

Elmar Wings, Tirazheh Zare Garizy, Björn Lünemann

Entwicklung und Analyse des kinematischen Modells für die Werkzeugmaschine TriPod W₃

*Singularitätsanalyse und Optimierung der
Modellparameter*

Elmar Wings, Tirazheh Zare Garizy, Björn Lünemann

Entwicklung und Analyse des kinematischen Modells für die Werkzeugmaschine TriPod W₃

*Singularitätsanalyse und Optimierung der
Modellparameter*

Verlag: Hochschule Emden/Leer
Druckerei: Werbeagentur „VON DER SEE“, Emden
Buchbinderei: Werbeagentur „VON DER SEE“, Emden

© 2016

Hochschule Emden/Leer

Constantiaplatz 4

26723 Emden

E-Mail: bibliothek.emden@hs-emden-leer.de

ISBN 978-3-944262-08-6

Inhaltsverzeichnis

1	Projekt „TriPod W3“	1
2	Geometrische Analyse des Arbeitsraumes	3
2.1	Methodik	3
2.2	Die kinematische Struktur des TriPod W3	4
2.3	Bestimmung der Strebenlängen in Abhängigkeit von der TCP-Position	7
2.4	Bestimmung der Freiheitsgrade des TriPod W3	12
2.5	Dimensionierung und Optimierung der Struktur	14
3	Singularitätsanalyse	21
3.1	Fall 1 - Direkte kinematische Transformation, blockierte Streben	22
3.2	Fall 2 - Inverse kinematische Transformation, nicht erreichbare Positionen	25
3.3	Fall 3 - Finite Bewegungen der kinematische Kette bei blockiertem Aktuator	26
4	Zusammenfassung	27
5	Danksagung	28
A	Gelenktypen	30

Abbildungsverzeichnis

1	Digital Mock Up des TriPod W3	2
2	TriPod W3, 3-SPS Parallelkinematik mit passivem SCARA-Arm	5
3	Null-Position des Manipulators	9
4	Soll-Position des Manipulators	10
5	CAD-Model des TriPod W3	15
6	TriPod W3-Strebe	17
7	TriPod W3 Strebe, Prototyp 1	17
8	TriPod W3 Strebe, Prototyp 2	18
9	Gelenkwinkel in Abhängigkeit vom Radius der Basisplattform	20
10	Strebenlänge in Abhängigkeit vom Radius der Basisplattform	20
11	Singuläre Fläche	23
12	Singuläre Linie	24
13	Rotationsgelenk, 1DOF, R	30
14	Prismatisches Gelenk, 1DOF, P	30
15	Kugelgelenk, 3DOF, S	31

Entwicklung und Analyse des kinematischen Modells für die Werkzeugmaschine TriPod W3

Singularitätsanalyse und Optimierung der
Modellparameter

Prof. Dr. rer. nat. Elmar Wings,
Tirazheh Zare Garizy,
Björn Lünemann

Hochschule Emden/Leer

Emden 2016

Zusammenfassung

Steigende Anforderungen an die Bauteilqualität und ein Trend zur Miniaturisierung von Bauteilkomponenten führen dazu, dass in der industriellen Fertigung ein wachsender Bedarf an Präzisions- und Hochpräzisionswerkzeugmaschinen entsteht. Bei der Auswahl einer Werkzeugmaschine sind allerdings nicht nur die Präzision, sondern auch die dynamischen Eigenschaften und ein wirtschaftlicher Betrieb von Bedeutung. Werkzeugmaschinen mit parallelkinematischer Auslegung stellen in dieser Hinsicht eine interessante Alternative zu ihren Pendanten mit klassischer, serieller Kinematik dar. So lassen die geringeren bewegten Massen eine höhere Dynamik zu. Im Vergleich zu seriellen Kinematiken ist zudem eine bessere Wiederholgenauigkeit festzustellen. Aus wirtschaftlicher Sicht ist eine geringere Leistungsaufnahme hervorzuheben. Darüber hinaus ergeben sich durch die Verwendung vieler gleichartiger Bauteile Kostenersparnisse sowohl in der Fertigung als auch im späteren Betrieb (Wartung). Allerdings ist der Wartungsaufwand größer, falls die Maschine neu kalibriert werden muss. Die Realisierung einer Parallelkinematik stellt für den Entwickler jedoch eine ungleich größere Herausforderung dar. Sowohl die Auslegung der Kinematik, die Entwicklung der erforderlichen Steuerungs- und Messtechnik als auch die Fertigung und Montage sind von höherer Komplexität geprägt. Das vorliegende Manuskript beschreibt die wesentlichen Aspekte des Prozesses zur Entwicklung der Kinematik am Beispiel der Werkzeugmaschine „TriPod W3“. Schwerpunkte sind dabei die kinematische Analyse des Mechanismus sowie die Singularitätsanalyse unter Berücksichtigung der für den späteren Einsatzzweck optimierten Modellparameter.

1 Projekt „TriPod W3“

Im Rahmen des BMWi-Projektes „TriPod W3“ wurde an der Hochschule Emden/Leer in Zusammenarbeit mit der Firma Wissner Gesellschaft für Maschinenbau mbH ein neuartiges Konzept für eine Präzisionswerkzeugmaschine entwickelt. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass eine parallelkinematische Struktur mit einem seriellen Parallelenker ergänzt wird. Diese Modifikation der klassischen parallelkinematischen Auslegung erweist sich in mehrfacher Weise als vorteilhaft. Durch die Integration eines Parallelenkers werden zwei offene Freiheitsgrade gesperrt; die Spindel ist stets parallel zur Z-Achse. Es ergibt sich ein überraschend einfaches Bewegungssystem für dreidimensionale Anwendungen. Die Bewegungsfähigkeit entspricht der eines Hexapoden, bei vereinfachtem Aufbau und unter Ausschluss der Gefahr eines Verspannen der Mechanik. Das TriPod W3-Konzept wurde von der Firma Wissner zum Patent angemeldet. Die Bearbeitung des Projektes fand im Rahmen eines kooperativen Forschungsprojektes zwischen der Hochschule Emden/Leer und der Firma Wissner statt. Während die Firma Wissner als Werkzeugmaschinenhersteller im Wesentlichen für die mechanische Auslegung und Realisierung verantwortlich war, wurde im Umfeld des Labors für Mathematik, Steuerungs- und Regelungstechnik an der Hochschule Emden/Leer an der Charakterisierung des Systems und der Entwicklung eines Steuerungskonzeptes gearbeitet.

