UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

UN PASSEIG ALEATORI: EL PROBLEMA DE LA RUINA DEL JUGADOR

Autor: Carles Seara Mora

Director: Carles Rovira Escofet
Realitzat a: Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística

Barcelona, 1 de febrer de 2018

Resum

Aquest treball tracta el concepte de passeig aleatori i està dividit en tres apartats. En el primer s'explica el problema de la ruina del jugador: d'on va sorgir, com es va desenvolupar, qui ho va fer i diferents resolucions d'aquest. En el segon introduïm el paseig aleatori en una dimensió a partir del problema de l'apartat anterior. Veurem diferents propietats d'aquest i estudiarem els conceptes més importants. En l'últim apartat ens centrarem en el passeig aleatori de dos dimensions. Veurem les propietats més importants i el què passa en dimensions superiors.

Abstract

This paper deals with the idea of random walks and is divided into three sections. In the first one, the "Gambler's"ruin problem is explained: from where it emerged, how it was developed, and some resolutions of the problem. In the next section, we introduce the random walk in one dimension with a view to the problem in the previous section. We'll see different properties of this random walk and we'll study the most important concepts. In the last section we'll focus on the two-dimensional random walk. We'll see the most important properties and what happens in higher dimensions.

Agraïments

Vull agraïr al meu tutor d'aquest treball, Carles Rovira, per els materials proporcionats, la dedicació i l'ajut durant tot el semestre.

Índex

1 Introducció

El projecte

Un passeig aleatori o caminata aleatòria, en anglès *random walk*, és una formalització matemàtica en forma de trajectòria que resulta de fer uns certs passos aleatoris succesius. Aquest terme de passeig aleatori va ser introduït al 1905 per Karl Pearson, matemàtic anglès, que en parla en la seva publicació *"The Problem Of The Random Walk"*. Els estudis sobre aquest concepte tenen aplicacions en diferents matèries com l'economia, la física o l'ecologia. En particular, Burton G. Malkiel en la seva obra *"A Random Walk Down Wall Street"* va desenvolupar la teoria de passejos aleatoris en el camp de l'economia; en física ha servit per modelitzar el camí d'una molècula al llarg d'un líquid o un gas, l'anomenat moviment Brownià, o en ecologia per modelitzar els moviments de pastoreig dels animals. Més relacionat amb el treball és important remarcar a George Pólya, matemàtic hungarès que va demostrar al 1921 que un passeig aleatori sempre retorna a l'origen amb probabilitat 1 en una i dues dimensions, mentre que això no passa en dimensions superiors. Ho veurem i demostrarem al llarg del treball. Per últim podem citar a John Montroll, que va trobar la manera de calcular la probabilitat de retorn a l'origen en dimensions 3 o superiors.

Personalment, la motivació per a fer aquest treball em va sorgir del fet de voler estudiar probabilitats de jocs d'atzar. Aleshores vaig fixar-me en el problema de la ruina del jugador, que és un exemple de joc d'atzar interessant i alhora és un passeig aleatori. A partir d'aquí he estudiat la teoria de passejos aleatoris en una i dues dimensions, i he observat què passa en dimensions superiors. L'estructura del treball està organitzada a partir d'aquest procés d'aprenentatge, és a dir, ordenat segons el que he anat descobrint poc a poc.

Estructura de la Memòria

Com hem dit anteriorment, el treball es divideix en tres parts:

El problema de la ruina del jugador: En aquesta primera part, ens endinsem totalment en conèixer a fons aquest problema d'atzar. Comencem explicant els seus orígens i primers enunciats, i com ha anat evolucionant el problema fins a com el coneixem avui en dia. Per últim ens centrem en la resolució d'aquest, n'explicarem una d'actual, potser la més fàcil d'entendre tot i no ser la més curta; una de com ho podrien haver resolt al s.XVII, i una més perspicaç que a partir d'una idea feliç resulta més curta que les altres.

Passeig aleatori d'una dimensió: En la segona part del treball ja comencem a parlar del passeig aleatori. Veurem que el problema de la ruina del jugador és un passeig aleatori, i explicarem en què consisteix aquest passeig en una dimensió. Treballarem diverses propietats d'aquest tals com els retorns a l'origen, la visita a un punt qualsevol, el teorema de la votació, o altres conceptes com màxims o canvis de signe.

Passeig aleatori de dues dimensions: En la tercera part seguirem parlant del passeig aleatori però en aquest cas de dimensió 2. Com en l'apartat anterior, explicarem en què consisteix i treballarem algunes propietats com retorns a l'origen o la visita a un punt qualsevol. Per acabar l'apartat, observarem què passa en dimensions superiors.

Per últim, el treball té un últim apartat on s'observen simulacions de passejos aleatoris per veure el que hem treballat.

2 Un problema d'atzar: El problema de la ruina del jugador

2.1 Context i història del problema

2.1.1 Primer indici del problema conegut

La primera vegada que apareix enunciat aquest problema, segons el que sabem, es tracta d'un problema que Pascal va proposar a Fermat en una de les cartes que s'enviaven en els anys 1654-56. Pascal definia aquest problema com més difícil que tots els demés. Malgrat això, la autoria del problema ha sigut considerada de Huygens ja que apareix enunciat per primer cop en el seu tractat proposant la resolució als lectors i no cita la font del problema.

2.1.2 Huygens

Huygens va publicar el seu tractat *"De Ratiociniis in Ludo Aleae"* en llatí el 1657. Al final d'aquest tractat, trobem cinc exercicis proposats i no resolts. L'últim d'aquests exercicis és 'el problema de la ruina del jugador'. Huygens el va enunciar com un joc entre dos jugadors a un número indeterminat de partides, on en cada partida es jugaven una moneda. El que perdia li pagava una moneda a l'altre. I el joc només finalitzava quan un dels dos jugadors perdia totes les monedes. Tenim doncs, un joc que pot ser de durada infinita.

El problema planteja el càlcul de la probabilitat que un jugador arruïni al contrari sabent la quantitat de monedes que té cadascú (Huygens suposava que tots dos començaven amb el mateix nombre de monedes) i la probabilitat que cada jugador té de guanyar en cada partida. Les probabilitats entre els dos jugadors de guanyar poden ser diferents però constants al llarg de tot el joc. Les partides són independents entre si, és a dir, el resultat d'una partida no influeix en el resultat d'una partida posterior. Huygens dóna també la solució del problema, però no explica com l'ha trobat.

2.1.3 Bernoulli

Al 1713, James Bernoulli publica una edició comentada de *"De Ratiociniis"* que consisteix en la Part I del seu *"Ars Conjectandi"*. Ell opina com Pascal en la dificultat del problema ja que va tenir dificultats en el seu intent de justificar la solució que proposava Huygens.

2.2 Enunciat de Huygens

2.2.1 1a versió

A dia d'avui es coneix la correspondència prèvia a la publicació del tractat de Huygens, que aquest va mantenir amb científics francesos, i que justifica la autoria mal otorgada a Huygens. A continuació tenim una primera versió de l'enunciat, que va ser enviada per Pierre de Carcavy a Huygens el 28 de setembre de 1656, un any abans de la publicació del tractat de Huygens. Carcavy era amic de Pascal i Fermat, i va utilitzar aquesta amistat per fer d'intermediari entre ells i Huygens.

"*Dos jugadors juguen amb una probabilitat de guanyar en cada partida de 11 pel jugador A, i de 14 pel jugador B al llençar tres daus un tercer jugador. És a dir, quan els tres daus sumen 11, el jugador A guanya un punt, i quan els tres daus sumen 14, el jugador B guanya un punt. Juguen a 12 punts, amb la condició següent: si un jugador marca un punt, i en una partida posterior l'altre jugador marca un punt, aquest jugador no suma un punt sinó que resta el punt guanyat a l'altre jugador, i així successivament. De manera que si un jugador ha guanyat sis partides i ha sumat sis punts, si després l'altre jugador guanya tres partides, aquest jugador no sumarà punts, sinó que restarà tres punts als sis que tenia l'altre jugador. Etc. Aquest problema li va semblar tan difícil a Pascal que va dubtar si Fermat el podria resoldre, però ell va enviar la següent solució: Aquell jugador que ha de sumar 11 contra el que ha de sumar 14 per guanyar pot apostar 1156 contra 1 però no 1157 contra 1. I que així la veritable raó del repartiment estaria entre ambdós jugadors. Però com Pascal sap que Fermat ha resolt molt bé el que li havia proposat, m'ha donat els nombres correctes per enviar-li, i per fer-li veure que ell no hauria proposat un problema que no hagi resolt abans:*

150094635296999122

129746337890625

Però el més considerable és que Fermat té la demostració, al igual que Pascal, però sembla ser que fent servir mètodes diferents."

Aquestes demostracions de les que parla Carvary a Huygens de Pascal i Fermat mai van ser conegudes. Edwards (1983) suggereix com podrien haver-ho fet tenint en compte els mètodes que usaven per resoldre altres problemes.

2.2.2 2a versió

La segona versió que trobem del problema està en una carta de resposta de Huygens a Carvary, del 12 d'octubre de 1656. En aquesta, Huygens introdueix aquesta segona versió de l'enunciat i deixa entreveure com ho resol però no ho explica. Sembla que vol intentar mostrar al interlocutor que ell també sap resoldre-ho:

"*La proposició de Fermat em va semblar bastant comprometedora en primer lloc, però he vist aviat que no és més que un jugador suma un punt quan els tres daus sumen 11, i l'altre jugador suma un punt quan els tres daus sumen 14; i que d'aquests dos guanya el que hagi sumat 12 punts d'avantatge sobre l'altre. Sent el problema tan bonic, i veient que Pascal l'ha considerat tan difícil que va dubtar si Fermat el podria resoldre, no he pogut impedir buscar la solució. Donats 2 o 3 daus i un nḿero de punts amb el què finalitza el joc, és necessari veure quines probabilitats de guanyar té cada jugador en cada partida. Obtindrem la solució multiplicant la probabilitat de cada jugador en cada partida de guanyar per ella mateixa tantes vegades com punts es necessitin per guanyar. Per exemple, hi ha 27 casos favorables pel jugador A i 15 casos favorables pel jugador B en cada partida. Aleshores, com 27 és a 15, en proporció, com 9 a 5, és necessari multiplicar el 9 i el 5 cada un dotze vegades per si mateix, perquè es juga a 12 punts. Els productes són* 282429536481 *i* 244140625. *El mètode amb el que trobo la regla m'ensenya també al mateix temps a fer la demostració que resultarà, però, molt llarga.*"

2.2.3 Enunciat del Tractat, versió definitiva

El enunciat que finalment Huygens va triar per a que aparegués al seu tractat, publicat al 1657, va ser el següent:

"*Si cadascú té 12 fitxes, A i B juguen amb tres daus amb aquestes condicions: en cada partida que els daus sumin 11, A ha de donar una fitxa a B, i B ha de donar una fitxa a A en cada partida que els daus sumin 14. Guanyarà aquell que sigui el primer en tenir totes les fitxes.*"

I dóna la seva solució al problema:

"*La probabilitat que guanyi A és a la que guanyi B com* 244140625 *ho és a* 282429536481."

Segons hem pogut veure, quan Huygens llegeix el enunciat proposat per Fermat i redactat per Carcavy, immediatament ho enfoca pensant que els punts dels jugadors s'acumulen en la via ordinària, però el guanyador serà el primer que porti 12 punts d'avantatge (en 1656), i quan ell ho planteja al tractat, ho explica amb termes de que cada jugador arranca amb 12 punts i una partida guanyada per un jugador suposa la transferència d'un punt del oponent a ell mateix. I el guanyador total és el que acaba arruïnant a l'altre de tots els seus punts. Les tres formes de veure el problema són equivalents però és en la última versió com el problema és conegut com el de la "Ruina del Jugador".

