En aquest apartat procedeix a fer el MCD de fórmules.

37-48. Es fan operacions amb arrels quadrades i cúbiques des de sumes, passant per multiplicacions, reduccions i operacions amb fraccions.

49. Extracció d'arrels quadrades de les quantitats radicals.

En aquest apartat procedeix a fer un procediment per reduir arrels d'arrels.

50. Potències de nombres (potència 0 i potències negatives) i operacions associades

51. Explicació de les potències de les arrels a la *n*

52-54. Operacions amb potències i arrels de quantitats simples i compostes(un nombre elevat amb dues potències és equivalent a aquest nombre amb els exponents multiplicats i amb una potència i una arrel els exponents queden dividits).

55. Explicació de quantitats o fórmules primeres(aquelles que només són divisibles entre elles mateixes i 1), i les quantitats i fórmules compostes. Posa exemples i procedeix a fer la descomposició en nombres primers de números, així com a trobar tots els números divisibles entre el número.

56. Si les quantitats o fórmules són divisibles proposa un mètode per descompondre en quantitats simples.

De fet, aquest mètode és un mètode de resolució d'equacions de tercer grau o superior.

57. El mateix que 56 però proposa un exemple on s'ha de fer un canvi de variable.

- **Cap. 2-**De les equacions i dels problemes plans determinats

58. Equacions i problemes en dos dimensions determinats. Defineix els conceptes d'homogeni (fórmules amb tots els termes amb la mateixa dimensió) i no homogeni(expressions compostes amb termes de diferents potències).
59. Defineix què és un problema i com resoldre'l
60. Classifica els problemes determinats(es poden resoldre) i indeterminats(falten dades)
61. Definició de coeficients i incògnites, quines lletres se solen fer servir per cada
62. En els problemes normalment s'hi troben equacions(amb incògnites i coeficients) a resoldre
63. Relacionar variables per tal de reduir equacions.
64. Problemes on cal completar informació. El llibre d'Euclides ajuda a completar dibuixos i trobar relacions geomètriques per la resolució de problemes.
65-66. Dos exemples de resolucions de problemes completant figures amb ajudes de les relacions del triangle isòsceles, emprant Pitàgores i Tales per resoldre'ls.
67-74. Explicació de les regles d'aïllament d'equacions
74. Explicació de l'ambigüitat associada a l'arrel quadrada, introducció al concepte de nombres imaginaris.
76. Exemples de problemes sense solució(incompatibles)
77. Exemples de problemes amb indeterminacions
78. Definició de grau en una equació.
79. Equacions de quart o sisè grau que es poden reduir a segon o tercer grau
80. Definició de sistemes d'equacions i resolució de sistemes lineals i de primer grau
82. Sistemes d'equacions amb incògnites de segon o més grau.
82. Exemples i tècniques per aïllar equacions de segon o més grau
83. Sistemes d'equacions amb 3 o més incògnites.
84. La quantitat de condicions del problema fan que el problema sigui determinat o indeterminat.
85. Si hi ha massa condicions, està més que determinat i pot ser que sigui un problema impossible de resoldre
86-87. Construcció d'incògnites i paràmetres en problemes geomètrics.
88. Coherència amb els ordres dels termes. (termes de potència 1 són línies i de potència 2 són àrees o rectangles)
89-90. Exemples de canvis de variables, explica diferents procediments.
91. Com construir els radicals
92. Arreglar funcions fent canvis de variables.
93. Construcció d'equacions quadràtiques sense transformació
94-95. Construcció d'equacions quadràtiques. Dibuix geomètric de diferents equacions quadràtiques. En aquest apartat procedeix a fer un procediment per reduir arrels d'arrels.
96-99. Procedeix a plantejar quatre problemes en els següents punts, de diferents temàtiques: comptabilitat(96), velocitats i distàncies(97), masses i pesos(98-99).
100-110. Problemes geomètrics.

100. És de trobar un punt O que compleix diverses condicions i es resumeix a una sola equació resoluble.
101. el problema es resol mitjançant una equació quadràtica
102. És de tres dimensions però s'acaba resolent amb una equació de segon grau.
103-107. Altres problemes geomètrics
108. En aquest problema formula un teorema per trobar la tangent de d'arcs múltiples en circumferències
109. Problema geomètric: Trobar un triangle costats del qual i la perpendicular estiguin en proporció geomètrica. Acaba amb una equació de segon grau que pot ser construïda.
110. Trisecció d'un angle donat, segons si aquest és recte, obtús o agut.