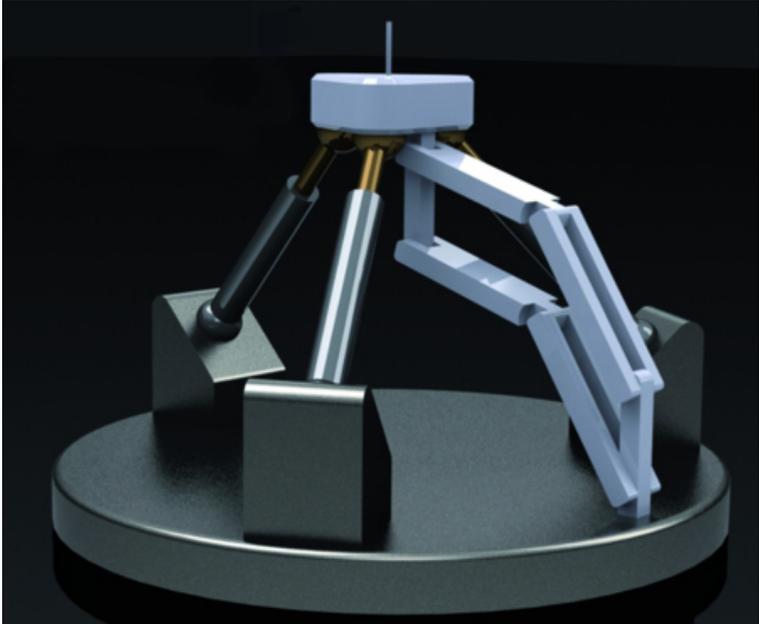


Abbildung 1: Digital Mock Up des TriPod W3

2 Geometrische Analyse des Arbeitsraumes

2.1 Methodik

Die Entwicklung der kinematischen Modelle für die direkte und inverse Transformation ist eine existenzielle Aufgabe im Rahmen der Steuerungsentwicklung für eine parallelkinematische Werkzeugmaschine. Die wesentlichen Aufgaben lassen sich den folgenden Kategorien zuordnen:

- 1 Festlegung einer kinematischen Struktur aus einer Anzahl von kinematischen Grundelementen (Type Synthesis)
- 2 Bestimmung der Freiheitsgrade (Number Synthesis)
- 3 Dimensionierung/Optimierung der Struktur unter Berücksichtigung vorgegebener Randbedingungen (Dimensional Synthesis)
- 4 Überprüfung der kinematischen Struktur auf Singularitäten (Singularity Analysis)

Am Anfang der Entwicklung einer Kinematik steht die Festlegung bestimmter kinematischer Grundelemente, welche die vorgesehene Bewegungsfähigkeit ermöglichen. Diese Aufgabe wird als Typ-Synthese bezeichnet. Neben der Auswahl der kinematischen Elemente ist eine Festlegung hinsichtlich ihrer Anordnung zu treffen. Während sich die Anzahl der Grundelemente nach Reuleaux [F. Reuleaux, Theoretische Kinematik] auf einen Satz von 6 verschiedenen Typen beschränkt, ist die Zahl möglicher Anordnungsvarianten um ein Vielfaches größer. Die Bestimmung der am besten geeigneten Variante erfordert weitergehende Untersuchungen, die in den Schritten zwei bis vier durchgeführt werden. Für jede der ausgewählten Grundvarianten aus der Typ-Synthese ist zu überprüfen, ob die Anzahl der Freiheitsgrade ausreichend ist, um die

gewünschte Bewegung der Mechanik im Arbeitsraum zu ermöglichen. In diesem Schritt wird außerdem bestimmt, wie viele Aktuatoren notwendig sind, um die Steuerbarkeit der Mechanik zu gewährleisten. Ist die Struktur in Ihren Grundzügen festgelegt und das Ergebnis der ersten beiden Teilschritte im Designprozess positiv, muss als nächstes eine Dimensionierung (Dimensional Synthesis) erfolgen, welche zusätzliche Randbedingungen berücksichtigt. Diese ergeben sich aus der vorgesehenen Anwendung (Arbeitsraum) und der Spezifikation/Dimensionierung bereits gewählter Antriebs- und Strukturkomponenten. Den Abschluss des Designprozesses bildet schließlich die Überprüfung der Struktur auf Singularitäten (Singularity Analysis). Dabei wird geprüft, ob es hinsichtlich des spezifizierten Arbeitsraumes Positionen gibt, die generell nicht erreichbar oder hinsichtlich der Regelung problematisch sind.

2.2 Die kinematische Struktur des TriPod W3

Generell besteht eine Parallelkinematik aus einem Endeffektor, einer festen Basis und mehr als zwei unabhängigen kinematischen Ketten. Zum Antrieb werden n einfache Aktuatoren verwendet. Ein derartiger Manipulator kann sich innerhalb von n Freiheitsgraden bewegen. [3, S. 13]

Um sicherzustellen, dass eine Parallelkinematik die vorgesehenen Anforderungen erfüllt, ist der Auslegung der Kinematik besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Entsprechend des ersten Teilschrittes im Designprozess für eine Parallelkinematik wird zunächst eine kinematische Struktur aus bestimmten mechanischen Grundelementen erstellt. Der TriPod W3 besteht aus drei parallelen SPS-Achsen (SPS = Spherical-Prismatic-Spherical) und einer zusätzlichen, passiven seriellen Kinematik. Die serielle Kinematik verhält sich dabei wie eine SCARA-Kinematik. Sie wird deshalb im Folgenden als SCARA-Arm bezeichnet. In Abbildung 2 wird der 3SPS-Manipulator TriPod W3 schematisch dargestellt.