2.3 Resolució del problema

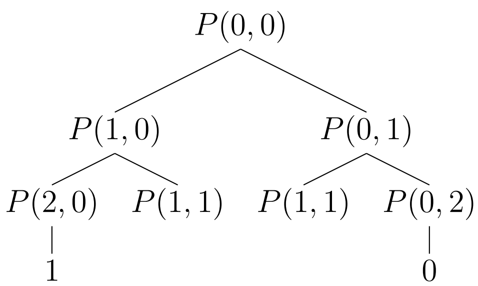
2.3.1 Resolució de Huygens

A continuació describim la resolució de Huygens:

Els jugadors arranquen amb una puntuació de $(0, 0)$, i guanya el primer que arriba als 12 punts i l'altre es queda a 0. Es llancen tres daus, i suposem que el jugador A necessita 11 punts entre els tres daus. El nombre de resultats favorables al jugador A és 15 de tots els possibles. El total de resultats possibles és $216 = 6^3$. Per altra banda, el jugador B necessita 14 punts entre els tres daus; i el nombre de resultats favorables al jugador B és 27. En total, tenim un total de $15 + 27 = 42$ casos en els que guanya un dels dos; per contra tenim $216 - 42 = 174$ casos del joc en els que no passa absolutament res.

Per tant, Huygens considera que la probabilitat de guanyar del jugador A en cada partida és 15/42, i respectivament, 27/42 és la del jugador B. Les dues probabilitats sumen 1. Identifica $P(a, b)$ com la probabilitat que té el jugador A d'arruïnar al jugador B, és a dir, que el jugador A aconsegueixi els 12 punts i el jugador B es quedi a 0; considerant el moment del joc en que el jugador A té a punts i el jugador B té b punts. El problema consisteix en trobar $P(0, 0)$, que és la probabilitat de guanyar el joc el jugador A quan els dos jugadors tenen 0 punts:

El primer anàlisi que fa és el cas simple en el que el joc s'acaba quan un dels jugadors arriba als 2 punts. Dóna una llista de tots els possibles resultats:



Observem que $P(0, 0) = P(1, 1)$, ja que en els dos casos, el jugador A està igual de lluny d'arruïnar al jugador B. Ja que per guanyar el joc, el jugador A ha de sumar 12 punts de diferència respecte el jugador B.

Aplicant Probabilitats Totals tenim:

$$P(0, 0) = p \cdot P(1, 0) + q \cdot P(0, 1).$$

on recordem que els valors de p i q són 5/14 i 9/14 respectivament.

Tornem a aplicar Probabilitats Totals:

$$P(0, 0) = p \cdot \Big(p \cdot P(2, 0) + q \cdot P(1, 1)\Big) + q \cdot \Big(p \cdot P(1, 1) + q \cdot P(0, 2)\Big) =$$

$$= p \cdot \Big(p + q \cdot P(0,0)\Big) + q \cdot \Big(p \cdot P(0,0) + q \cdot 0\Big) = p^2 + 2p \cdot q \cdot P(0,0).$$

Aïllant $P(0,0)$ i tenint en compte que $p + q = 1$:

$$P(0,0) = \frac{p^2}{p^2 + q^2}.$$

El segon anàlisi que fa és el cas en el que per guanyar, el jugador A ha d'arribar als 4 punts. Procedeix considerant només un de cada dos possibles estats del joc, és a dir, $(4,0)$, $(2,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$ i $(0,4)$, i el arbre de probabilitats serà igual que l'anterior amb la única diferència que en aquest cas, les probabilitats seràn quadrades. La explicació que dóna per a omitir els punts és el diagrama i ho justifica dient que per passar de $(2,0)$ a $(4,0)$, és necessari passar per $(3,0)$. Aquest plantejament dóna tres equacions amb solució:

$$P(0,0) = \frac{p^4}{p^4 + q^4}.$$

Si ara el joc és a 8 punts, aplicant el argument anterior un altre cop tenim:

$$P(0,0) = \frac{p^8}{p^8 + q^8}.$$

I així successivament, si es requereix arribar a un número de punts senar, per exemple, a 3 punts. Huygens fa el pas de $(0,0)$ a $(1,0)$ amb probabilitat p, i després a $(3,0)$ amb probabilitat p^2.

Obté solució:

$$P(0,0) = \frac{p^3}{p^3 + q^3}.$$

De la mateixa manera, ell generalitza per 6 punts. Afirma, que en general es compleix que la solució per n punts és:

$$P(0,0) = \frac{p^n}{p^n + q^n}.$$

2.3.2 Resolució actual

En aquest segon apartat, explicarem una manera alternativa de resoldre el problema més actual. Considerarem ara el joc entre un jugador i la banca, amb els dos conceptes següents:

"ruina del jugador": ha perdut tots els diners, que queden en mans de la banca

"fer saltar la banca": quan la banca perd tot el fons, passant a mans del jugador

Suposem que al inici del joc el jugador té n monedes, i la banca en té m. On n i m no tenen perquè ser iguals. Definim $K := n + m$, on K és el número total de monedes que juguen. En cada partida es juga una moneda, i cada partida és independent de les altres, i les probabilitats de guanyar o perdre són constants al llarg de tot el joc. Plantegem de nou, la probabilitat que té el jugador de fer saltar la banca.

Anomenem p la probabilitat de guanyar en cada partida del jugador, i q la probabilitat de la banca. Per a simplificar, $p+q=1$, és a dir, eliminem les partides en què no passa res i tot segueix igual. En cada partida, o bé guanya el jugador, o bé la banca.

Sigui w_i la probabilitat de que el jugador faci saltar la banca quan aquest disposa de i monedes. Per tant, $1 - w_i$ és la probabilitat de que la banca arruïni al jugador quan aquest té i monedes. En particular, $w_0 = 0$, ja que el jugador ha perdut totes les seves monedes i no pot seguir jugant i fer saltar la banca.

Tenim $w_1 = p \cdot w_2$, donat que si al jugador només li queda una moneda, l'única possibilitat de seguir en el joc és guanyar la següent partida. Per tant, la probabilitat de fer saltar la banca disposant de només una moneda és igual a la probabilitat de guanyar la següent partida per la probabilitat de fer saltar la banca quan el jugador disposa de dos monedes.

Ara, $w_2 = p \cdot w_3 + q \cdot w_1$, doncs la probabilitat de fer saltar la banca amb 2 monedes és igual a la probabilitat de que guanyi la següent partida (obtenint llavors 3 monedes) per la probabilitat de fer saltar la banca amb 3 monedes més la probabilitat de perdre la següent partida (quedant llavors amb només 1 moneda) per la probabilitat de fer saltar la banca amb 1 moneda. Veiem doncs que, aplicant Probabilitats Totals podem construïr una recurrència amb aquests arguments en funció del nombre de monedes que li queden al jugador:

Si el jugador té K monedes, $w_K = 1$, ja que ja té totes les monedes, ha fet saltar la banca.

En general:
$w_0 = 0$, $w_K = 1$;
$w_i = p \cdot w_{i+1} + q \cdot w_{i-1}$, per $i = 1, 2, ..., K-1$.

Aquest conjunt d'igualtats, conegut com una equació de diferències, admet una resolució algebraica senzilla que passem a desenvolupar:

Sempre és possible escriure $w_i = (p+q) \cdot w_i = p \cdot w_i + q \cdot w_i$, ja que $p+q=1$

Igualant això amb el que teníem abans:

$$p \cdot w_i + q \cdot w_i = p \cdot w_{i+1} + q \cdot w_{i-1},$$

$$p \cdot w_{i+1} - p \cdot w_i = q \cdot w_i - q \cdot w_{i-1}.$$

D'aquí obtenim:

$$w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}(w_i - w_{i-1}).$$

Aquesta igualtat serveix per i = 1,2,...,K-1:
Per $i=1$,

$$w_2 - w_1 = \frac{q}{p}(w_1 - w_0) = \frac{q}{p} w_1,$$

Per $i=2$,

$$w_3 - w_2 = \frac{q}{p}(w_2 - w_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1,$$

Per $i=3$,

$$w_4 - w_3 = \frac{q}{p}(w_3 - w_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^3 w_1,$$

...
Per $i = i-1$,

$$w_i - w_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} w_1$$

Per $i=i$,

$$w_{i+1} - w_i = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} w_1$$

Per $i = K-1$,

$$1 - w_{k-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1} w_1$$

ja que $w_k = 1$.

Si sumem membre a membre totes les igualtats anteriors obtingudes pels diferents valors de i, obtenim:

$$1 - w_1 = w_1 \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1} \right).$$

Per tant,

$$1 = w_1\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}\right).$$

Això ens permet obtenir el valor de w_1:

$$w_1 = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}.$$

Si la suma anterior només arribem fins a la i-èsima igualtat, tindríem:

$$w_i - w_1 = w_1\left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right).$$

És a dir,

$$w_i = w_1\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right).$$

I substituint el valor de w_1:

$$w_i = \frac{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}.$$

Tenint en compte que el numerador i el denominador estan constituïts per sumes limitades de progressions geomètriques amb la mateixa raó i el mateix primer terme, la expressió anterior es redueix a:

$$w_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^K}$$

i aquesta seria la solució del problema.

En el cas particular de Huygens, on $p = 5/14$, $q = 9/14$, $i = 12$ i $K = 24$, la solució és:

$$w_{12} = \frac{5^{12}}{5^{12} + 9^{12}}.$$

Per tant, la probabilitat del segon jugador (la banca en el nostre cas) de guanyar és:

$$1 - w_{12} = \frac{9^{12}}{5^{12} + 9^{12}}.$$

2.3.3 Casos Particulars

- Si $p = q$,

Es simplifica molt el problema de "fer saltar la banca";

$$w_i = \frac{i}{K}.$$

Aquest resultat ens indica que, en igualtat de condicions en cada partida, la probabilitat de "fer saltar la banca"és el quocient entre el que disposa el jugador i els diners totals en joc.

- Si $q > p$,

Considerem el jugador amb una gran suma de diners, de manera que:

$$(q/p)^i >> 1$$

Podem aproximar w_i de la següent forma:

$$w_i = (p/q)^{K-i}.$$

Que és el quocient de probabilitats en cada partida elevat als diners que té la banca.

- Si $p < q$ i K suficientment gran per a que $(q/p)^K = 0$;

llavors

$$w_i = 1 - (q/p)^i.$$

Si el jugador disposa d'una quantitat i de monedes, resulta casi segur que farà saltar la banca. La probabilitat de què el jugador s'arruïni seria:

$$(q/p)^i.$$

2.3.4 Resolució Abraham de Moivre

Una resolució alternativa posterior a la de Huygens va ser la de Abraham de Moivre en el seu treball *"De Mensura Sortis"*, publicat al 1711. Aquesta resolució va ser reproduïda en les diferents edicions del seu famós tractat *"The Doctrine of Chances"* (1718, 1738 i 1756). Aquesta demostració és bastant interessant per ser més curta que les anteriors.

Tornem al cas de dos jugadors A i B, amb probabilitats p i q, respectivament, de guanyar en cada partida. Enlloc de monedes, Moivre suposa que els jugadors tenen un cert nombre de fitxes i cada una d'un diferent valor. Així, suposem que al inici del joc el jugador A diposa de a fitxes i el jugador B de b fitxes, de forma que el número de total de fitxes en joc és $a + b$. El joc acaba quan un dels dos jugadors es queda sense fitxes.

Ara suposem que els dos jugadors disposen les fitxes en dos pilons ordenats amb les següents valoracions:

En el cas del jugador A, la fitxa que ocupa la base val $\frac{q}{p}$, la que està a sobre d'aquesta, val $(\frac{q}{p})^2$, la següent $(\frac{q}{p})^3$, i així successivament, fins la última fitxa de totes les que té, que val $(\frac{q}{p})^a$.

El jugador B, fa el mateix piló de fitxes però en ordre contrari. Així, la que ocupa el lloc més a dalt, és a dir, la que està per sobre de totes, val $(\frac{q}{p})^{a+1}$. La que segueix per sota és de valor $(\frac{q}{p})^{a+2}$. La següent, $(\frac{q}{p})^{a+3}$. Així successivament fins arribar a l'última fitxa que fa de base, que val $(\frac{q}{p})^{a+b}$.