- **Cap. 3**- De la construcció de llocs geomètrics i de problemes indeterminats que no excedeixin el segon grau.

111. Definició de les quantitats variables. En un problema indeterminat com a mínim n'hi ha d'haver dos, que són variades amb una llei constant que s'expressa amb una equació donada.
112. Definició del Locus(lloc) Geomètric: és una corba(o línia recta) de la qual la seva abscissa i ordenada són línies rectes variables. Es defineix amb una funció i substituint-la per un valor concret, donarà un punt definit.
113. Diferents equacions requereixen diferents llocs (punts) i viceversa, tants com el grau de les equacions.
114. D'una equació simple, el locus sempre serà una línia recta
115. Si les equacions tenen termes de més de segon grau, necessiten una secció cònica pel seu locus.
116. Els locus es poden classificar en diferents ordres.
117. Exemples de construcció d'equacions de rectes.
118. Hi ha casos en què problemes determinats semblen indeterminats a causa de sobrecàrrec de variables.
119. Diferents equacions del cercle (primera corba senzilla) segons la situació amb els eixos. Introdueix concepte de cercles amb nombres imaginaris.
120. Explicació de la paràbola com a següent corba senzilla
121-122.Explicació de la hipèrbola com a secció cònica
123. Explicació de l'el·lipse.
124-125. Mètodes per trobar equacions de la hipèrbola i l'el·lipse quan no es donen directament els diàmetres, aquests es poden trobar mitjançant regles de proporcions.
126. Construcció d'equacions complicades provinents de seccions o corbes.
127-130. Exemples del punt 126, amb reduccions i substitucions incloses.
131-135. Tota la varietat d'equacions de la hipèrbola entre les asímptotes són reduïdes a quatre equacions generals, presentades en problemes en els punts 132-135.
136. Un problema general resolt per una equació canònica.
137. Equació d'una el·lipse, a partir de la intersecció de dos cercles.
138.Dos problemes més de cercles.
139- 143. Més problemes de corbes i equacions. El punt 141 fa el mètode de majoritari i minoritari per a comparació de sèries.

- **Cap. 4-** Problemes sòlids i les seves equacions.

144. Havent fet problemes de dues dimensions(Problemes plans) procedeix a fer problemes en tres dimensions(Problemes Sòlids) els quals requereixen equacions de més de dues dimensions. Explica el concepte d'arrel com a solució de les equacions d'una variable.
145. Explica el concepte de factorització de polinomis, i la resolució d'equacions mitjançant la divisió de polinomis. No posa exemples, és només explicatiu.
146-173. Observacions sobre arrels i construcció d'equacions: tenint l'arrel d'una equació, es pot reduir a una equació d'ordre més petit. Les equacions es poden construir a partir de les seves arrels, introducció al concepte d'arrels imaginàries i certes observacions de com reconèixer si les equacions tenen arrels complexes, canvis d'arrels canviant els llocs imparells de les equacions, diferents mètodes d'extracció d'arrels segons el greu de l'equació...
174-176. Problemes geomètrics i algebraics
177-178. Reflexions per tal d'evitar equacions d'ordre alt i exemples.
179. Un problema d'inscripció d'un heptàgon en un cercle.
180-189. Mètode per trobar arrels quan els polinomis de tercer grau no poden ser reduïts. Regles de Cardano. Mètode algebraic.
190. Solució d'equacions a la quarta, fórmula genèrica i exemple.
191-205. Solució d'equacions de manera geomètrica. Des del segon grau fins a novè grau posant molts exemples i diferents mètodes.
206. El mètode abans exposat pot servir per verificar altres construccions. Als propers apartats hi apareixen problemes.
207-219. Problemes molt diversos i de diferents temàtiques del mètode geomètric exposat.