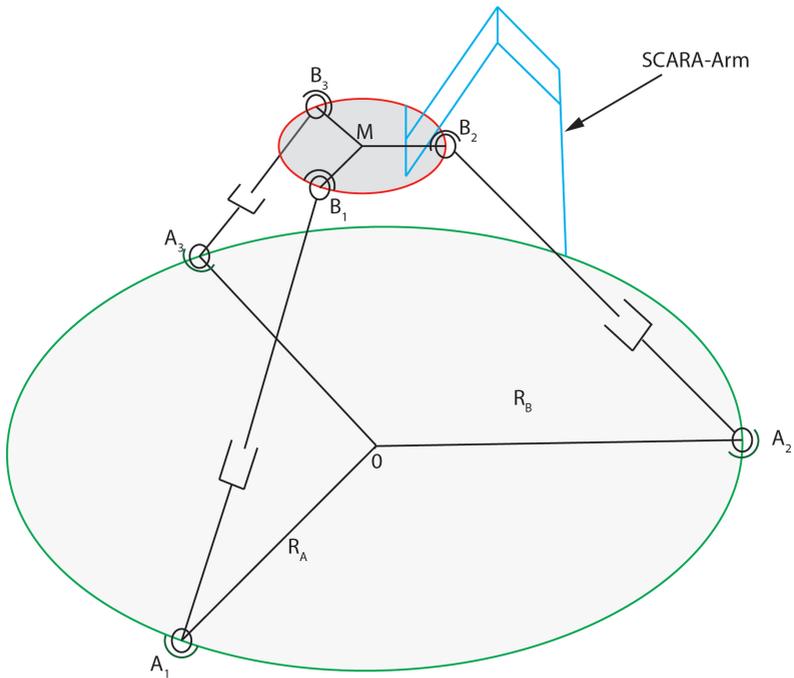


Abbildung 2: TriPod W3, 3-SPS Parallelkinematik mit passivem SCARA-Arm

Die feste Bodenplatte und die bewegliche Arbeitsplattform werden durch den SCARA-Arm verbunden. Sowohl die Basisplattform als auch die Arbeitsplattform werden in der schematischen Darstellung als Kreis repräsentiert. Der Radius der Plattformen legt dabei die Position der Anschlussstellen für die sphärischen Gelenke fest. Diese Vereinfachung ist zulässig. Die beiden Radien sind wichtige Größen in den folgenden Berechnungen. Der Radius der Basisplattform wird mit R_a bezeichnet, während dem Radius der Arbeits-

plattform die Variable R_b zugeordnet wird. Das Koordinatensystem wird in den Mittelpunkt 0 der Basisplattform gelegt. Die Streben sind über sphärische Gelenke mit Basisplattform und Arbeitsplattform verbunden. Die Länge der Streben wird dabei mit $L_i, i = 1, 2, 3$ bezeichnet.

2.3 Bestimmung der Strebenlängen in Abhängigkeit von der TCP-Position

Für einen bestimmten Werkzeugeingriffspunkt (*TCP*) kann die Länge der Streben L_i unter Verwendung der Vektoren \vec{A}_i und \vec{B}_i ($i = 1, 2, 3$) durch folgende Gleichung angegeben werden:

$$\vec{L}_i = [R] \cdot \vec{B}_i - \vec{A}_i \quad (1)$$

In dieser Gleichung ist L_i ein Vektor, der die Länge jeder Strebe beschreibt, und $[R]$ ist die Rotationsmatrix, welche die neue Position der Strebe in Abhängigkeit von der Position des TCP angibt. Wenn v_x , v_y und v_z die Drehachse festlegen, um welche eine Rotation ausgeführt wird, und wir n_x , n_y und n_z wie folgt definieren,

$$n = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$n_x = \frac{v_x}{n}$$

$$n_y = \frac{v_y}{n}$$

$$n_z = \frac{v_z}{n}$$

kann die 3×3 -Rotationsmatrix $[R]$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$[R] = R_1 \cdot M_1 + M_2 \quad (2)$$

In dieser Gleichung werden R_1 , M_1 und M_2 wie nachfolgend angegeben definiert. Die Variable c_α entspricht $\cos(\alpha)$ und s_α steht für $\sin(\alpha)$ [4, S. 9–15].

$$R_1 = \begin{bmatrix} c_\alpha + n_x^2(1 - c_\alpha) & n_x n_y(1 - c_\alpha) - n_z s_\alpha & n_x n_z(1 - c_\alpha) + n_y s_\alpha \\ n_x n_y(1 - c_\alpha) + n_z s_\alpha & c_\alpha + n_y^2(1 - c_\alpha) & n_y n_z(1 - c_\alpha) - n_x s_\alpha \\ n_x n_z(1 - c_\alpha) - n_y s_\alpha & n_y n_z(1 - c_\alpha) + n_x s_\alpha & c_\alpha + n_z^2(1 - c_\alpha) \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_x - M_x \\ P_y - M_y \\ P_z - M_z \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Die Rotation wird um den Mittelpunkt M ausgeführt. Bezogen auf den Manipulator wird um die Z-Achse rotiert. Der Mittelpunkt 0 ist der Werkzeugeingriffspunkt (TCP). Der Rotationswinkel α wird wie folgt festgelegt:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$P_y = TCP_y - cylindrical_{OY}$$

$$P_x = TCP_x - cylindrical_{OX}$$

Die Berechnung des Rotationswinkels α basiert auf der Annahme eines zylindrischen Manipulators, welcher auf dem Umfang der Basisplattform mit dem Abstand von R_A vom Mittelpunkt 0 angeordnet ist. Wie in Abbildung 3 dargestellt hat α den Wert Null in der Ruhelage. Nach dem Verfahren in eine neue Position ergibt sich ein anderes Bild. Der Winkel α hat sich geändert (Abbildung 4).