Suposem que en cada partida, la fitxa que ocupa la posició més alta del piló del jugador que perd es transfereix al piló del que guanya ocupant llavors la posició més alta. Per tant, en cada partida, la valoració de la aposta del jugador B és sempre $\frac{q}{p}$ vegades la del jugador A.

Amb aquest raonament, De Moivre, garanteix esperança nul·la per cada jugador en cada partida.

Per exemple, en la situació inicial del joc, la esperança del jugador A de guanyar la primera partida seria:

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^{a} = 0.$$

Osigui;

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} = q\left(\frac{q}{p}\right)^{a}$$

i el mateix per al jugador B, que garanteix una partida justa.

L'última igualtat ens diu que el producte de la probabilitat del primer jugador en cada partida multiplicada per el valor de la fitxa aconseguida és igual al producte que correspon al altre jugador.

Llavors, si P_a és la probabilitat que té el jugador A de guanyar totes les fitxes de B, quan el primer té a fitxes, és a dir, al inici del joc; i si P_b és la del jugador B. De Moivre raona que si la esperança 0 es manté al llarg de tot el joc, es compleix que P_a multiplicada pel valor total de totes les fitxes guanyades per A (si A arruïna a B) ha de ser igual a P_b multiplicada pel valor de les fitxes guanyades per B (si B arruïna a A). És a dir,

$$P_a\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}+\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}+...+\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)=P_b\left(\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^{2}+...+\left(\frac{q}{p}\right)^{a}\right)$$

Si sumem les dos progressions geomètriques limitades als dos membres i sabem que $P_a + P_b = 1$; llavors obtenim:

$$P_a = \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}.$$

Hem aconseguit llavors, la solució del problema un altre cop; la probabilitat de que el jugador A arruïni al contrari.

3 Un Passeig Aleatori

El problema de la ruina del jugador el podem veure com un passeig aleatori. Suposem que ens movem per una recta on hi tenim tots els nombres enters. El nostre punt inicial és el 0 i tenim dues opcions: avançar al +1 o retrocedir al -1. Imaginem que la probabilitat d'avançar és p i la de retrocedir q, tals que $p + q = 1$. Aleshores ens mourem al +1 o -1; seguidament per seguir el nostre passeig, tindrem altre cop dues opcions: avançar al +2 o retrocedir i tornar al 0 (en el cas que en el primer pas haguem avançat al +1) o avançar al 0 o retrocedir al -2 (en el cas que en el primer pas haguem anat al -1). La probabilitat d'avançar segueix sent p i la de retrocedir q. Procedirem així successivament i farem un passeig per la recta dels enters. És una altra manera de veure el joc de la ruina del jugador, ja que cada partida del joc és un pas del passeig aleatori; la probabilitat d'avançar és la probabilitat de guanyar del jugador, i la probabilitat de retrocedir la de perdre.

3.1 Plantejament i Orientació General

En aquest segon bloc, plantejarem de forma general una teoria de jocs d'atzar. Considerem $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ on cada un representa +1 o -1, és a dir, $\epsilon_i = 1$ ó $\epsilon_i = -1$ per a tot $i = 1, 2, ..., n$. Per a tots aquests, tenim a valors que són +1 i b valors que representen -1. Per tant, $n = a + b$.

Ara podem considerar les següents sumes parcials:

$$s_1 = \epsilon_1$$

$$s_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

$$s_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

És a dir,

$$s_k := \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_k$$

per a tot $k = 1, 2, ..., n$

Definim $s_0 = 0$ i tenim $s_n = a - b$.

Els s_k representen la diferència entre el número d'ϵ_i que tenen signe + i els que tenen signe - fins a k. També podem observar que

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k$$

per $k = 1, 2, ..., n$.

Ara volem veure-ho de forma geomètrica:

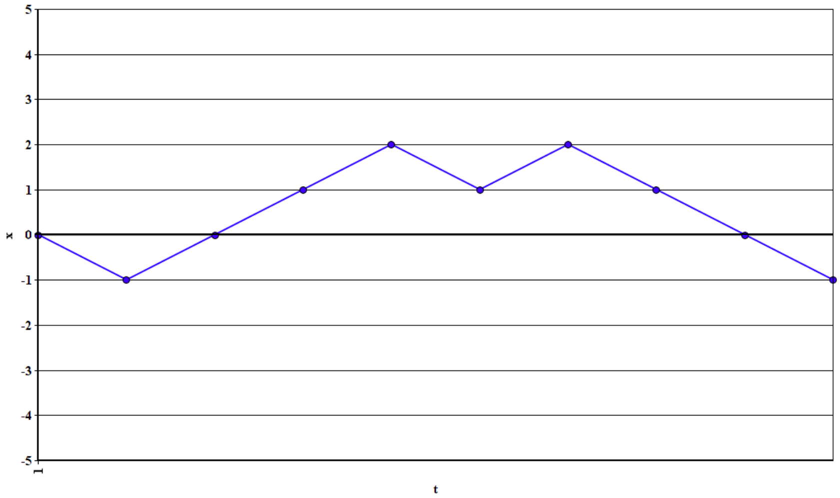


Figura 1: Exemple de trajectòria

Considerarem els eixos de coordenades cartesians t, x, on t és el eix horitzontal, i x el eix vertical; per cada $t = k$ representarem s_k. La nostra cadena $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$ quedarà representada per una línia poligonal on cada vèrtex té ordenada s_k i cada costat k-èsim té pendent ϵ_k. Anomenarem a aquesta línia trajectòria:

Exemple 3.1. En la Figura 1 podem veure un exemple de trajectòria. Podem observar que té longitud $n = 9$, i la seqüencia d'ϵ_i:

$$\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = +1, \epsilon_3 = +1, \epsilon_4 = +1, \epsilon_5 = -1, \epsilon_6 = +1, \epsilon_7 = -1, \epsilon_8 = -1, \epsilon_9 = -1.$$

També observem quins són els $s_k := \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_k$:

$$s_0 = 0, s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 2, s_5 = 1, s_6 = 2, s_7 = 1, s_8 = 0, s_9 = -1.$$

Al tenir 4 valors de ϵ_i que són positius, tenim que $a = 4$, i de la mateixa manera, els que tenen valor -1 són $b = 5$. Veiem que es compleixen les condicions:

$$-1 = s_9 = s_n = a - b = 4 - 5 = -1.$$

Definició 3.2. *Siguin n i x dos nombre enters, tal que $n > 0$. Una trajectòria $(s_1, s_2, ..., s_n)$ del origen $(0, 0)$ al punt (n, x) és una línia poligonal amb vèrtexs que tenen abcisses $0, 1, 2, ..., n$ i ordenades $s_0, s_1, s_2, ..., s_n$ que satisfan*

$$s_0 = 0$$

$$s_n = a - b$$

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k$$

per a tot $k = 1, 2, ..., n$ amb $s_n = x$.

Anomenarem a n la longitud de la trajectòria. Amb un simple càlcul podem deduïr que existeixen 2^n trajectòries diferents de longitud n: En el primer pas tenim dues opcions diferents, en el segon, per cada opció del primer pas tenim dues opcions. Per tant, si $n = 2$, tenim $2 \cdot 2 = 4$ trajectòries diferents. I així successivament, per $n = 3$, existeixen 2^3 trajectòries diferents i per n, 2^n.

Proposició 3.3. *Si a de les ϵ_k són positives i b de les ϵ_k són negatives. Una trajectòria de l'origen a (n, x) només pot existir si es compleix:*

$$n = a + b$$
$$x = a - b$$

com ja hem vist abans.

Vist d'una altra manera, si tenim una trajectòria de l'origen a (n, x), podem trobar els valors de a i de b:

$$a = \frac{n + x}{2}$$

$$b = \frac{n - x}{2}$$

Observem que $n + x$ i $n - x$ sempre són nombres parells ja que $n + x = 2a$ i $n - x = 2b$.

En aquest cas llavors, amb a i b fixats, es poden triar a llocs diferents per a les ϵ_k positives dels $n = a + b$ llocs disponibles de

$$N_{n,x} = \binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

maneres diferents.

Observem que $N_{n,x} = \binom{n}{a} = \frac{n!}{a!(n-a)!}$, i com que $b = n - a$, tenim que $N_{n,x} = \frac{n!}{a!b!} = \binom{n}{b}$.

Quan n i x no compleixen la proposició anterior, considerarem $N_{n,x} = 0$. Amb aquesta convenció podem dir que existeixen exactament $N_{n,x}$ trajectòries diferents entre l'origen i (n, x) totalment arbitrari.

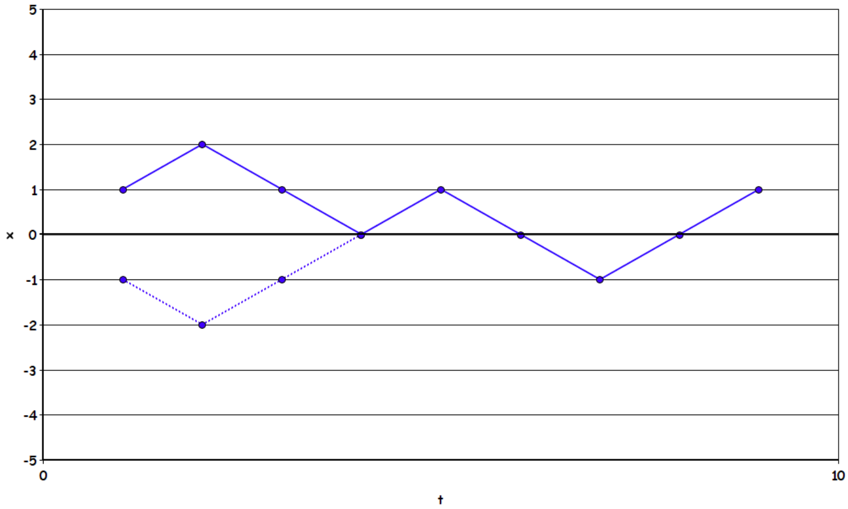


Figura 2: Principi de Reflexió

3.2 Un Lema Important

Per a trobar diferents conclusions importants a partir de la base que hem fixat, presentem un lema que serà molt important per a poder trobar algunes d'aquestes conlcusions.

Siguin $A = (a, \alpha)$ i $B = (b, \beta)$ dos punts del quadrant positiu, és a dir, $b > a \geq 0$ i $\alpha > 0$, $\beta > 0$. La reflexió d'A respecte el eix t és el punt $A' = (a, -\alpha)$. Considerem una trajectòria de A a B, aleshores:

Lema 3.4. *Principi de Reflexió: El número de trajectòries de A a B tals que toquen o tallen el eix t és igual al número de trajectòries de A' a B.*

Exemple 3.5. En la Figura 2 podem observar el Principi de Reflexió. En aquest cas tenim que $A = (1, 1)$ i $B = (9, 1)$. Efectivament $9 > 1 \geq 0$ i $1 > 0$. La reflexió d'A és $A' = (1, -1)$.

Podem observar com la trajectòria d'A a B talla l'eix t i veiem la simetria respecte aquest eix amb la trajectòria de A' a B. És fàcil veure amb la figura el que diu el lema.

Demostració 1. *Considerem una trajectòria de A a B que tingui un o més vèrtexs en el eix t:*

$$(s_a = \alpha, s_{a+1}, ..., s_b = \beta)$$

Sigui t la abcissa del primer vèrtex que està en l'eix horitzontal, aleshores tenim

$$s_a > 0, s_{a+1} > 0, ..., s_{t-1} > 0, s_t = 0$$

Llavors,

$$(-s_a = -\alpha, -s_{a+1}, ..., -s_{t-1}, s_t, s_{t+1}, ..., s_b = \beta)$$

és una trajectòria de A' a B que té $T = (t, 0)$ com a primer vèrtex a l'eix horitzontal.

Com que les seccions AT i $A'T$ són reflexions una de l'altre, existeix una correspondència un a un entre totes les trajectòries de A a B i de A' a B que tenen algun vèrtex en el eix t.