- **Cap. 5**- De la construcció del lloc geomètric que supera el segon grau

La secció consisteix a donar una sèrie de normes per a la construcció del lloc geomètric excedint el segon grau i com sempre dona molts i diversos exemples aplicant les diferents normes i veient les excepcions i fent-ne observacions. Algunes corbes que utilitza són la Ciffoid de Diocles i el Conchoid de Nicomedes.
220. Punt introductori
238. Problema iii: La Versiera

- **Cap. 6**- Del mètode dels màxims i mínims, de les tangents de les corbes, de les flexions contràries i de les regressions fent ús només de l'àlgebra cartesiana.

268-275.Mètode de màxims i mínims, de tangents de corbes, punts d'inflexió i regressió, fent ús únicament de l'Àlgebra Comú. Tot i que el càlcul infinitesimal és el més simple, curt i universal dels mètodes per trobar màxims i mínims, vol introduir altres maneres de plantejar-los en corbes geomètriques sense l'ús del càlcul diferencial o el Mètode de les Fluxions.

Llibre II: Del càlcul diferencial. En aquest llibre vol tractar les quantitats infinitesimals amb el Càlcul diferencial o el mètode de les fluxions. Aquest càlcul conté mètodes de cerca de tangents de corbes per trobar màxims i mínims de quantitats, punts d'inflexió i punts de regressió de corbes, el radi de curvatura...

- **Cap. 1-** Del concepte i del càlcul d'equacions diferencials de diversos ordres

1. Definició de quantitats variables i exemples
2. Definició de quantitats constants(no creixen ni disminueixen)

3-4.Definició de quantitat infinitesimal, notació i exemples.
5. Les quantitats infinitesimals de segon ordre són negligibles davant de les de primer ordre.
6-11. Exposa diferents teoremes amb els seus corol·laris a tenir en compte per les relacions de quantitats infinitesimals.
12-13. Observacions sobre els teoremes.
14. Proposició: Els arcs d'un mateix angle tenen relacions de proporcionalitat.
15-22. Teoremes referents als arcs i respectius corol·laris.
23-24. Comentaris i observacions.
25-29. Càlculs i regles operació d'equacions amb fluxions: aïllament per trobar el valors dels diferencials(resolucions d'EDOS).

- **Cap. 2-** Del mètode de les tangents

30. Comença posant dues corbes on ensenya geomètricament les seves arrels i dedueix la fórmula general per la tangent de qualsevol corba en un punt donat.
31-34. Casos particulars de tangents de corbes concretes i observacions genèriques.
35-39. Diferents exemples del que s'explica en els punts anteriors.
40. Deduir asímptotes a partir del mètode de les tangents.
41-43. Exemples del punt 40.
44. Hi ha corbes que són transcendents o mecàniques i no es poden expressar amb una equació algebraica. Es pot trobar la seva tangent també.
45. Exemple d'un cicloide format a partir de dos cercles.
46. Reducció d'equacions per tal de trobar fórmules diferents.
47-48. Exemples del que s'exposa anteriorment.
49. Reducció d'equacions per tal de resoldre-les mitjançant la substitució.
50. Exemple.
51-52. Casos particulars que matisen l'exemple.
53. Cas general de l'exemple.
54. Casos simples del cas general.
55. Un cas més complex.
56-59. Exemple I i Exemple II
60. Observació i conclusió dels exemples.
61. Plantejament d'un problema genèric de tangents(acompanyat d'una figura).
62. Exemple per una petita modificació del plantejament.
63. Resolució de l'exemple amb un altre mètode més analític.
64. Plantejament d'un altre problema genèric de tangents(acompanyat d'una figura).
65. Exemple més concret.
66. Plantejament d'un altre problema genèric de tangents(acompanyat d'una figura).
67. Exemple d'una espiral.
68-71. Dos casos particulars de tangents.

- **Cap. 3-** Del mètode de mínims i màxims

72. Explicació de perquè en un màxim o mínim la fluxió de la tangent és zero.
73. Conclusió de l'explicació anterior.
74. Explicació de la utilitat del mètode.

75-78. Exemple I, II i II: Algebraics de com trobar els màxim/mínims d'una funció amb la condició trobada geomètricament.
79. Un altre exemple més complex, amb variables de tercer grau.
80. De vegades fent ús de igualar a zero la fluxió de la y no es troben màxims o mínims sinó punts d'inflexió.
81-82. Exemple V- on es troba un punt que no és màxim ni mínim.
83-86. Exemples VI, VII i VIII.
87-93. Problemes I, II, III, IV, V i VI.