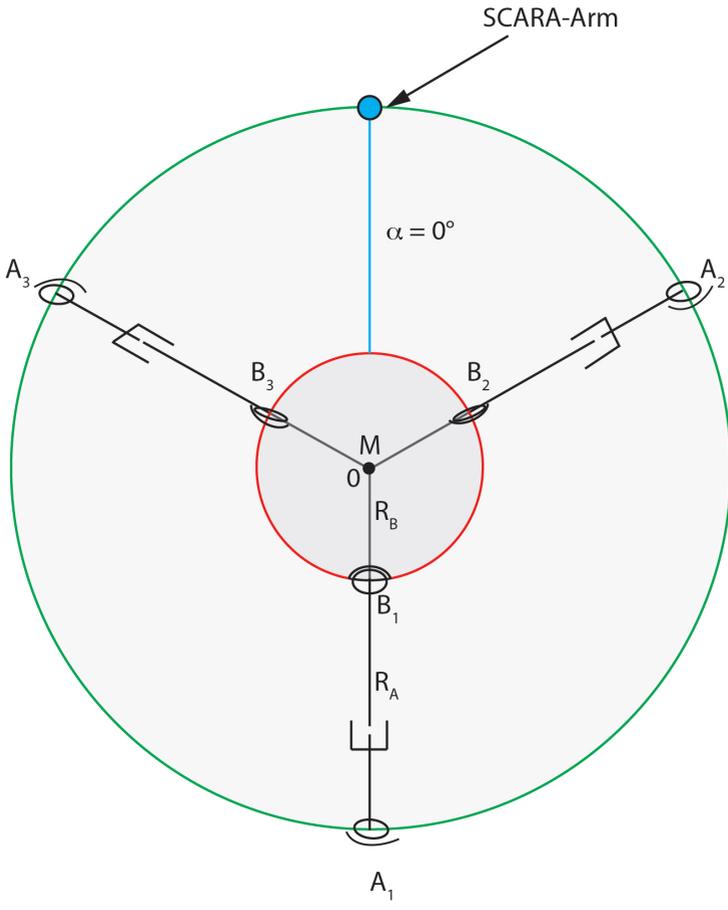


Abbildung 3: Null-Position des Manipulators

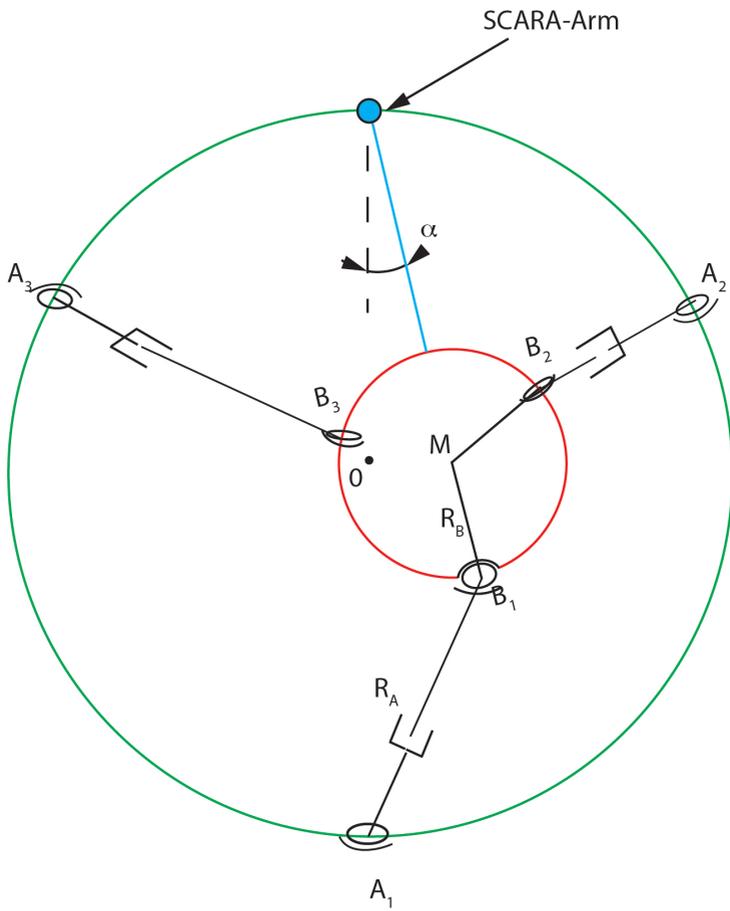


Abbildung 4: Soll-Position des Manipulators

Die Länge der Streben L_i kann somit über folgende Gleichung angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 L_i^2 = & \left(A_{x_i} - \cos \left(\arctan \left(\frac{P_y}{P_x} \right) \right) \cdot (B_{x_i} - TCP_x) \right. \\
 & \left. + \sin \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) \cdot (B_{y_i} - TCP_y) + TCP_x \right)^2 + \\
 & \left(A_{y_i} - \sin \left(\arctan \left(\frac{P_y}{P_x} \right) \right) \cdot (B_{x_i} - TCP_x) \right. \\
 & \left. + \cos \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) \cdot (B_{y_i} - TCP_y) + TCP_y \right)^2 + \\
 & (A_{z_i} - TCP_z)^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

2.4 Bestimmung der Freiheitsgrade des TriPod W3

Nach Abschluss der Typ-Synthese für den TriPod W3 muss überprüft werden, ob die Anzahl der Freiheitsgrade die gewünschte Bewegung der Mechanik im Arbeitsraum ermöglichen. Zudem muss geprüft werden, ob das Kriterium der „Steuerbarkeit“ erfüllt wird.

Ein paralleler Roboter zeichnet sich dadurch aus, dass die Anzahl der kinematischen Ketten genau gleich der Anzahl der vorhandenen Freiheitsgrade des End-Effektors ist. Allgemein spricht man nach Merlet in diesem Fall von einer Parallelkinematik bzw. einem parallelkinematischen Manipulator [3, S. 13]. Für solche Manipulatoren kann die Anzahl der vorhandenen Freiheitsgrade nach Tsai durch nachfolgende Formel bestimmt werden [5, S. 9–15].

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1} f_i - f_p$$

Die Variablen in dieser Gleichung werden wie folgt definiert:

λ = Anzahl der Freiheitsgrade im Raum, die der Mechanismus aufweisen soll

n = Anzahl der Verbindungselemente (Links) inklusive der Basis

j = Gesamte Anzahl der Gelenke, wobei die Gelenke als „binary joint“ jeweils zwischen zwei Verbindungselementen angeordnet sind

j_i = Anzahl der Gelenke mit Freiheitsgrad i

f_i = Grad der relative Bewegungen, die die i -te Verbindung erlaubt

f_p = Passive Bewegungen des Mechanismus Für den 3-SPS-Manipulator TriPod W3 wurde die Anzahl der Freiheitsgrade wie folgt berechnet. [6, S. 4–7].

$$\lambda = 6$$

$$n = 6 + 1 + 1 = 8$$

$$j_1 = 3$$

$$j_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$f_p = 3$$

$$F = 6 \cdot (8 - 9 - 1) + (6 \cdot 3 + 3) - 3 = 6$$

Um einen Manipulator steuern zu können, muss die Anzahl der Freiheitsgrade und die Anzahl der eingesetzten Aktuatoren gleich sein [5, S. 15]. Im Falle des TriPod W3 wird der SCARA-Arm verwendet, um eine derartige Konfiguration zu erzeugen und eine steuerbare Bewegung zu ermöglichen. Die folgende Berechnung zeigt, dass der TriPod W3 unter diesen Voraussetzungen 3 Freiheitsgrade besitzt. Damit ist das Kriterium der Steuerbarkeit als erfüllt anzusehen.

$$\lambda = 6$$

$$n = 6 + 3 + 1 = 8$$

$$j_1 = 6$$

$$j_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$f_p = 3$$

$$F = 6 \cdot (10 - 12 - 1) + (6 \cdot 3 + 6) - 3 = 3$$

2.5 Dimensionierung und Optimierung der Struktur

Eine der größten Herausforderungen im Rahmen des Designs eines Manipulators ist die Bestimmung der Variante, welche zum einen die gewünschte Bewegungsfähigkeit optimal erfüllt, gleichzeitig aber auch bestimmte zusätzliche Randbedingungen berücksichtigt. Diese Randbedingungen ergeben sich aufgrund fixer Anforderungen hinsichtlich der Leistungsmerkmale des Manipulators, der Eigenschaften von existierenden oder gewählten Bau- und Antriebselementen, sowie Einschränkungen aus dem späteren Anwendungsfeld der Maschine.