Com a resultat d'això, podem formular el teorema següent:

Teorema 3.6. *Teorema de la Votació: Siguin n i x dos nombres enters positius. Existeixen exactament $\frac{x}{n}N_{n,x}$ trajectòries $(s_1, s_2, ..., s_n = x)$ que van del origen $(0, 0)$ a (n, x) i són tals que $s_1 > 0$, ..., $s_n > 0$.*

Demostració 2. *Observem que $s_1 > 0$, això implica que $\epsilon_1 = +1$ i per tant, $s_1 = \epsilon_1 = +1$. Per tant, hem de veure quantes trajectòries existeixen de $(1, 1)$ a (n, x) sense tocar ni creuar el eix t, ja que $s_i > 0$ per a tot $i = 1, 2, ..., n$.*

Sabem que el número total de trajectòries que hi han de $(1, 1)$ a (n, x) és el número de trajectòries que hi ha de $(0, 0)$ a $(n - 1, x - 1)$, que és $N_{n-1,x-1}$.

Ara volem trobar el número de trajectòries de $(1, 1)$ a (n, x) que tallen o toquen el eix t. Per a fer-ho apliquem el lema anterior, el principi de reflexió:

El número de trajectòries de $(1, 1)$ a (n, x) que tallen o toquen el eix t és igual al número de trajectòries de $(1, -1)$ a (n, x), ja que la reflexió de $(1, 1)$ respecte el eix t és $(1, -1)$.

Sabem que el número total de trajectòries de $(1, -1)$ a (n, x) és el número de trajectòries que hi han de $(0, 0)$ a $(n - 1, x + 1)$, que és $N_{n-1,x+1}$.

Per últim, fem la resta i trobem que

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1} = \binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a}$$

és el número de trajectòries de $(0,0)$ *a* (n,x) *tals que* $s_i > 0$ *per a tot* $i = 1,2,...,n$.

Calculem i veiem que és igual a

$$\binom{n-1}{a-1} - \binom{n-1}{a} = \frac{(n-1)!}{(a-1)!(n-a)!} - \frac{(n-1)!}{a!(b-1)!} = \frac{a}{n}\frac{n!}{a!b!} - \frac{b}{n}\frac{n!}{a!b!} = \frac{a-b}{n}N_{n,x}$$

i com que $x = a - b$*, hem demostrat que és igual a*

$$\frac{x}{n}N_{n,x}.$$

3.3 Passeig Aleatori: Llançament d'una moneda

Anem a veure un passeig aleatori com un joc amb llançaments successius d'una moneda. Agafem una trajectòria $(s_1, ..., s_\rho)$ com el registre de ρ llançaments successius d'una moneda. Les sumes parcials s_k representen els guanys acumulats en aquests llançaments. Aquestes sumes s_k les veurem com punts en el eix vertical x. Per a la descripció gràfica ens imaginem que els llançaments es fan a una velocitat constant, és a dir, que el llançament k-èsim sigui en l'època n.

Veurem la representació geomètrica d'aquests llançaments com el moviment d'una 'partícula' que realitza un passeig aleatori. Aquesta partícula dóna pasos unitaris amunt o avall respecte una recta. La trajectòria representa el registre d'aquest moviment.

Per a cada trajectòria de longitud ρ, existeixen 2^ρ trajectòries d'aquestes i a cada una li atribuïm una probabilitat de $2^{-\rho}$ ja que ara $p = q = \frac{1}{2}$.

- És important determinar la longitud de la trajectòria ρ per veure resultats dins la trajectòria?

Per a veure-ho, considerem una trajectòria que passi pel punt $(2, 2)$. Els primers 2 pasos han de ser positius llavors, i llavors hi ha $2^{\rho-2}$ trajectòries amb aquesta propietat. Com veiem, la probabilitat del nostre plantejament és $\frac{1}{4} = 2^{-\rho} - 2^{-\rho+2}$, sense considerar el valor de ρ.

En general, per a qualsevol $k \leq \rho$, hi ha exactament $2^{\rho-k}$ trajectòries que satisfan aquestes k condicions. Per tant, una trajectòria determinada per els primers $k \leq \rho$ pasos, té probabilitat independent de ρ.

Per tant, considerarem qualsevol trajectòria de longitud n com la secció inicial d'una trajectòria molt llarga, sense necessitat d'especificar el final. Considerem successions sense final, i per tant, treballarem en espais mostrals no numerables.

Notació 1. *Denotarem els pasos de les partícules com X_1, X_2, ..., i les posicions de la partícula com S_1, S_2, ... Tenim, per tant;*

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$
$$S_0 = 0$$

Denotarem la situació en que la partícula està en el punt x quan $t = n$ per $S_n = x$, i la seva probabilitat com $p_{n,x}$ amb x enter positiu.

Ara, recordem que $a = \frac{n+x}{2}$, ja que:

$$n = a + b$$
$$x = a - b$$

A partir d'això i sabent que $N_{n,x} = \binom{n}{a}$ és el número de trajectòries possibles entre $(0,0)$ i (n,x), tenim:

$$p_{n,x} = P(S_n = x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} 2^{-n}$$

on el coeficient binomial és igual a 0 si $\frac{n+x}{2}$ no és un enter entre 0 i n, inclòs.

3.3.1 Retorn a l'origen

Direm que es produeix un *retorn a l'origen* en k si $S_k = 0$. Necessàriament, k ha de ser parell, i per a $k = 2\nu$, la probabilitat d'un retorn a l'origen és $p_{2\nu,0}$. Aquesta probabilitat la denotarem així: $u_{2\nu} = p_{2\nu,0}$, i tenim:

$$u_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu} 2^{-2\nu}$$

És fàcil veure això ja que $p_{2\nu,0} = \binom{2\nu}{\nu} 2^{-2\nu}$ substituïnt n per 2ν i x per 0.

3.3.2 Primer retorn a l'origen

Entre els diferents retorns a l'origen, és interessant veure quan es produeix el *primer retorn*. Aquest passa en 2ν si

$S_1 \neq 0, ..., S_{2\nu-1} \neq 0$ però $S_{2\nu} = 0$.

La probabilitat del primer retorn la denotarem com $f_{2\nu}$, i per definició, $f_0 = 0$. Aquesta probabilitat és més difícil de calcular però amb $u_{2\nu}$ es relacionen bastant:

Un retorn l'origen en $2n$ pot ser el primer retorn a l'origen, o sinó, el primer retorn passa en $2k < 2n$, i $2n - 2k$ unitats després torna a haver-hi un altre retorn. La probabilitat d'aquest segon fet és $f_{2k}u_{2n-2k}$, perquè hi ha $2^{2k}f_{2k}$ trajectòries de longitud $2k$ que acaben en un primer retorn, i $2^{2n-2k}u_{2n-2k}$ trajectòries de $(2k, 0)$ a $(2n, 0)$. Per tant,

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + ... + f_{2n} u_0$$

per a $n \geq 1$.

3.4 Podem assegurar que hi haurà un retorn a l'origen?

Ara anem a calcular quina probabilitat tenim de tornar a l'origen. És a dir, la probabilitat de que $\exists n$ tal que $S_n = 0$:

$$P(\exists n \geq 1, S_n = 0)$$

Per a calcular aquesta probabilitat farem servir dos esdeveniments que ja coneixem, d'una banda; el fet que es produeixi un primer retorn a l'origen en n; i d'altre banda, el fet que en n estiguem a l'origen. Respectivament,

$$A_n = \{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, ..., S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\}$$

$$B_n = \{S_n = 0\}$$

I les seves probabilitats són:

$$P(A_n) = f_n$$

$$P(B_n) = u_n$$

Recordem que n ha de ser estrictament parell, perquè sinó no es pot donar un retorn a l'origen en n.

Denotem $a_n = f_n$ i $b_n = u_n$ per estalviar notació. També recordem que com que $A_0 = \emptyset$, tenim que $a_0 = 0$. D'altra banda, $b_0 = 1$, ja que en $n = 0$ la partícula es troba en l'origen.

Volem demostrar:

Teorema 3.7.

$$P(\exists n \geq 1, S_n = 0) = P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$$

Demostració 3. *Observem que per $n \geq 1$,*

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} (B_n \cap A_k)$$

Al ser esdeveniments disjunts, tenim:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} P(B_n \cap A_k)$$

Si $k \geq n$, també tenim:

$$P(B_n \cap A_k) = P(A_k, X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0) =$$
$$= P(A_k) \cdot P(X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0)$$

al ser $\{A_k\}$ i $\{X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0\}$ independents.

Observem també que

$$P(X_{k+1} + X_{k+2} + ... + X_n = 0) = P(X_1 + X_2 + ... + X_{n-K} = 0)$$

per tant,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

per $n = 1, 2, ...$

Per a continuar la demostració introduïrem un lema:

Lema 3.8. *Amb les definicions donades anteriorment, tenim:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$$

Demostració 4. *Observem que les sèries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n$ són convergents per valors $s \in (-1, 1)$:*

Al ser a_n i b_n probabilitats estan fitades per 1; aleshores, les dues sèries formades pels valors absoluts es poden fitar per la següent:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n s^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |s^n| = \frac{1}{1 - |s|} < \infty$$

per $s \in (-1, 1)$.

Ara fem el producte d'ambdues sèries i n'obtindrem una de nova:

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n s^n$$

observem que $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ perquè són els coeficients que corresponen al terme s^n ja que $s^k s^{n-k} = s^n$.

Però $a_0 = 0$ i per tant $c_0 = 0$; i havíem vist que $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = b_n$ per a $n \geq 1$. Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n s^n = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n$$

Ara, sabent que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n = b_0 s^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n$ ja que $s^0 = 1$ i $b_0 = 1$. Aleshores tenim:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n - 1.$$

Tenim la següent igualtat:

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n - 1.$$

Recordem que les sèries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n$ són convergents quan $s \in (-1, 1)$. Per tant, per $s \in (-1, 1)$, operem la igualtat i obtenim:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n}.$$

Recordem ara que tots els coeficients a_n i b_n són positius perquè són probabilitats. Per tant, fem el límit quan s tendeix a 1 per l'esquerra i tenim una successió monòtona creixent:

$$\lim_{s \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n = \lim_{s \to 1^-} \Big(1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n s^n}\Big)$$

Aleshores, pel Teorema de la Convergència Monòtona per sèries, en fer aquest límit:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}.$$

I ja hem demostrat el lema.

Ara seguim amb la demostració del teorema; volem arribar a veure que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$. Ja que si demostrem això, haurem provat que la probabilitat de tornar a l'origen és 1, és a dir, que existeix un n en el que es produeix un retorn a l'origen.

Tenim que per $n \geq 1$:

$$b_n = u_{2k}$$

on $u_{2k} = 0$ si n no és parell; i si ho és, $n = 2k$ i:

$$u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}.$$

La fórmula de Stirling ens diu que quan k és prou gran, $k!$ es pot aproximar per $(\frac{k}{e})^k \sqrt{2k\pi}$; ja que:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k!}{(\frac{k}{e})^k \sqrt{2k\pi}} = 1$$

i denotem la relació de dues expressions que el límit del seu quocient tendeix a 1 quan fem tendir k a l'infinit com $\sim$:

$$k \sim (\frac{k}{e})^k \sqrt{2k\pi}.$$

Per tant,

$$u_{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} (\frac{1}{2})^{2k} \sim \frac{(2k)^{2k} \sqrt{4k\pi}}{k^{2k} 2k\pi} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Osigui,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{2k} = +\infty$$

ja que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.

Per tant, ja ho hem demostrat:

$$P(\exists n \geq 1, S_n = 0) = 1$$

En aquest apartat hem vist que en una dimensió i temps infinit, sempre es produeix algun retorn a l'origen.

3.5 Arribar a un punt qualsevol

Havent vist que la probabilitat de tornar a l'origen és 1, ara ens preguntem quina és la probabilitat d'arribar a un punt qualsevol $x \in \mathbb{Z}$ sortint de l'origen.

Definim, per a tot $x \in \mathbb{Z}$, la probabilitat que existeixi un $n \geq 1$ tal que $S_n = x$ com $f(x)$. És a dir, per a tot $x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = P(\exists n \geq 1, S_n = x)$$

En el apartat anterior hem vist que $f(0) = 1$.