- **Cap. 4**- De les flexions contràries(punts d'inflexió) i de les regressions

94. Havent definit prèviament el que són els punts d'inflexió, posa un exemple gràfic. I troba una fórmula genèrica
95. La fórmula serveix per corbes que tinguin ordenades paral·leles com ara un eix o un diàmetre. Però és diferent per corbes amb un focus.
96. Si els valors trobats amb les fórmules donen reals, existiran, en cas contrari no.
97. Per distingir els punts d'inflexió dels de regressió, és suficient veure el progrés de la corba veient a prop ¡l'ordenada.
98. Hi ha diferents tipus de punts de regressió.
99-104. Exemples I a V.

- **Cap. 5**- De l'evolució i del radi oscil·latori

105. Comença definint mitjançant una figura què és l'evolvent de la corba involuta i el raig de curvatura.
106-108. Aclariments i observacions de la figura, identificació de la tangent i altres entitats.
109. Identificació dels conceptes anteriors en una altra figura.
110-112. Modificació de la figura per tal d'explicar els conceptes de subosculatrix i co-radi.
113-114. Altres fórmules pel radi de curvatura.
115. Resum de les corbes amb un focus, il·lustrat amb una figura.
116. Si es troba que y és infinit per les formules anteriors, llavors les fórmules tenen un eix, no un focus.
117. Una altra manera de trobar el focus.
118. Casos particulars de la segona manera.
119. Co-radi i radi de curvatura referits a corbes amb eixos, focus o diàmetres.
120. Conclusió: per tal de trobar el radi de curvatura i el co-radi caldrà fer el diferencial de l'equació.
121. Quan el radi de curvatura pot canviar de positiu a negatiu
122. Exemple trobant els conceptes anterior en la paràbola.
123. Trobar l'equació de l'evolvent.
124. Les evolvents de corbes algebraiques seran algebraiques i rectificables.
125-131. Exemples I, II, III, IV, V,VI i VII: trobar conceptes anteriors en hipèrboles. Paràboles, el·lipsis, logaritmes, espirals logarítmics, espirals d'hipèrboles, i cicloides .
132. Punts de regressió del segon tipus.

Llibre III: Del càlcul integral

- **Cap. 1-** Les regles d'integracions expressades per fórmules algebraiques finites o que estan reduïdes a quadratures suposades.

1. Trobar els fluents de fluxions simples quan estan elevats a qualsevol variable (integració de polinomis)
2. Trobar els fluents de fluxions simples per les constants
3. Trobar els fluents de fluxions simples quan estan elevats a potències negatives.
4. Quan s'integra s'ha d'afegir una constant sumant

5-7. Trobar els fluents de fluxions complicades quan poden ser resoltes en més simples, quan estan elevades a qualsevol potència i excepte si l'índex de la variable és negatiu.

8. En aquest cas, cal usar logaritmes
9. Construcció de la corba logarítmica.
10. Una altra descripció de la logarítmica.
11. Fluents reduïdes als logaritmes.
12. Notació de les quantitats logarítmiques.
13. El logaritme d'una quantitat negativa.
14. El logaritme de potencies i arrels.
15. El logaritme de productes i quocients.
16. S'aplica el punt 4 en aquest cas també
17. Alguns casos en que les fluents per fraccions poden ser trobades.

18-19. Quan els fluents o altres fraccions poden ser reduïts a logaritmes.

20. Fluxionari i pressions preparades per reducció.

21-23. Fraccions complexes preparades per separar-les en algunes més simples(descomposició de fraccions).

24. Si les arrels del denominador no es poden trobar algebraicament poden ser trobades geomètricament.
25. Algunes d'aquestes arrels poden ser imaginàries.
26. Els fluents amb denominador d'arrels imaginàries, construcció i enteniment.
27. De manera contrària, el diferencial de qualsevol arc d'un cercle és el producte del quadrat del radi per la fluxió de la tangent, dividit entre la suma dels quadrats del radi i el quadrat de la tangent.
28. Raonament d'una fórmula diferencial amb potències amb una fracció en el seu exponent.
29. Conclusió i la fórmula

30-31. Matisos i explicació de la fórmula(exponent negatiu, exponent major que 1).