Die Einhaltung der herstellereitigen Spezifikationen hatte im Rahmen des TriPod W3-Projektes oberste Priorität. Die wesentlichen Eckpunkte der Spezifikation des TriPod W3 lauten wie folgt:

- Arbeitsraum: $250mm \cdot 250mm \cdot 250mm$
- Wiederholgenauigkeit: $0,001mm$
- Positioniergenauigkeit: $0,005mm$
- Geschwindigkeit in den Achsen: $1,7 \frac{m}{s}$
- Beschleunigung in den Achsen: $26 \frac{m}{s^2}$

In Abbildung 5 ist ein CAD-Modell des TriPod W3 zu sehen.

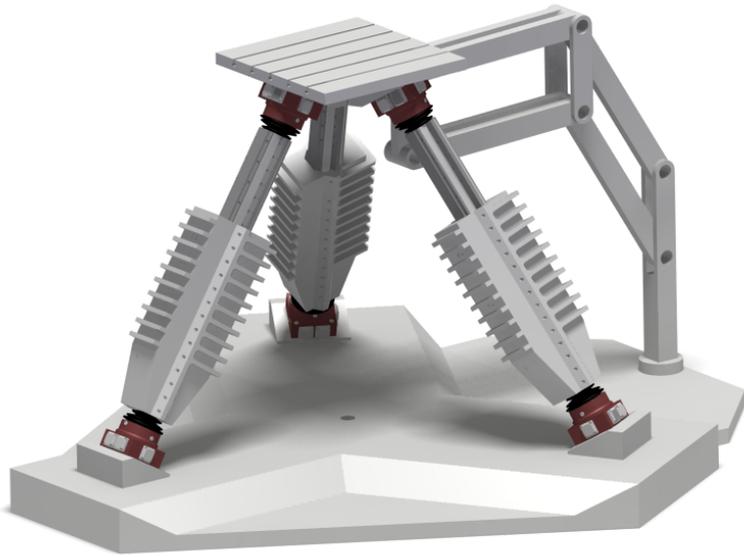


Abbildung 5: CAD-Model des TriPod W3

Die folgenden durch die Spezifikation der TriPod W3-Strebe (Abbildung 6) und deren Komponenten festgelegten Randbedingungen mussten bei der Entwicklung der TriPod W3-Kinematik zusätzlich berücksichtigt werden.

- Maximaler Verstellbereich des Achswinkels aus der Null-Lage: $\pm 15^\circ$.
- In der Null-Lage beträgt der Anstellwinkel zwischen Strebe und Basisplattform 60° . Daraus ergibt sich eine maximale Steifigkeit bei voller Abdeckung des spezifizierten Arbeitsraumes.
- Maximale Strebenlänge $L = 1450mm$; Distanz zwischen den Mittelpunkten der Gelenkkugeln: $1250mm$
- Minimale Länge $L_{min} = 1250mm$; Distanz zwischen den Mittelpunkten der Kugelgelenke $850mm$
- Hub: $200mm$
- Maximale Geschwindigkeit (bei $200mm$ Hub): $V_{max} : 2,5 \frac{m}{s}$
- Beschleunigung: $31,6 \frac{m}{s^2}$
- Maximale Kraft: $3520N$
- Externe Masse im Test-Setup: $111,35kg$

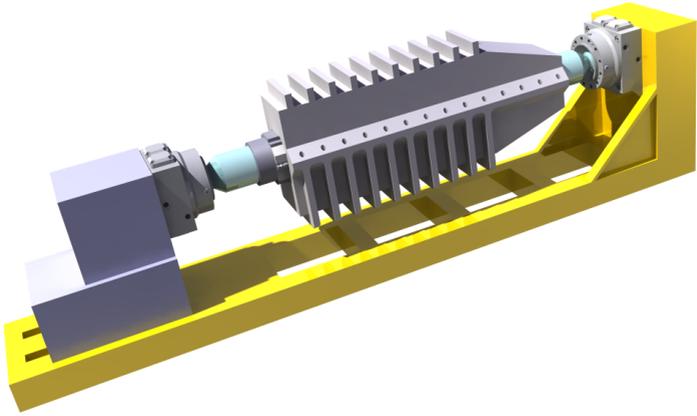


Abbildung 6: TriPod W3-Strebe

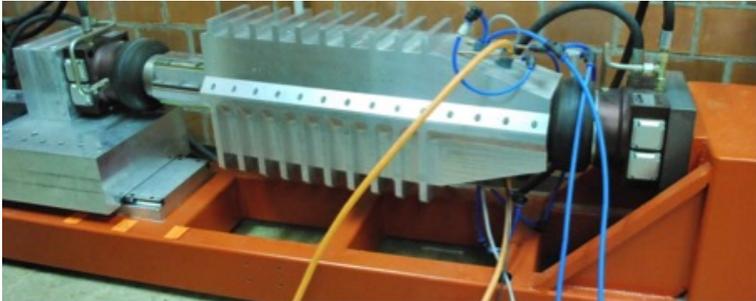


Abbildung 7: TriPod W3 Strebe, Prototyp 1

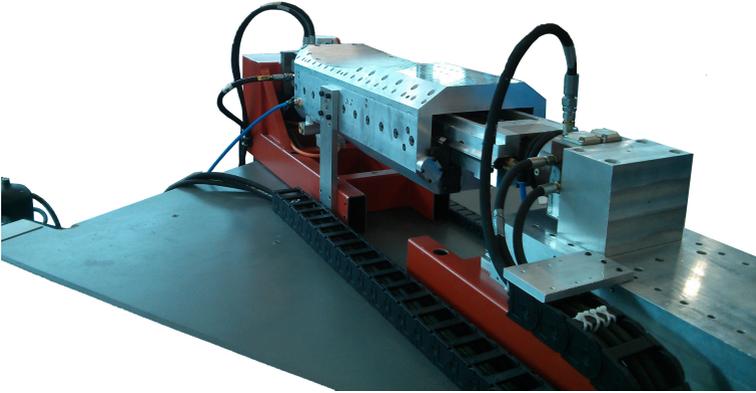


Abbildung 8: TriPod W3 Strebe, Prototyp 2

Im vorliegenden Fall wurden bei einem spezifizierten minimalen Radius der Arbeitsplattform von $R = 176\text{mm}$ verschiedene Werte für den Radius der Basisplattform untersucht. Für jede Variante wurden der Winkel zwischen den Streben und der Basisplattform sowie die Position des TCP gemessen. Die Parametervariation wurde unter Verwendung der folgenden Formeln durchgeführt. Der Winkel θ_i bezeichnet dabei den Anstellwinkel der Streben gegenüber der Basisplattform. Der Winkel θ'_i bezieht sich auf den Winkel zwischen der jeweiligen Strebe und der sich bewegenden Arbeitsplattform.