Ara demostrarem que per a tot $x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1)$$

Demostració 5. *Suposem que* $x \neq 1, -1$*,*

$$f(x) = P(\exists n \geq 1, S_n = x) = P(\exists n \geq 1, X_1 + ... + X_n = x) =$$

$$= P(\exists n \geq 1, X_1 + ... + X_n = x, X_1 = 1) + P(\exists n \geq 1, X_1 + ... + X_n = x, X_1 = -1) =$$

$$= P(\exists n \geq 1, X_1 + ... + X_n = x | X_1 = 1)P(X_1 = 1) +$$

$$+ P(\exists n \geq 1, X_1 + ... + X_n = x | X_1 = -1)P(X_1 = -1) =$$

$$= \frac{1}{2}P(\exists n \geq 2, X_2 + ... + X_n = x - 1) + \frac{1}{2}P(\exists n \geq 2, X_2 + ... + X_n = x + 1) =$$

$$= \frac{1}{2}P(\exists n - 1 \geq 1, X_1 + ... + X_{n-1} = x - 1) + \frac{1}{2}P(\exists n - 1 \geq 1, X_1 + ... + X_{n-1} = x + 1)$$

Per últim, si denotem $m = n - 1$*, veiem que l'expressió anterior és igual a:*

$$\frac{1}{2}P(\exists m \geq 1, X_1 + ... + X_m = x - 1) + \frac{1}{2}P(\exists m \geq 1, X_1 + ... + X_m = x + 1)$$

i això és igual a $\frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1)$*, que és el que voliem demostrar.*

Quan $x = 1$*, seguint els mateixos passos arribem a* $f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(2)$ *i com que* $f(0) = 1$ *també val la fórmula. En el cas de* $x = -1$ *passa igual però en aquest cas obtenim* $f(-1) = \frac{1}{2}f(-2) + \frac{1}{2}$*.*

Per acabar, demostrarem per inducció que $f(x) = 1$.

Sabem que $f(0) = 1$, suposarem que $f(x) = 1$ i veurem que això implica $f(x-1) = 1$ i $f(x+1) = 1$ necessàriament.

Anteriorment hem vist que $f(x) = \frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1)$, per tant ara tenim:

$$1 = f(x) = \frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1)$$

Com que la funció f és una probabilitat, s'ha de complir el següent:

$$0 \leq f(x-1) \leq 1$$
$$0 \leq f(x+1) \leq 1$$

Però alhora tenim la següent igualtat:

$$2 = f(x-1) + f(x+1)$$

Donat que $f(x-1)$ i $f(x+1)$ són ambdues positives i definides en el interval tancat $[0, 1]$ al ser probabilitats, necessàriament tenim que:

$$f(x-1) = 1$$
$$f(x+1) = 1$$

Hem vist que si per un enter qualsevol aquesta funció f val 1, aleshores també ha de valer 1 per el enter anterior i posterior. Per tant, com que $f(0) = 1$, per inducció, sabem que $f(x) = 1$ per a tot $x \in \mathbb{Z}$.

Si sortim de l'origen i comencem un passeig aleatori en dimensió 1 podem estar segurs que en algun moment arribarem a x punt qualsevol.

3.6 Lema Principal

La probabilitat d'un retorn a l'origen en 2ν, que és $u_{2\nu}$, intervé en molts resultats importants sobre els passejos aleatoris. Una raó d'això és el següent lema, que és la clau per a alguns teoremes importants que veurem just després:

Lema 3.9. *La probabilitat que no es produeixi cap retorn a l'origen fins* $2n$ *(inclòs), és la mateixa probabilitat que es produeixi un retorn a l'origen en* $2n$*:*

$$P(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) = u_{2n}$$

per a $n > 0$.

Quan no es produeix cap retorn a l'origen fins $2n$, aleshores totes les S_i són positives, o totes són negatives. Tenint les dues opcions la mateixa probabilitat, tenim

$$P(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n}$$

Demostració 6. *Si considerem tots els possibles valors de* S_{2n}*, tenim*

$$P(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \sum_{r=1, r>n} P(S_1 > 0, ..., S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r)$$

és a dir la suma des del terme en que $S_{2n} = 2$ *fins al terme* $S_{2n} = 2r$ *tal que* $r \leq n$. *Desapareixen tots els termes en que* $r > n$.

Per tant, totes les trajectòries que satisfan la condició del membre dret no toquen ni tallen el eix t. *Per tant, podem aplicar el Teorema de la Votació. El número de trajectòries de* $(0, 0)$ *a* $(2n, 2r)$ *tals que* $s_i > 0$ *per a tot* $i = 1, 2, ..., n$ *és*

$$N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}$$

(Vist en la demostració del Teorema de la Votació).

Per tant, el r*-èsim terme del sumatori és igual a*

$$\frac{1}{2}(p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1})$$

Ara, si sumem tots els termes:

$$\sum_{r=1}^{r>n} P(S_1 > 0, ..., S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r) =$$

$$= \frac{1}{2}(p_{2n-1,1} - p_{2n-1,3} + p_{2n-1,3} - p_{2n-1,5} + ... + p_{2n-1,2r-3} - p_{2n-1,2r-1}) + p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}$$

amb $r \leq n$.

Veiem que la part negativa del terme r-èsim es cancel·la amb la part positiva del terme $(r+1)$-èsim. Per tant el sumatori queda reduït a:

$$\frac{1}{2}(p_{2n-1,1} - p_{2n-1,2r+1})$$

però com que $2r+1 > 2r$, $p_{2n-1,2r+1} = 0$.

Per últim veiem que

$$p_{2n-1,1} = \binom{2n-1}{n} 2^{-2n+1} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} 2^{-2n+1} = \frac{n}{2n} \frac{2n!}{n!n!} 2^{-2n+1} =$$

$$= \binom{2n}{n} \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^{2n-1} = \binom{2n}{n} 2^{2n} = u_{2n}.$$

Llavors tenim el que volíem:

$$P(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} p_{2n-1,1} = \frac{1}{2} u_{2n}$$

i

$$P(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) = u_{2n}$$

Aquest lema ens condueix a una expressió explícita de la probabilitat del primer retorn a l'origen. Si aquest primer retorn es produeix en $2n$, és el mateix que:

$$S_1 \neq 0, ..., S_{2k} \neq 0$$

per a $k = n-1$ però no per a $k = n$.

A partir del lema, això suposa que

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

ja que la probabilitat de que es produeixi un primer retorn en $2n$ és la mateix que la probabilitat que fins a $2n-2$ no es produeixi cap retorn menys la probabilitat que fins a $2n$ no es produeixi cap retorn.

Això és el mateix que dir

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}$$

ja que

$$u_{2n-2} = \frac{n^2}{2n(2n-1)} \binom{2n}{n} 2^{-2n+2} = \frac{n}{2n-1} \binom{2n}{n} 2^{-2n+1} = \frac{2n}{2n-1} \binom{2n}{n} 2^{-2n}$$

i si substituïm:

$$u_{2n-2} - u_{2n} = (\frac{2n}{2n-1} - 1) u_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}$$

i d'aquí treiem un segon lema:

Lema 3.10. *La probabilitat de que un primer retorn a l'origen es produeixi en* $2n$ *és*

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}$$

3.7 Última visita

En aquest apartat calcularem la probabilitat de que es produeixi un últim retorn a l'origen. És a dir, que a partir de $2n$, on es produeix un retorn a l'origen, no s'en torni a produïr cap més.

A continuació donem aquesta probabilitat i la demostrem:

Teorema 3.11. *La probabilitat de que fins a* $2n$*, el últim retorn a l'origen es produeixi en* $2k$ *és*

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}$$

Demostració 7. *Busquem trajectòries que compleixin:*

$$S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0$$

Per a fer-ho, primer buscarem totes les trajectòries diferents entre l'origen $(0,0)$ *i* $(2k,0)$*. Com que en* $2k$ *es produeix un retorn a l'origen, el total de trajectòries diferents és* $2^{2k} u_{2k}$*.*

Si ara suposem que el nou origen és $(2k,0)$*, aplicant el Lema Principal, veiem que el número de trajectòries diferents entre* $2k$ *i* $2n$ *tals que no es produeix cap retorn a l'origen és* $2^{2n-2k} u_{2n-2k}$*.*

Agafant els dos resultats tenim $2^{2n} u_{2n-2k} u_{2k}$*, i per calcular la seva probabilitat només hem de dividir pel total de trajectòries diferents entre 0 i* $2n$*, és a dir per* 2^{2n}*:*

$$u_{2k}u_{2n-2k}.$$

3.8 Canvis de signe

Diem que es produeix un *canvi de signe* en n si S_{n-1} i S_{n+1} són de signes oposats, és a dir, si la trajectòria talla l'eix horitzontal. En aquest cas, $S_n = 0$, on n és un enter parell (positiu).

Teorema 3.12. *La probabilitat $\xi_{r,2n+1}$, de que fins $2n+1$ es produeixin exactament r canvis de signe és igual a $2p_{2n+1,2r+1}$, és a dir,*

$$\xi_{r,2n+1} = 2P(S_{2n+1} = 2r+1)$$

per $r = 0, 1, ...$

Demostració 8. *Per a demostrar el teorema, reformularem l'enunciat d'una manera més convenient.*

Si el primer pas ens condueix a $(1,1)$, és a dir, el primer pas és +1. Agafem llavors aquest punt $(1,1)$ com a origen d'un nou sistema de coordenades. Creuar el eix horitzontal en el sistema original és equivalent a creuar ara la recta que està per sota del nou eix, l'eix $x = -1$. Si el primer pas ens condueix a $(1,-1)$, fem el procediment anàleg.

Aleshores, el teorema equival exactament a la següent proposició:

La probabilitat de que, fins $2n$, el nivell -1 es creuï exactament r vegades és igual a $2p_{2n+1,2r+1}$.

Demostrem la proposició per casos:

- $r = 0$:

Si $r = 0$, aleshores no s'ha creuat el nivell -1. Que és equivalent a dir que no s'ha tocat ni creuat el nivell -2. En aquest cas, S_{2n} és un enter parell no negatiu.

Per $k \geq 0$, pel lema de reflexió enunciat anteriorment, el número de trajectòries de $(0,0)$ a $(2n,2k)$ que toquen el nivell -2 és igual al número de trajectòries de $(0,0)$ a $(2n,2k+4)$.

Per tant, la probabilitat d'arribar a $(2n,2k)$ sense tocar el nivell -2 és: $p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}$.

La probabilitat de no tocar el nivell -2 és igual al sumatori de l'expressió anterior per $k = 0, 1, ...$

La majoria dels termes es cancel·len entre sí i queda la següent probabilitat:

$$p_{2n,0} - p_{2n,2}$$

i veiem que

$$p_{2n,0} - p_{2n,2} = 2p_{2n+1,1}$$

que és el que diu la proposició.

- $r = 1$:

Una trajectòria que creua el nivell -1 en $2\nu - 1$ es pot descomposar en dues seccions: La secció de $(0,0)$ a $(2\nu - 2, -2)$ i la secció que comença en $(2\nu, -2)$ de longitud $2n - 2\nu$.

En aquesta última secció apliquem el resultat per $r = 0$, però intercanviem els signes. Podem concloure que el número de trajectòries de longitud $2n - 2\nu$ que comencen en $(2\nu, -2)$ i que no creuen el nivell -1 és igual al número de trajectòries de $(2\nu, -2)$ a $(2n + 1, -3)$.

Però cada trajectòria d'aquesta classe s'enllaça amb la secció inicial per formar una altra trajectòria que va de $(0,0)$ a $(2n + 1, -3)$.

Per tant, el número de trajectòries de longitud $2n$ que creuen exactament una vegada el nivell -1 és igual al número de trajectòries que van del origen al $(2n + 1, -3)$, és a dir, $2^{2n+1}p_{2n+1,3}$.

Amb això demostrem la proposició per $r = 1$.

- $r > 1$:

Per un valor qualsevol de r, la proposició es pot demostrar per inducció recurrint l'argumentació que hem utilitzat en el cas $r = 1$, sense requerir cap argument extra. S'ha fet el cas $r = 1$ per una notació més senzilla.