32. Formulació de manera més genèrica.
33. Cas quan la fórmula és integrable
34. La fórmula general trobada i formulada d'una altra manera
35. Explicació de les diferències entre les dues fórmules.
36. Casos particulars d'aplicació de la fórmula.
37. Radicals de fluents es poden eliminar amb substitucions per preparació per la integració.

38-39. Cas particular d'aplicació de la fórmula.

40. Una altra fórmula amb fraccions lliures de radicals.

41-43. Matisos de la fórmula. Casos particulars.

44. Introducció d'un cas més genèric per arribar a una altra fórmula.

45-46. Continuació del cas genèric fent-lo més genèric, amb exponents parells i imparells.

47. Conclusió
48. Cas particular per a exponents grans.

49. Introducció d'un cas genèric més complex (trinomial en comptes de binomial).
50. Introducció d'un cas genèric més complex amb fraccions. Fórmula.
52-54. Matisos de la fórmula anterior
55. Un altre cas per trobar una altra fórmula.
56. Darrera fórmula per integració amb substitucions.
57-63. Matisos i casos particulars de la fórmula.
64. Métode dels Multinomials(James Riccati).

- **Cap. 2**-De la regla de la integració fent ús de la sèrie infinita

65. Regla I: per reduir una fracció a sèries infinites.
66. Regla II: Per reduir quantitats radicals complicades a sèries infinites.
67. Regla III: Canon per aplicar les dues regles anteriors de manera més genèrica
68-71. Exemples i aplicació de les regles.
72. Cas particular de sèries que donen infinit
73. Mètode de Bernoulli per identificar-les i resoldre-les.
74. Canon si només hi ha dos termes en la fórmula diferencial.

- **Cap. 3**- De l'ús de la regla de rectificació de les corbes, quadratura de l'espai, aplanament de les superfícies i cubatura dels seus sòlids.

75. Introducció de la secció.
76. Cas per corbes referides a un focus.
77. Cas per corbes referides a un diàmetre.
78. Conclusió i reflexió.
79-80. Casos particulars de corbes referida a un focus.
81. Trobar la llargada de la corba amb els valors diferencials i els no diferencials.
82. Fórmula general per superfícies
83. Una altra fórmula.
84. Cas particular de la fórmula anterior.
85. Fórmula general per sòlids.
86. Trobar un sòlid format mitjançant un pla.
87. Reducció d'una corba d'un focus a un eix
88. Reducció d'un eix a un focus
89. Exemple d'una secció cònica,
90. Mètode general de reducció i exemples.
91. Substitució quan les coordenades fan un angle obtús.
92. La quadratura de la paràbola Apolloniana així com altres paràboles.
93-94. Exemples alguns amb logaritmes i altes amb sèries infinites.
95-107. Quadratures de corbes mecàniques(hipèrbola, cercle, el·lipse, cicloide, conchoide, espirals logaritmes..).
108. Quadratura de corbes mitjançant noves substitucions
109. Exemple
110-126. Rectificació de diferents corbes (paràbola Apolloniana i de la paràbola segona cúbica, arc d'un cercle, arc d'una el·lipse, hipèrbola, cicloide, logaritme..)
127-130. La cubatura de diferents corbes (ciffoid, tractric, segment d'un conoide parabòlic...)
131. Observació

132-139. Aplanament de superfícies de corbes(con, esfera. Conoides, esferoide, hiperboloide...).
140-142. Diferents superfícies de revolució
143. Observació

- **Cap. 4-** Del càlcul de la quantitat logarítmica i exponencial

144-145. Quantitats exponencials de diferents graus.
146-149. Trobar la fluxió (derivada) de la quantitat logarítmica amb diferents potències.
150-152. Trobar la fluxió (derivada) d'exponencials i productes d'exponencials.
153. Trobar fluents de fórmules diferencials logarítmiques.
154. Integració d'una fórmula general logarítmica.
155. Mètode per series.
156. Integrals de fórmules logarítmiques trobades per series.
157. Integrals de fórmules logarítmiques trobades per quadratures.
160. Construcció ed corbes logarítmiques i exponencials.
161. Construcció i quadratura d'una corba exponencial
162-164. Càlculs amb la corba exponencial.
165-166. Dos problemes amb exponencials

Llibre IV: Del mètode invers de la tangent

1-2. Definició il·lustrativa i explicació.