$$\begin{aligned}\vec{V}_i &= \vec{A}_i - \vec{B}_i \\ \vec{W}_i &= \vec{A}_i - [R] \cdot (\vec{B}_i + T\vec{C}P) \\ \theta_i &= \frac{\vec{V}_i \cdot \vec{W}_i}{|\vec{V}_i| \cdot |\vec{W}_i|}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{V}'_i &= [R] \cdot (\vec{A}_i - \vec{B}_i) \\ \vec{W}'_i &= \vec{A}_i - [R] \cdot (\vec{B}_i + T\vec{C}P) \\ \theta'_i &= \frac{\vec{V}'_i \cdot \vec{W}'_i}{|\vec{V}'_i| \cdot |\vec{W}'_i|}\end{aligned}$$

R ist die Rotationsmatrix, welche in Gleichung 2 beschrieben wurde. Anmerkung: Es gilt folgende Definition: $v_x = 0$, $v_y = 0$ und $v_z = 1$. Das Ergebnis der Optimierung führt zu folgenden Parametern für den Manipulator in der Ruhelage:

$$R_A = 805mm$$

$$R_B = 176mm$$

$$|\vec{L}| = 1258mm$$

$$A_1 = \langle 0, 805, 0 \rangle$$

$$A_2 = \langle -697.15, -402.5, 0 \rangle$$

$$A_3 = \langle 697.15, -402.5, 0 \rangle$$

$$B_1 = \langle 0, 176, 1089.46 \rangle$$

$$B_2 = \langle -152.42, -88, 1089.46 \rangle$$

$$B_3 = \langle 152.42, -88, 1089.46 \rangle$$

Abbildung 9 und Abbildung 10 zeigen die Auswirkung einer Änderung des Radius der Basisplattform auf die zur Abdeckung des Arbeitsraumes erforderliche Strebenlänge und den erforderlichen Winkel in den Kugelgelenken. Anmerkung: Die Strebenlänge wurde nach Gleichung 1 berechnet.

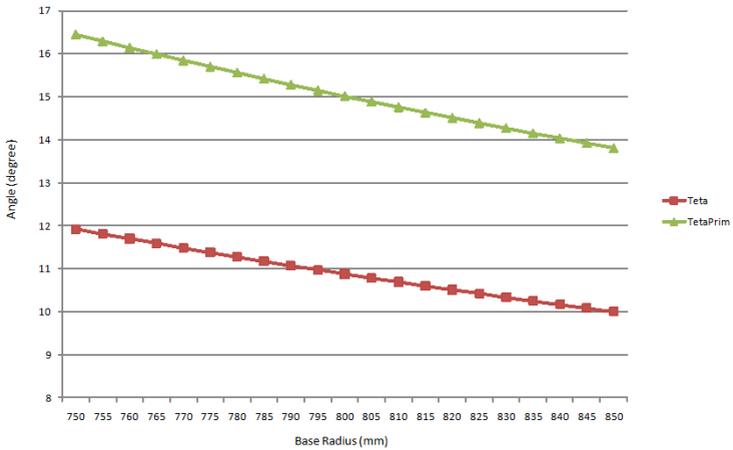


Abbildung 9: Gelenkwinkel in Abhängigkeit vom Radius der Basisplattform

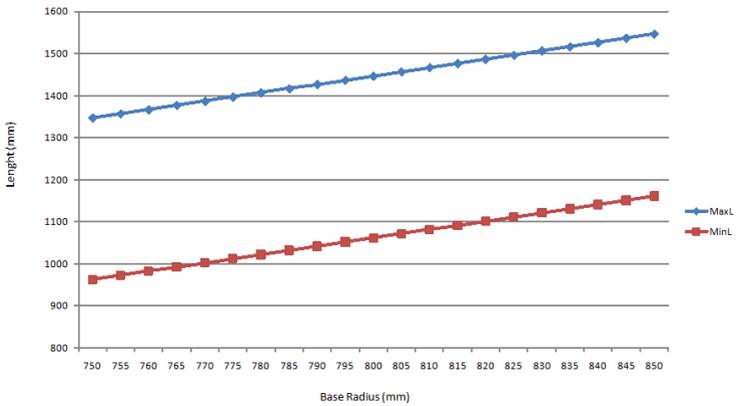


Abbildung 10: Strebenlänge in Abhängigkeit vom Radius der Basisplattform

3 Singularitätsanalyse

Die Singularitätsanalyse für den TriPod W3 wurde unter Verwendung der von Gosselin und Angeles eingeführten Methode durchgeführt [2, S. 281-282].

Zunächst wurde die implizite Funktion F wie folgt aufgestellt:

$$F(\vec{L}, \vec{X}) = \vec{0} \iff F(\vec{L}, \vec{X}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{L}_1, \vec{X}) \\ F_2(\vec{L}_2, \vec{X}) \\ F_3(\vec{L}_3, \vec{X}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

In Gleichung 4 ist \vec{L}_i ein Vektor, der die Länge der Strebe angibt. X steht für die Position des TCP:

$$\vec{X} = [TCP_x, TCP_y, TCP_z].$$

Durch Ableiten der Funktion 4, nach der Zeit erhält man:

$$A\dot{X} + B\dot{L} = 0 \quad (5)$$

mit

$$A = \frac{\partial F}{\partial X}, B = \frac{\partial F}{\partial L} \quad (6)$$

Die Jacobi Matrizen [1, S. 242-248] von A und B nehmen folgende Gestalt an:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial TCP_x} & \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial TCP_y} & \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial TCP_z} \\ \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial TCP_x} & \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial TCP_y} & \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial TCP_z} \\ \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial TCP_x} & \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial TCP_y} & \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial TCP_z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial L_1} & \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial L_2} & \frac{\partial F_1(X, L_1)}{\partial L_3} \\ \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial L_1} & \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial L_2} & \frac{\partial F_2(X, L_2)}{\partial L_3} \\ \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial L_1} & \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial L_2} & \frac{\partial F_3(X, L_3)}{\partial L_3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Im Falle einer Parallelkinematik müssen drei verschiedene Bedingungen überprüft werden, um Konfigurationen zu bestimmen, bei denen Singularitäten auftreten.