Una conseqüència interessant d'aquest teorema consisteix en que la probabilitat $\xi_{r,n}$ de r canvis de signe fins a n decreix amb r:

$$\xi_{0,n} \geq \xi_{1,n} > \xi_{2,n} > ...$$

Això significa que, sense considerar el nombre de llançaments, el fet de que no es produeixi cap canvi de signe és més probable que qualsevol nombre fixat de canvis.

Diem que si no es produeix cap canvi de signe durant bona part de la longitud de la trajectòria, aleshores tindrem un *liderat llarg*.

3.9 Altres Conceptes

En aquest apartat veiem altres conceptes que podem observar en passejos aleatoris de dimensió 1:

Definició 3.13. *El màxim d'una trajectòria és r si la trajectòria de l'origen a A toca però no creua $x = r$, on $A = (n, k)$ punt tal que $k \leq r$.*

Definició 3.14. *Diem que es produeix un primer pas per el punt $r > 0$ en n si*

$$S_1 < r, ..., S_{n-1} < r, S_n = r$$

4 Un Passeig Aleatori en Dues Dimensions

Ara volem plantejar un passeig aleatori en dues dimensions. És a dir, ens trobem ara sobre el pla, i ens podem moure pels enters, o sigui, ens trobem sobre $\mathbb{Z}^2$. Abans, en una dimensió teniem dos opcions per a cada pas, ara en tindrem quatre: podem triar entre avançar o retrocedir, o anar cap a dalt o cap abaix.

4.1 Plantejament i Orientació General

Plantejarem de forma general la mateixa teoria de jocs d'atzar del bloc anterior ara en 2-dimensions:

Considerem $\overrightarrow{\epsilon_1}, \overrightarrow{\epsilon_2}, ..., \overrightarrow{\epsilon_n}$ on cada un representa un vector de dimensió 2; que pot pendre valors $(+1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, +1)$ o $(0, -1)$.

Podem considerar $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$, que formen una base de l'espai de 2 dimensions, i aleshores $\overrightarrow{\epsilon_i} = \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ per a tot $i = 1, 2, ..., n$. És a dir, els $\overrightarrow{\epsilon_i}$ són vectors de norma 1 i amb coeficients enters.

Per a tots aquests, tenim a valors que són $(+1, 0)$, b valors que són $(-1, 0)$, c valors que són $(0, +1)$ i d valors que són $(0, -1)$. Per tant, $n = a + b + c + d$.

Ara considerem les següents sumes parcials:

$$\overrightarrow{s_1} = \overrightarrow{\epsilon_1}$$

$$\overrightarrow{s_2} = \overrightarrow{\epsilon_1} + \overrightarrow{\epsilon_2}$$

$$\overrightarrow{s_3} = \overrightarrow{\epsilon_1} + \overrightarrow{\epsilon_2} + \overrightarrow{\epsilon_3}$$

És a dir,

$$\overrightarrow{s_k} := \overrightarrow{\epsilon_1} + \overrightarrow{\epsilon_2} + ... + \overrightarrow{\epsilon_k}$$

per a tot $k = 1, 2, ..., n$ i recordem que $\overrightarrow{s_k}$ són vectors de dimensió 2.

Definim $\overrightarrow{s_0} = (0, 0)$ i tenim $\overrightarrow{s_n} = (a - b, c - d)$.

També podem observar que

$$\overrightarrow{s_k} - \overrightarrow{s_{k-1}} = \overrightarrow{\epsilon_k}$$

per $k = 1, 2, ..., n$.

4.2 Retorn a l'origen

Volem calcular ara la probabilitat de que existeixi un retorn a l'origen, és a dir, un retorn a $(0, 0)$. Busquem la següent probabilitat:

$$P(\exists n \geq 1, S_n = (0,0))$$

Farem servir les mateixes notacions que hem utilitzat en 1 dimensió:

$$b_n = P(S_n = \overrightarrow{0})$$

$$a_n = P(S_n = \overrightarrow{0}, S_1 \neq \overrightarrow{0}, S_2 \neq \overrightarrow{0}, ..., S_{n-1} \neq \overrightarrow{0})$$

I per tant, igual que abans, podem utilitzar el lema que hem demostrat en dimensió 1, i sabem:

$$P(\exists n \geq 1, S_n = (0,0)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$$

Així la probabilitat serà 1, si només si, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Observem que per $n \geq 1$, si n és senar, $b_n = 0$; ja que com bé sabem, és impossible tornar a l'origen en un nombre senar de passos.

Si $n = 2k$, aleshores:

$$b_n = b_{2k} = P(S_{2k} = (0,0)) = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}$$

Per calcular aquesta probabilitat hem utilitzat els següents raonaments:

- El total de trajectòries diferents de longitud $2k$ en 2 dimensions és 4^{2k} perquè el total de passos que realitzem són $2k$, i en cada pas tenim 4 possibilitats.

- Ara volem calcular el número de trajectòries diferents de longitud $2k$ que acabin en l'origen: Són totes aquelles que fan el mateix nombre de passos endavant que endarrere, i el mateix nombre de passos cap a dalt que cap avall.

- El sumatori de j surt a partir del següent: pren valors entre $j = 0$, el cas en que cap pas endavant o endarrere, k passos amunt i k passos avall; i $j = k$, el cas en que cap pas amunt o avall, k passos endavant i k passos endarrere.

- Per últim hem de comptar quantes trajectòries hi ha formades per j passos endavant, j passos endarrere; $k - j$ passos amunt i $k - j$ passos avall: Això és equivalent a comptar de quantes formes podem treure $2k$ boles d'una urna de 4 colors diferents: j blanques, j negres, $k - j$ vermelles i $k - j$ blaves. I la resposta a aquest problema de combinatòria és:

$$\frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!}$$

formes diferents.

Ara reduïm l'expressió anterior:

$$b_{2k} = \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} =$$

$$= \frac{1}{4^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{k!k!}{j!j!(k-j)!(k-j)!} =$$

$$= \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 = \frac{1}{4^{2k}} \binom{2k}{k}^2$$

Utilitzant el següent lema en l'últim pas:

Lema 4.1.

$$\binom{2k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2$$

Demostració 9. *Recordem aquesta propietat dels binomis de Newton: Donats dos nombres reals a i b, i un enter positiu n, es compleix:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Si ho apliquem a $(x+1)^{2k}$, tenim:

$$(x+1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} x^i. \qquad (1)$$

També tenim:

$$(x+1)^{2k} = (x+1)^k (x+1)^k = (\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j)(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i). \qquad (2)$$

Aquests dos resultats han de coïncidir, aleshores, els coeficients de les diferents potències de x de les dues expressions (1) i (2) han de coïncidir. Ens fixem en la potència x^k: En la primera expressió (1) el coeficient és $\binom{2k}{k}$, mentre que en l'expressió (2) el terme x^k apareixerà en tots els termes tals que $i+j=k$. Obtenim llavors:

$$\binom{2k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{k-j}$$

Ara operem:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2$$

i hem obtingut el que volíem.

Tenim llavors:

$$b_{2k} = \left(\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right)^2$$

Ara utilitzem el mateix que en el cas de dimensió 1, a partir de la fórmula d'Stirling:

Recordem que quan k és prou gran, $k!$ es pot aproximar per $(\frac{k}{e})^k\sqrt{2k\pi}$; ja que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(\frac{k}{e})^k\sqrt{2k\pi}} = 1$$

i que la relació entre dues expressions que el límit del seu quocient tendeix a 1 quan k tendeix a infinit la denotem per $\sim$, i per tant:

$$k \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}.$$

Aleshores,

$$b_{2k} = \frac{(2k!)^2}{(k!)^4}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}$$

per a n prou gran.

Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} = +\infty$$

ja que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Per tant, ja ho hem demostrat:

$$P(\exists n \geq 1, S_n = (0,0)) = 1$$

4.3 Arribar a un punt qualsevol

Ara volem trobar la probabilitat d'arribar a un punt $\overrightarrow{x}$ qualsevol en dues dimensions.

Definim $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ amb x_1 i x_2 nombres enters, i la probabilitat de que per algun $n \geq 1$, S_n sigui igual a $\overrightarrow{x}$, la representarem com la funció $g(\overrightarrow{x})$:

$$g(\overrightarrow{x}) = P(\exists n \geq 1, S_n = \overrightarrow{x})$$

En el apartat anterior hem vist que $g(\overrightarrow{0}) = 1$.

Seguint la demostració del problema en una dimensi'o, obtenim que:

$$g(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{4}\Big(g(\overrightarrow{x} - e_1) + g(\overrightarrow{x} + e_1) + g(\overrightarrow{x} - e_2) + g(\overrightarrow{x} + e_2)\Big)$$

Recordem que $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Com que $g(\overrightarrow{x})$ és una probabilitat, per a tot $y \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leq g(\overrightarrow{y}) \leq 1$.

Suposem que $g(\overrightarrow{x}) = 1$, aleshores

$$1 = g(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{4}(g(\overrightarrow{x} - e_1) + g(\overrightarrow{x} + e_1) + g(\overrightarrow{x} - e_2) + g(\overrightarrow{x} + e_2))$$

$$4 = g(\overrightarrow{x} - e_1) + g(\overrightarrow{x} + e_1) + g(\overrightarrow{x} - e_2) + g(\overrightarrow{x} + e_2)$$

Com que la funció g representa probabilitats, tenim que necessàriament:

$$1 = g(\overrightarrow{x} - e_1) = g(\overrightarrow{x} + e_1) = g(\overrightarrow{x} - e_2) = g(\overrightarrow{x} + e_2)$$

Ara podem procedir per inducció i podem concloure que $g(\overrightarrow{x}) = 1$ per a tot $x \in \mathbb{Z}^2$. Ja que sabem que $g(\overrightarrow{0}) = 1$ i que si $g(\overrightarrow{x}) = 1$, aleshores els 4 punts als que podem arribar fent un pas, és a dir, $\overrightarrow{x} - e_1$, $\overrightarrow{x} + e_1$, $\overrightarrow{x} - e_2$, $\overrightarrow{x} + e_2$, també tenen probabilitat 1 aplicats a g.

Dit en paraules, hem demostrat que si sortint de l'origen estem segurs que arribarem a un punt qualsevol $\overrightarrow{x}$, aleshores podem estar segurs també que arribarem als 4 punts que estan al costat de $\overrightarrow{x}$ mitjantçant un pas. I com que sabem que tornarem a l'origen segur, per inducció arribarem a qualsevol $\overrightarrow{x} \in \mathbb{Z}^2$.

4.4 Altres dimensions

En altres dimensions el concepte de passeig aleatori és el mateix, el problema és que els càlculs es compliquen cada cop més. Per exemple en 3 dimensions, la partícula té sis possibilitats en cada pas; endavant, endarrere, amunt, avall, dreta o esquerra. La idea gràfica seria que ens trobem en un cub format per molts cubs petits de la mateixa mida; i que en cada pas podem passar d'un cub a un altre a partir d'una de les seves sis cares.

En aquest cas, la probabilitat de que existeixi un n en el que torni a l'origen, que seria $(0, 0, 0)$, es pot demostrar que ja no és 1. És a dir, en dimensió 3, per molt llarg que sigui el passeig aleatori no podem estar segurs que tornarem a l'origen. Això ho va demostrar John Montroll al 1956, que va trobar una representació integral que permet calcular la probabilitat de retorn per dimensions iguals o superiors a 3. En el cas de dimensió 3, la integral que permet calcular la probabilitat de tornar a l'origen va ser resolta per Watson al 1939.

En els casos de 1 i 2 dimensions hem deduït, per inducció, que la probabilitat d'arribar a un punt qualsevol és també 1. Utilitzant el mateix raonament ens serveix per arribar a una contradicció i veure que la probabilitat d'arribar a un punt qualsevol en dimensió 3 tampoc és 1.

En dimensions superiors a 3, passa el mateix que en aquesta dimensió. Ja que tampoc podem assegurar que es produeixi un retorn a l'origen o que arribi a un punt x qualsevol. En aquesta taula podem veure quines són les probabilitats de retornar a l'origen ('prob') en dimensions 3 o superiors ('dim'):

dim	prob
3	0.340537
4	0.193206
5	0.135178
6	0.104715
7	0.085845
8	0.072913

Aquests valors s'han obtingut mitjançant aproximacions numèriques.