- **Cap. 1**- De la construcció de l'equació diferencial de primer grau, sense cap precedent separació de l'indeterminat

3. Reducció i integració d'equacions diferencials
4-7. Altres exemples junt amb reducció de la integració
8. Reducció de formes logarítmiques
9-10. Altres expressions i formes reduïdes del punt anterior

- **Cap. 2-** De la construcció de les equacions diferencials de primer grau per mitjà de la precedent separació de l'indeterminat

11. Exemple de separació de variables.
12. Reducció de diferencials per substitució
13. Ambigüitats en les integrals
14. Dificultats si es tria fer substitució per la integració.
15. Diferencials eliminats per substitucions.
16. El mateix exemple reduït duna forma diferent.
17. Separació de variables, descripció de corbes.
18. Més exemples de separació de variables.
19. Separació de les variables alterant els exponents.
20. Separació de variables emprant l'equació canònica.
21. Separació de variables sense l'equació canònica.
22. L'equació canònica com a mètode pels casos més simples.
23. Mètode general de separació de variables.
24-27. Altres mètode per arribar al mateix amb exemples.
28. Reducció per els exponents.

- **Cap. 3-** De la construcció d'altres equacions més limitades per mitjà de vàries substitucions

29-32. La separació de variables en formules general per substitucions.
33-38. Exemples de separació en equacions més complexes.
39. Altres substitucions per separar les variables en equacions canòniques.
40. Amb la propietat de la cotangent, trobar la corba.
41. Per l'àrea donada per trobar una corba.
42. Un problema ed paràboles i angles rectes
43-44. Problemes.

- **Cap. 4-** De la reducció de les equacions fluxionals (equacions diferencials) de segon grau.

45. Regles per la reducció d'equacions contenint fluxions segones(segones derivades).
46. Exemples per passar de segones a primeres fluxions.
47.Integració de fluxions segones, sense assumir una constant.
48. Per saber quina fluxió es pot considerar constant
49. Reducció a primeres fluxions mitjançant la substitució.
50. Quan cap fluxió es pot considerar constant, una es pot fixar de manera desitjada.
51. Per aquesta assumpció, es pot emprar el mètode explicat al punt 49
52. Altres mètodes de reducció
53.Reducció canviant les constants de les fluxions.
54. Exemple mitjançant un mètode anterior.
55. Reducció de d'equacions amb segon fluxional amb un cànon.
56-57. Integracions amb altres canons.
58. Segon cas de l'equació canònica.
59. Un altre mètode més general.
60. Una observació.
61. Dificultats en aquestes reduccions, venint de constants.
62-65. Problemes amb diferents dades donades.
66-67. Un mètode per equacions amb ordres de fluxions més grans
68. Conclusió.

AMPLIACIÓ PER LA VERSIERA

Tractat de Fermat

El conitngut que Fermat exposa a la seva obra *De aequationum localium transmutatione et emmendatione* queda reflectit en el següent article Fermat's Treatise on quadrature: a new reading[10].

"This curve seems to have been brought to Fermat's attention by the geometer Lalouvere who might have asked Fermat about its quadrature, and immediately after that Fermat says: "With the same method I have squared the cissoid of Diocles or, I had rather say that I have reduced its quadrature to that of the circle." Fermat in the Treatise does not give any more indications about how he reached the quadrature of the cissoid. Notwithstanding, the two curves, the versiera and the cissoid, have similar cartesian equations, a fact that makes a common treatment with Fermat's method possible. In fact, we will treat a more general family of curves which can be tackled in the same way.

Let us consider the family of curves with equation (11) $b^{N-3}xy^2 = (b - x)^N$. For N = 1 we have the versiera (Figure 11) and for N = 3 the cissoid (Figure 12).”

I tot seguit troba la quadratura que diu que correspon a l’àrea romanent entre la corba i els dos eixos.

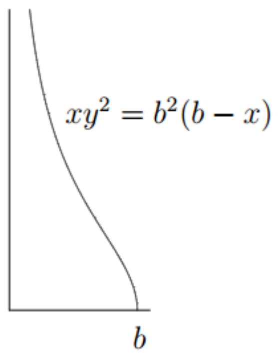


Figure 11. Versiera.