3.1 Fall 1 - Direkte kinematische Transformation, blockierte Streben

Diese Art von Singularität tritt in Zusammenhang mit der direkten kinematischen Transformation auf. Die Geschwindigkeit der Streben muss in diesem Fall gleich Null sein. In anderen Worten: Die Streben sind blockiert (locked), so dass die gewünschte Lage/Position im Arbeitsraum nicht erreicht werden kann. Die in diesem Fall zu erfüllende Bedingung lautet $\det(A) = 0$. Nach der Berechnung der Determinante $\det(A)$ und Lösen der Gleichung $\det(A) = 0$, wurden folgende singuläre Punkte bestimmt:

$$\begin{aligned} TCP_x = TCP_x, TCP_y = TCP_y, TCP_z = 0 \\ TCP_x = VALUE, TCP_y = TCP_y, TCP_z = TCP_z \end{aligned}$$

In diesem Fall ist das Ergebnis ein Wert (hier als VALUE bezeichnet), welcher einem negativen Wert unter einer Wurzel entspricht. In den unten abgebildeten Plots (Abbildung 11 und Abbildung 12) wird $VALUE^2$ in zwei unterschiedlichen Darstellungen repräsentiert.

Wie in Abbildung 11 und Abbildung 12 zu sehen ist, sind die berechneten Werte negativ und quadriert. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass ein derartiger TCP_x nicht existiert.

$$TCP_x = VALUE, TCP_y = TCP_y, TCP_z = TCP_z$$

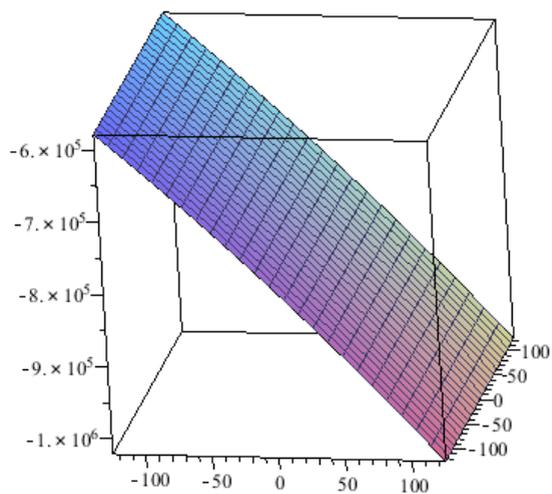


Abbildung 11: Singuläre Fläche

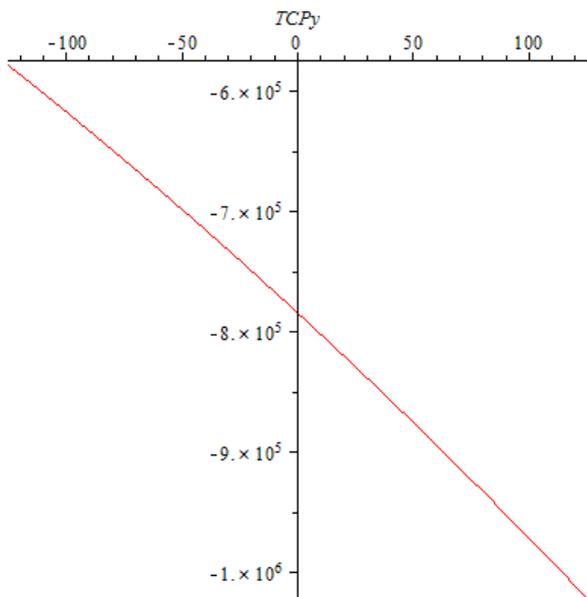


Abbildung 12: Singuläre Linie

In diesem Fall ist der Wert „VALUE“ negativ und ein singulärer Punkt liegt außerhalb des spezifizierten Arbeitsraumes des TriPod W3. Anhand der Lage der drei durch Lösung von $\det(A) = 0$ bestimmten Singularitäten wurde bewiesen, dass die direkte kinematische Transformation frei von Singularitäten ist.

3.2 Fall 2 - Inverse kinematische Transformation, nicht erreichbare Positionen

Der zweite Fall bei der Bestimmung der Singularitäten tritt in Zusammenhang mit der inversen kinematischen Transformation auf. Die zu erfüllende Bedingung lautet $\det(B) = 0$. Die Berechnung von $\det(B)$ ergibt folgendes Ergebnis;

$$\det(B) = 8 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$$

Es liegen somit 3 singuläre Punkte vor:

1.

$$L_1 = 0, L_2 = L_2, L_3 = L_3$$

2.

$$L_1 = L_1, L_2 = 0, L_3 = L_3$$

3.

$$L_1 = L_1, L_2 = L_2, L_3 = 0$$

Die gefundenen Singularitäten liegen nicht innerhalb der definierten Konfiguration des Manipulators. Sie werden somit nie erreicht werden. Bezogen auf die inverse kinematische Transformation wird der TriPod W3 somit nie einen singulären Punkt erreichen.

3.3 Fall 3 - Finite Bewegungen der kinematische Kette bei blockiertem Aktuator

Die dritte Art von Singularität tritt auf, wenn $\det(A) = 0$ und $\det(B) = 0$ sind. Dieser Fall bezieht sich auf einen Zustand, in dem der Aktuator blockiert ist, die kinematische Kette jedoch finite Bewegungen ausführen kann. Dieser Fall tritt für die vorliegende Spezifikation nicht auf.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Kinematik des TriPod W3 keine Singularitäten im spezifizierten Arbeitsraum aufweist.

4 Zusammenfassung

Im Rahmen des BMWi geförderten Projektes TriPod W3 wurde an der Hochschule Emden/Leer in Kooperation mit der Firma Wissner Gesellschaft für Maschinenbau mbH eine parallelkinematische Werkzeugmaschine entwickelt. Eine Besonderheit stellt die Ergänzung der parallelkinematischen Grundstruktur mit einem seriellen Parallelenker dar. Diese Maßnahme dient zur Verringerung der Freiheitsgrade und führt zu einer einfacheren Steuerbarkeit des Mechanismus. Weiterhin beugt der Parallelenker einem Verspannen der Mechanik vor und kann als Träger für zusätzliche Messsysteme genutzt werden. Im ersten Abschnitt des Manuskriptes wurde die Struktur der Kinematik erläutert. Entsprechend der Synthetisierung aus kinematischen Grundelementen kann der TriPod W3 als 3SPS-Manipulator identifiziert werden. Er besteht aus drei parallelen SPS-Achsen (SPS = Spherical-Prismatic-Spherical) und einer zusätzlichen, passiven seriellen Kinematik (SCARA). Im Anschluss an die Typ-Synthetisierung wurden die Gleichungen zur Berechnung der Strebenlängen in Abhängigkeit von der TCP-Position hergeleitet (inverse Kinematik) und eine Bestimmung der Freiheitsgrade (Number Synthesis) durchgeführt. Es wurde gezeigt, dass die Auslegung des TriPod W3 das Kriterium zur Steuerbarkeit erfüllt, wonach ein Manipulator als steuerbar gilt, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade und die Anzahl der eingesetzten Aktuatoren gleich ist [Tsa99]. Im Falle des TriPod W3 wird der SCARA-Arm verwendet, um eine derartige Konfiguration zu erzeugen.