4.5 Llei del 0-1

En els casos de 1 i 2 dimensions hem vist que retornen a l'origen i arriben a un punt x amb probabilitat 1. Observem que si hi retorna almenys un cop amb probabilitat 1, també hi retorna infinites vegades amb probabilitat 1. Un cop es produeix el primer retorn a l'origen (en dimensió 1 o 2), podem considerar que s'inicia un nou passeig aleatori, que retornarà a l'origen amb probabilitat 1, i així successivament. El mateix passa amb arribar a un punt x infinites vegades amb probabilitat 1.

En casos de dimensions superiors a 2, la probabilitat de tornar a l'origen és menor que 1. La denotem per p i sabem que $p < 1$. Si es produeix un retorn a l'origen, com abans, considerem que comencem un nou passeig aleatori en el que té probabilitat p de tornar a l'origen, i així successivament. Per tant, la probabilitat que retorni almenys 2 cops a l'origen és $p \cdot p$; i la probabilitat que hi retorni alemnys n vegades és p^n.

Així la probabilitat que retorni infinites vegades a l'origen serà::

$$\lim_{n \to \infty} p^n = 0$$

ja que $p < 1$. El mateix passa amb el retorn d'infinites vegades a un punt, al tenir probabilitat menor que 1.

Hem vist doncs que la probabilitat de retornar infinites vegades a l'origen o a un punt qualsevol és 1 en les dimensions 1 i 2; mentre que en dimensió 3 o superiors és sempre 0. És a dir, en un passeig aleatori d'1 o 2 dimensions els punts es visiten infinites vegades amb probabilitat 1, mentre que en dimensions superiors tot punt té probabilitat 0 de ser visitat infinites vegades.

5 Simulacions de Passejos Aleatoris

Per últim farem unes quantes simulacions de passejos aleatoris d'una dimensió en ordinador per a fer-nos una idea més real del passeig aleatori. Per internet hi ha diferents *apps* que simulen passejos aleatoris en una dimensió. En concret, n'he utilitzat una del *Department of Mathematical Sciences* de la *University of Alabama in Huntsville* que fa simulacions d'aquest tipus. El enllaç és el següent: http://www.randomservices.org/random/apps/RandomWalkExperiment.html

A partir d'aquesta *app* hem simulat 10 passejos aleatoris, cadascun de 100 passos. En cada simulació ens mostra un gràfic del passeig aleatori al llarg dels 100 passos, on en cada pas la posició creix +1 o decreix -1, amb probabilitat $\frac{1}{2}$ en els dos casos. També ens mostra algunes dades interessants de cada simulació:

X: la posició final
Y: la posició màxima, és a dir, el màxim de la trajectòria
Z: el últim retorn a l'origen que es produeix, el que hem anomenat última visita

A continuació tenim una taula amb les dades d'aquestes simulacions:

Run	X	Y	Z
1	2	3	94
2	0	6	100
3	6	10	22
4	-12	3	32
5	-6	5	90
6	-12	3	62
7	-6	3	84
8	12	13	50
9	-8	1	8
10	2	9	94

Com podem observar, de les 10 simulacions, 5 d'elles han acabat en una posició negativa, 4 d'elles en una positiva i una ha acabat en l'origen; de manera que si la probabilitat d'avançar +1 o retrocedir -1 és la mateixa, el punt final no estarà molt lluny del zero. Observem també que l'últim retorn a l'origen de cada simulació es produeix en la mitat dels casos en un n més gran de 80. És a dir, en una dimensió és bastant recurrent tornar a l'origen com podem veure. I en totes les simulacions torna a l'origen en algun moment.

A l'annex podrem observar 10 simulacions de passejos aleatoris, però ara de longitud 10. Ho fem així per poder observar altres conceptes que hem treballat més fàcilment. Igual que abans, l'aplicació ens mostra les gràfiques (a l'annex del treball) i igual que abans la **X**, posició final; **Y**, màxim; i **Z**, última visita:

Run	X	Y	Z
1	-2	0	8
2	0	1	10
3	-2	2	8
4	-2	0	4
5	-6	0	0
6	2	2	8
7	-2	0	4
8	-4	0	0
9	2	4	8
10	-2	2	8

Mirant les diferents gràfiques que ens han donat, també podem veure altres conceptes: número de retorns a l'origen, canvis de signe, liderats llargs. A continuació completem la taula amb aquestes dades:

A: número de retorns a l'origen
B: número de canvis de signe
C: temps de permanència en el quadrant positiu
D: temps de permanència en el quadrant negatiu

Run	X	Y	Z	A	B	C	D
1	-2	0	8	1	0	10	0
2	0	1	10	5	2	2	8
3	-2	2	8	2	1	8	2
4	-2	0	4	2	0	0	10
5	-6	0	0	0	0	0	10
6	2	2	8	3	2	6	4
7	-2	0	4	2	0	0	10
8	-4	0	0	0	0	0	10
9	2	4	8	1	0	10	0
10	-2	2	8	2	1	4	6

Observem que per molt que la longitud de la trajectòria no sigui molt gran, en casi totes les simulacions de longitud 10 es retorna a l'origen (excepte en 2 casos) i en moltes d'aquestes més d'una vegada. Veiem també que és bastant majoritària la tendència als liderats llargs: en 6 casos la trajectòria no canvia de signe i es queda durant tot el passeig aleatori en valors positius (o negatius).

6 Conclusions

La primera conclusió que trec del treball és que personalment m'ha enriquit molt i que és el que buscava per un treball com aquest. Per altra banda, els límits de la investigació feta no acaben aquí. Sobretot en la última part hem vist que en dimensions superiors és cada cop més difícil veure i demostrar propietats, i per tant, la complexitat es dispara però es pot seguir investigant. També les aplicacions que tenen els passejos aleatoris són tan diverses que és difícil investigar-les en un mateix treball.

7 Referències

Referències

[1] FELLER, W: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1950.

[2] MONTROLL, E. W.: *Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices.*, J. SIAM 4, 1956.

[3] PÓLYA, G.: *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straβennetz.* Math. Ann, 84, 1921.

[4] WATSON, G. M.: *Three Triple Integrals.* Quart. J. Math., Oxford Ser. 2(10), 1939.

[5] BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J.A., PÉREZ HIDALGO, M.D.: *El problema de la ruina del jugador. Revista 59 (Novembre 2008)*, Suma, p. 23-30, 2008.

[6] BARDINA, Xavier: *Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma. Revista Materials Matemàtics, Volum 2008.*, Revista Electrònica de Divulgació Matemàtica Editada pel Departament de Matemàtiques de la UAB, Volum 2008, treball no. 3, 29 pp. ISSN: 1887-1097, 2008.

[7] Enlla ç del *Department of Mathematical Sciences* de la *University of Alabama in Huntsville* que conté un applet que permet simular passejos aleatoris en una dimensió. http://www.math.uah.edu/ stat/ applets/RandomWalkExperiment.xhtml