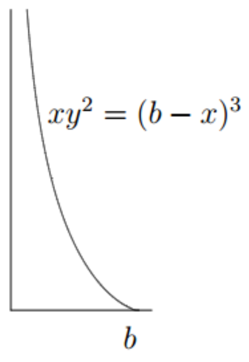


Figure 12. Cissoid.

Imatge extreta de article Fermat’s Treatise on quadrature: a new reading [19].

***Expressió algebraica del Tractat de quadratures de Fermat (p. 233)**:* $b^3 = a^2e + b^2e$

Per tant, clarament Fermat de manera conceptual sabia la parametrització i demostrava la quadratura de la corba. Tot i així, no troba la relació entre x i y, podent-ne fer càlculs algebraics amb ella.

El text original de l’obra de Fermat és la següent *De aequationum localium transmutatione et emendatione* (pp. 161-162):

Construetur igitur tangens hoc pacto: Producatur semidiameter circuli dati CA ad punctum U, et fiat AU recta aequalis AC. Rectangulum ADG ad rectam UD applicetur et faciat latitudinem DF. Juncta FH tanget cissoidem. Indicemus etiam modum agendi in conchoide Nicomedea, sed indicemus tantum, ne prolixior evadat sermo. Esto conchois Nicomedea, ut construitur apud Pappum et Eutocium figura sequens. Polus est punctum I, recta KG est asymptotos curvae, recta IHE perpendicularis ad asymptotom, punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda est tangens NBA, concurrens cum IE in puncto A.

Sit factum, ut supra. Ducatur NC parallela KG. Ex proprietate specifica curvae, recta LN est aequalis rectae HE. Sumatur quodlibet punctum inter C et E, ut D, a quo rectae CN parallela ducatur DB, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur propietas specifica debet considerari in tangente, jungatur BI, occurrens rectae KG in M et, ex praeceptis artis, recta MB adaequetur rectae HE: orietur tandem quaesita aequalitas. Quo dit procedat, CA, ut supra, vocetur A; recta CD vocetur E; recta EH data vocetur Z, et reliquae datae suis nominibus designentur.

Traducció i adaptació al català:

Per la construcció de la tangent: Estendre la recta CA fins al punt U, d’on s’obtè AU igual a AC. El rectangle ADG comparteix la recta UD i l’alçada és DF. Connecteu FH per obtenir la cissoide. S’indica a continuació el comportament dels concoides de Nicomedes, tot i que el concepte pot ser més ampli. Deixi el concoide de Nicomedes ser construït en la forma de la subseqüent a Pappus i Eutocius. El pol és I, KG l'asímptota de la corba, IHE perpendicular a l'asímptota, N un punt donat a la corba en la qual serveix per dibuixar una reunió NBA tangent amb IE a A.

Suposem com l'anterior. El dibuix NC s'obté establint paral·lelismes amb RG. Les propietats específiques de la corba estableixen que distància HE és igual a la distància LN. Prenem el punt entre C i E, és a dir, D, el qual es dibuixa paral·lela de CN, DB, i B és punt de tangència a la corba. Com que les propietats específiques es consideren en la tangent, s'uneixen BI que talla a KG en M i, a partir dels ensenyaments de la tècnica, es troba que MB és igual a HE. Però, finalment, per buscar la igualtat s'ha de procedir, CA, l'anomenarem A; CD = E, EH = z, el, i els restants són designats pels seus noms reals se'ls ha donat.

Obres de Grandi

Quant a Grandi, el que reflecteix l'article La versiera di. . . Guido Grandi de Luigi Tenca[20] és:

"Guido Grandi dóna la seva primera definició de la versiera a la qual segueixen propietats interessants, i n'indica les següents. 1) La porció del pla acorralat entre la corba i la seva asímptota, esteses indefinidament per les dues bandes, és igual a quatre vegades el cercle que genera la corba mateixa; 2) Utilitzant aquesta porció del pla al voltant de la asímptota P s'obtè un sòlid equivalent al doble que el que genera el mateix cercle en la mateixa rotació. Troba després l'equació de la corba en coordenades cartesianes ortogonals, generalitzant a les corbes on la versiera n'és un cas particular."

Conclou el seu article amb aquesta reflexió:

"Maria Gaetana Agnesi no només no va inventar la Versiera, sinó que a més, les poques coses que va publicar d'aquesta corba ja eren conegudes. Això no disminueix els mèrits propis que en són molts."