Im zweiten Teil des vorliegenden Manuskripts wurde eine Optimierung des kinematischen Modells entsprechend der spezifizierten Anforderungen an die Werkzeugmaschine und bestimmter Randbedingungen vorgenommen, die sich aus den Eigenschaften der verwendeten Bauteile ergeben. Zum einen wurde die erforderlichen Strebenlängen ermittelt, welche ein Erreichen jedes Punktes im spezifizierten Arbeitsraum zulassen. Als veränderbarer Designparameter wurde dabei der Radius der Basisplattform festgelegt. Zu-

sätzlich wurde untersucht welche Gelenkwinkel eingenommen werden, wenn sich der TCP im Arbeitsraum bewegt. Diese Untersuchung ist zwingend notwendig um festzustellen, ob das spezifizierte hydrostatische Lager den Bewegungsspielraum unter Umständen einschränkt. Abschließend wurden Optimierungsmöglichkeiten hinsichtlich der Steuerbarkeit (Singularitäten) aufgezeigt. Dazu wurde die Jacobi-Matrix bestimmt. Auf dieser Grundlage konnte nachgewiesen werden, dass alle Punkte des Arbeitsraumes erreichbar sind.

5 Danksagung

Die im vorliegenden Manuskript dargestellten Ergebnisse wurden im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes „Entwicklung und Verifizierung des kinematischen Modells der Parallelkinematik, Evaluierung geeigneter Reglerstrukturen und Integration dieser Strukturen in ein Steuerungssystem“ erarbeitet. Das Vorhaben mit dem Förderkennzeichen KF2400602W09 wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Wirtschaft und Bildung (BMWi) innerhalb des Förderprogramms „Zentrales Innovationsprogramm Mittelstand“ gefördert. Das Projekt war ein Kooperationsprojekt zwischen dem Unternehmen Wissner Gesellschaft für Maschinenbau mbH, Göttingen, und der Hochschule Emden/Leer und wurde vom Projektträger AiF, Berlin, betreut.

Literatur

- [1] G. Gogu. *Structural Synthesis of Parallel Robots*. Springer, Dordrecht, 2008.
- [2] C. Gosselin and J. Angeles. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains. *IEEE Transaction on Robotics and Autonomous*, 6(3):281–290, 1990.
- [3] J. P. Merlet. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers and Springer, 2nd edition, 2006.
- [4] B. Siciliano. *Springer Handbook of Robotics: With 84 tables*. Springer, Berlin and Heidelberg, 2008.
- [5] L. Tsai. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Wiley, New York, 1999.
- [6] S. M. Wharton and Y. P. Singh, editors. *Development of Solid Models and Multimedia Presentations of Kinematic Pairs*, Session 2793, 2001.

A Gelenktypen

Das Modell des Manipulators enthält drei verschiedene Gelenktypen, welche in den folgenden Abbildungen 13,14,15 [6, S. 4–7] dargestellt werden:

1. Rotationsgelenke im Scara-Arm

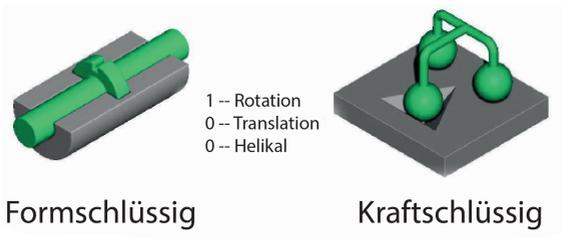


Abbildung 13: Rotationsgelenk, 1DOF, R

2. Prismatisches Gelenk

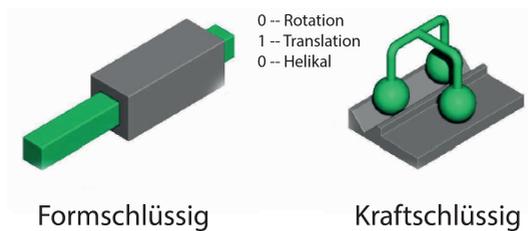


Abbildung 14: Prismatisches Gelenk, 1DOF, P

3. Kugelgelenk mit 3 Freiheitsgraden.

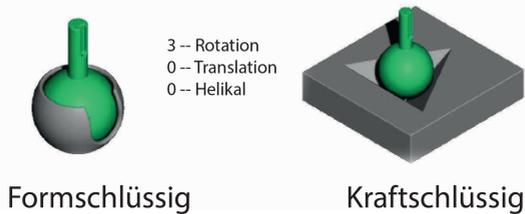


Abbildung 15: Kugelgelenk, 3DOF, S

Um die Freiheitsgrade n eines Manipulators zu berechnen, der aus 3-SPS-Beinen besteht, muss berücksichtigt werden, dass n durch die Summation der Freiheitsgrade in den Gelenken jedes Beines, im Antrieb und der Basisplattform erfolgt.

Die Anzahl j_1 der Gelenke mit Freiheitsgrad $n = 1$ wird durch die prismatischen Gelenke bestimmt. Die Anzahl j_3 der Gelenke mit Freiheitsgrad $n = 3$ wird hingegen durch die Kugelgelenke festgelegt.

In jedem einzelnen Bein findet eine Rotation statt, welche keine Kraft- oder Momentenübertragung nach sich zieht. Dies wird als die passive Bewegung des Beines betrachtet. Mit dieser Annahme wurden die Freiheitsgrade des Manipulators im Abschnitt 2.4 berechnet.

Im Fall dass die Beine mit dem aus 3 Streben bestehenden SCARA-Arm verbunden sind, und das System mit der Basisplattform verbunden ist erhöht sich n .

Die Anzahl der Gelenke mit Freiheitsgrade $n = 1$ erhöht sich in diesem Fall um 3. Der Rest ändert sich im Vergleich zum beschriebenen 3-SPS-Manipulator nicht.