8 Annex

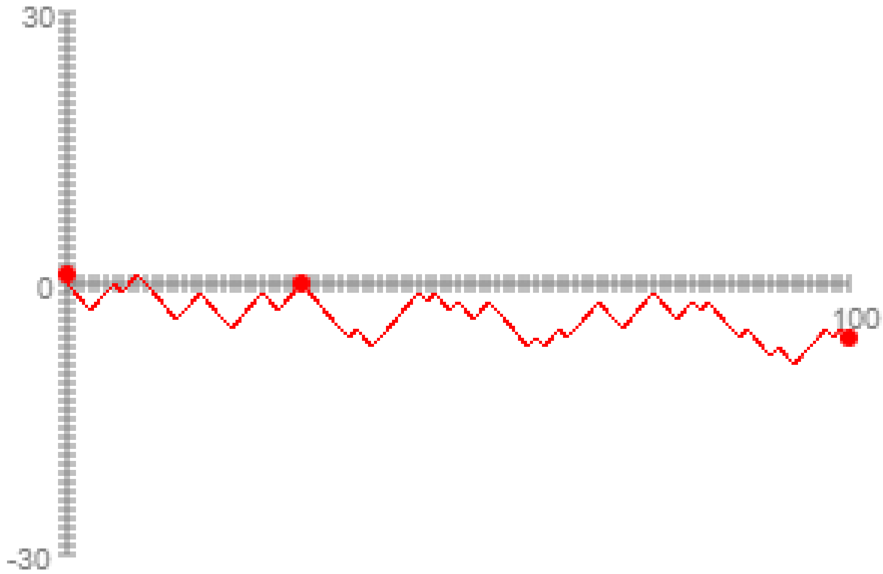


Figura 3: Simulació Passeig Aleatori 1

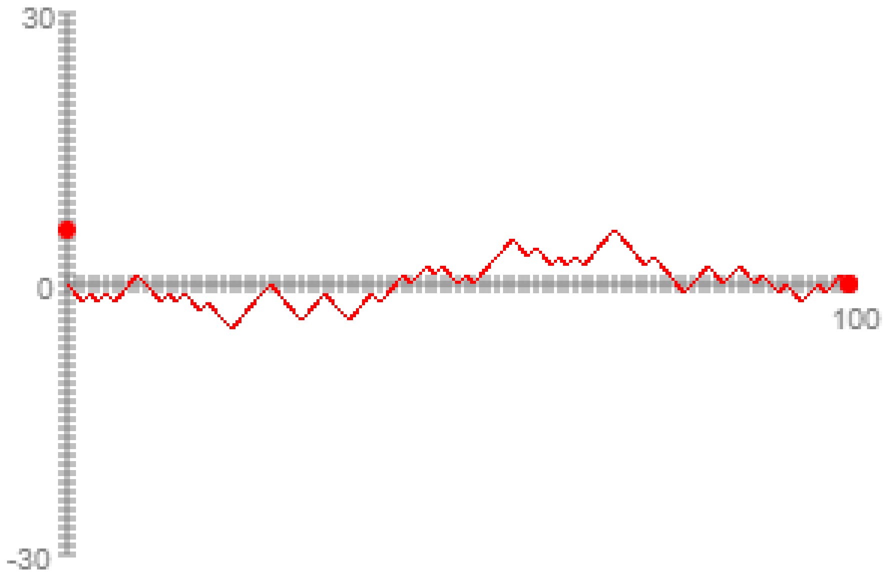


Figura 4: Simulació Passeig Aleatori 2

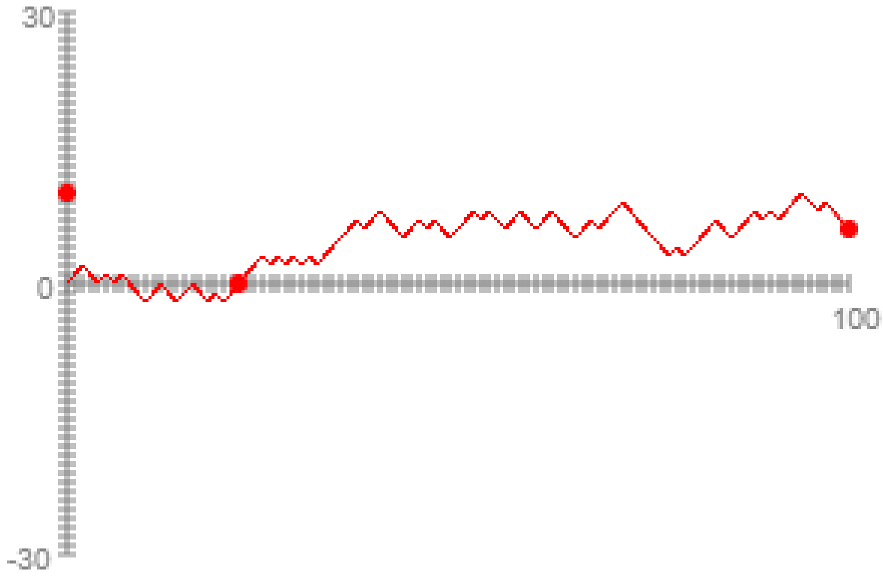


Figura 5: Simulació Passeig Aleatori 3

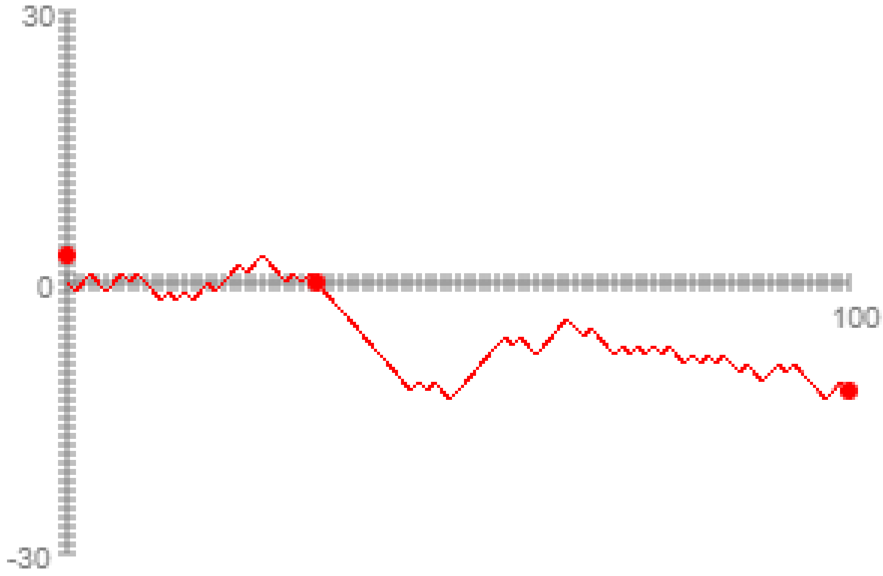


Figura 6: Simulació Passeig Aleatori 4

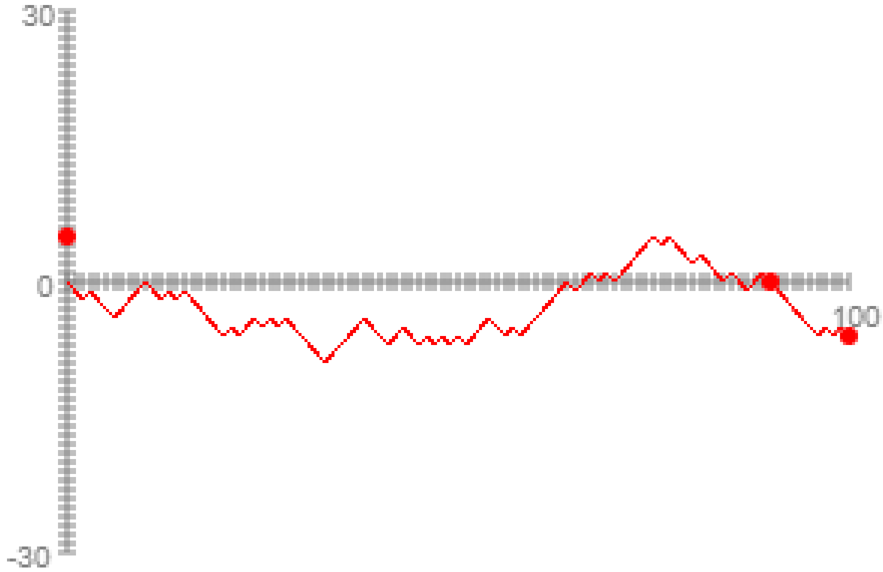


Figura 7: Simulació Passeig Aleatori 5

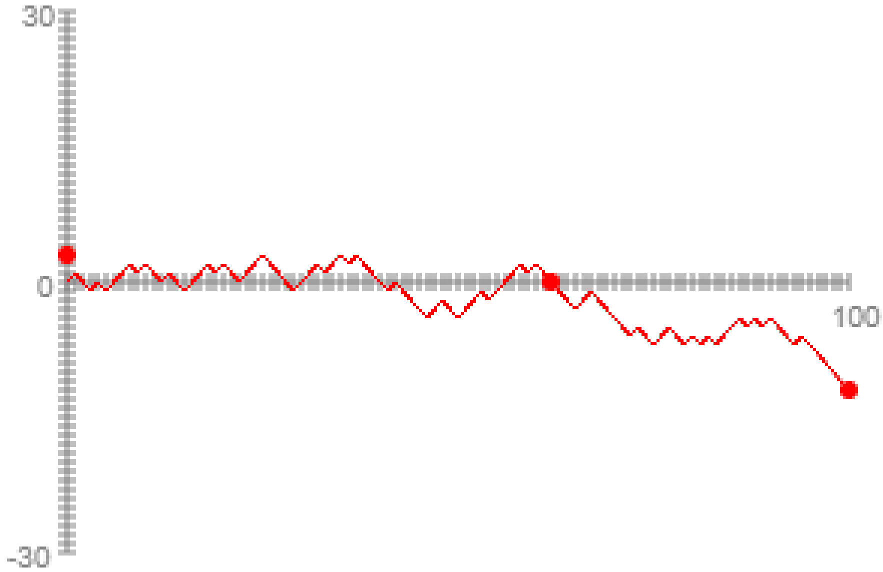


Figura 8: Simulació Passeig Aleatori 6

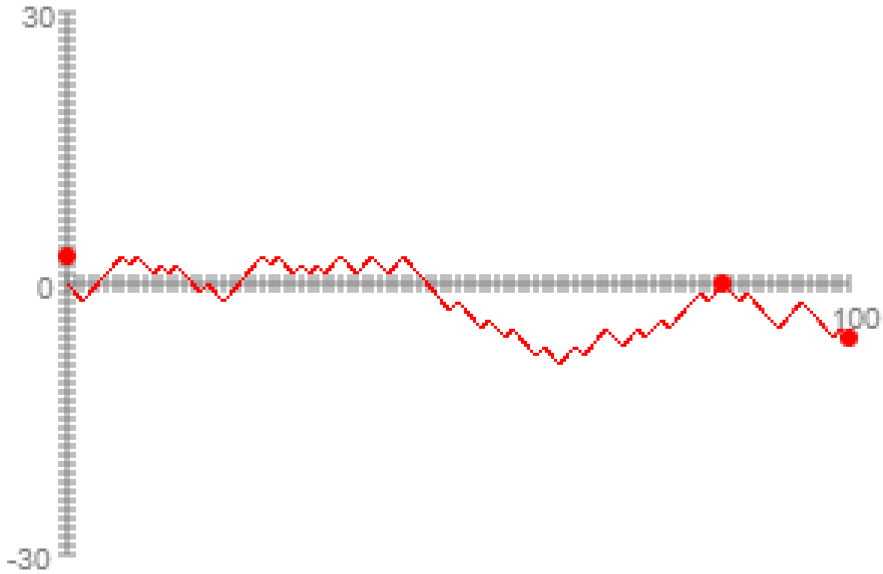


Figura 9: Simulació Passeig Aleatori 7

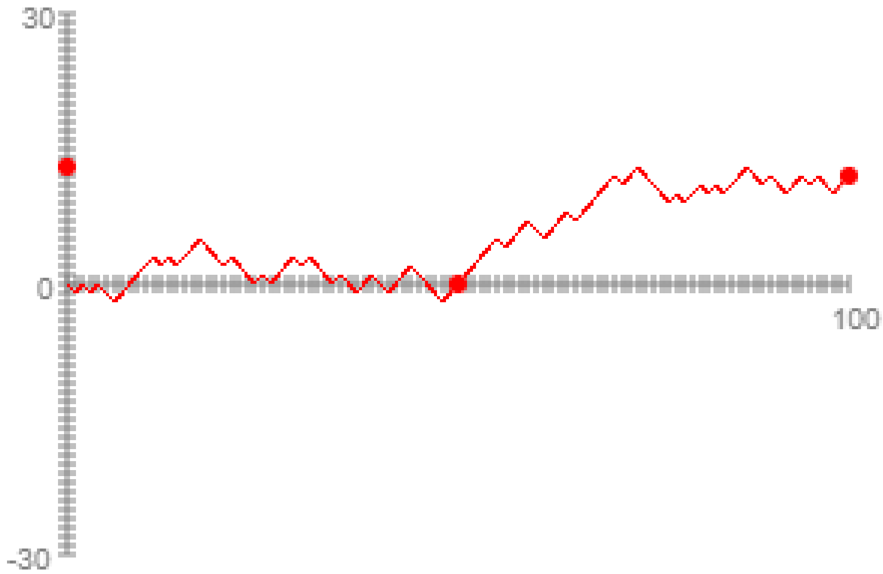


Figura 10: Simulació Passeig Aleatori 8

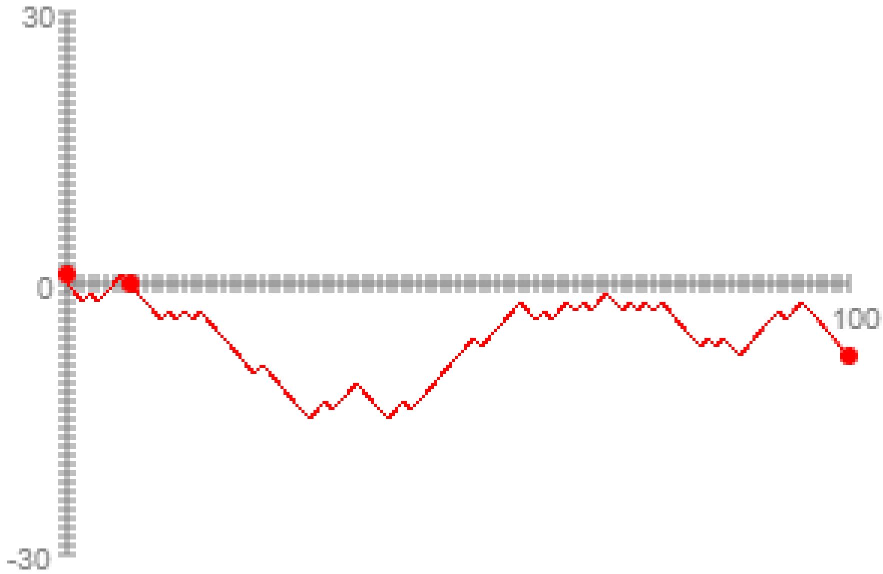


Figura 11: Simulació Passeig Aleatori 9

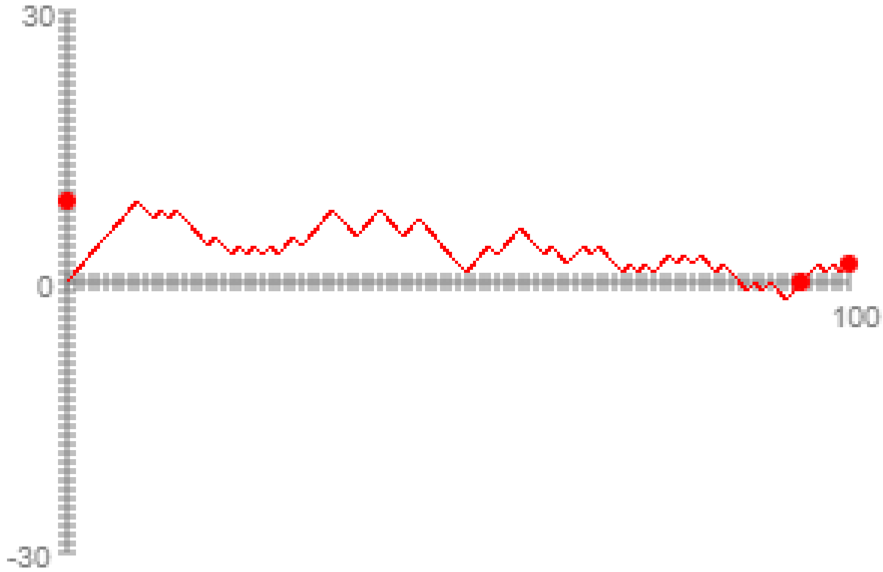


Figura 12: Simulació Passeig Aleatori 10