Text original de Luigi Tenca:

GUIDO GRANDI, nella sua Quadratura Circuli et Hyperbolae, pubblicata a Pisa presso F. Bindi (1703, 1710), nella Prop. IY dà la sua prima definizione délia versiera alla quale seguono proprietà interessanti, ne indichiamo alcune. 1) La porzione di piano cornpresa fra la curva e il suo asintoto, estesa indefinitamente dalle due bande, équivale a] quadruplo del cerchio generatore délia curva stessa; 2) Eotando detta porzione di piano attorno alP asintoto si ottiene un solido equivalente al doppio di quello generato nella stessa rotazione dal cerchio generatore. Trova poi l'equazione délia curva in coordinate cartesiane ortogonali, generalizzando a curve délie quali la versiera è un caso particolare.

A continuació, es troben les dues fitxes docents.

Nom...

Grup............

Curs acadèmic: 20.... -20.... 3r ESO Matemàtiques

1.- Calcula (a+b)·(a+b)

2.-Calcula $(a+b)^2$

3.- Troba l'arrel quadrada de $a^2+2ab+b^2$ utilitzant el mètode següent:

Fes l'arrel quadrada del primer terme, a^2 , i escriu aquest terme a (B)

Resta la quantitat a^2 a la fórmula $a^2+2ab+b^2$ i escriu aquest terme a (D)

Dobla la quantitat a (B) i escriu-la a (M)

Divideix el primer terme de (D) entre el terme a (M) i suma el resultat a (B)

(A) $a^2+2ab+b^2$	(B)
(D)	(M)

Comprova que:

Si multipliques el terme de (M) l'últim terme de (B): ....

i li sumes el quadrat de l'últim terme de (B)...................

i restes aquesta quantitat a (D) el resultat és zero.

Així doncs, l'arrel quadrada de $a^2+2ab+b^2$ és la quantitat que apareix a (B).

L'exercici 3 està basat en el mètode docent de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), matemàtica de la il·lustració italiana qui va escriure Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana (1748).

Nom...

Grup...........

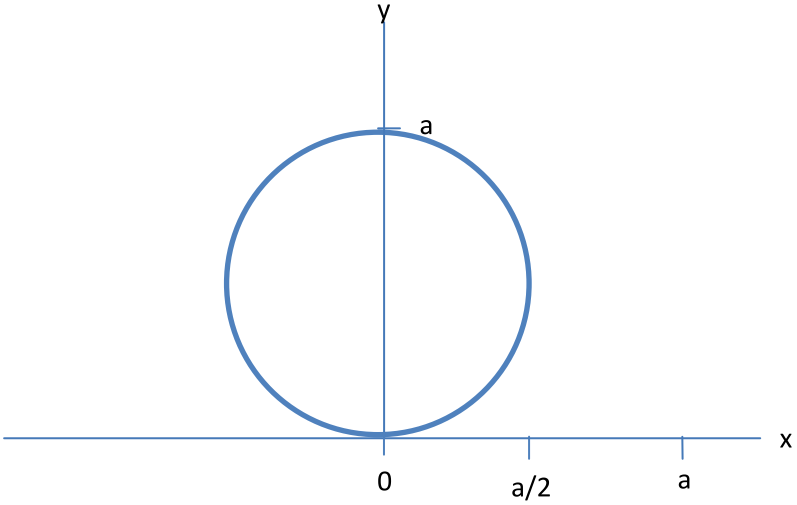
Curs acadèmic: 20.... -20.... 4t ESO Matemàtiques

1.- Troba l'expressió aïllada en x dels punts que compleix $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}$ sabent que AC=a, AB=y i BM=x, i BD=$\sqrt{ay - y^2}$.

2.- A partir de l'expressió trobada a l'apartat 1, substitueix els valors de x i troba y en funció de a:

x	y
0	
$\frac{a}{2}$	
a	

3.- Traça els tres punts i fes un dibuix de la corba aproximat, sabent que la corba volteja per la part superior la circumferència i que la corba és simètrica respecte y.



Aquesta corba s'anomena *La Versiera* i l'exercici està basat en un problema del llibre de docència *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana (1748*) escrit per Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), matemàtica italiana durant l'època de la il·lustració.

ETSEIB