ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.1 (2016): 53-71
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas

Inquiry into secondary students' conceptual knowledge of algebraic symbolism through problem posing

Elena Fernández-Millán
Universidad de Granada, España
elenis@correo.ugr.es
Marta Molina
Universidad de Granada, España
martamg@ugr.es

RESUMEN • A través de la actividad de invención de problemas, indagamos en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que adquieren los estudiantes en la educación secundaria obligatoria. Concretamente, se identifican las características de ecuaciones y sistemas que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema; entre ellas: la inclusión de más de una incógnita y la presencia de la misma incógnita a ambos lados del signo igual, de coeficientes superiores a dos y de operaciones multiplicativas entre incógnitas. También se analizan los significados que dan a las incógnitas y operaciones contenidas en las expresiones, donde se detecta una mayor facilidad para dar significado a la estructura aditiva que a la multiplicativa.

PALABRAS CLAVE: conocimiento conceptual; simbolismo algebraico; educación secundaria; invención de problemas; álgebra.

ABSTRACT • Through the activity of problem posing, we inquire into the conceptual knowledge of algebraic symbolism which students develop in compulsory secondary education. We focus on identifying the characteristics of equations and systems that made the problem posing task difficult for the students; among them: the inclusion of more than one unknown and the presence of the same unknown in both sides of the equal sign, coefficient higher than two and multiplicative operations among the unknowns. We also analyze the meanings that they give to the unknowns and the operations contained in the given expressions, and identify greater facility to assign meaning to the additive structure than to the multiplicative one.

KEYWORDS: conceptual knowledge; algebraic symbolism; secondary education; problem posing; algebra.

Recepción: marzo 2014 • Aceptación: diciembre 2015 • Publicación: marzo 2016

Fernández-Millán, E., Molina, M., (2016) Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. Enseñanza de las Ciencias, 34.1, pp. 53-71

En la educación secundaria, se le concede gran importancia al estudio del álgebra y, en concreto, al trabajo con el simbolismo algebraico. Así, se pone de manifiesto en documentos curriculares tanto nacionales como autonómicos por los que se rigen las enseñanzas de esta etapa en España (BOE, 2014; BOJA, 2007*a*; BOJA, 2007*b*). Aun así, a pesar del tiempo que se dedica al aprendizaje del álgebra y, en particular, al dominio del simbolismo algebraico, los estudiantes muestran dificultades y cometen numerosos y reiterados errores en el manejo de este que sugieren un déficit en el conocimiento conceptual que adquieren de las diferentes componentes de dicho simbolismo (Booth, 1984; Castro, 2012; Cerdán, 2010; Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 2007; Küchemann, 1981; Ruano, Socas y Palarea, 2008).

Estos resultados nos llevan a interesarnos por el conocimiento conceptual que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la educación secundaria obligatoria (ESO). Para indagar en él, elegimos la tarea de inventar problemas resolubles mediante ciertas expresiones simbólicas dadas, apoyándonos en las evidencias de estudios previos (por ejemplo Ayllón, Castro y Molina, 2010; Cázares, Castro y Rico, 1998; Mestre, 2002), que destacan la utilidad de la invención de problemas como tarea evaluadora de las habilidades de los alumnos con relación a su conocimiento matemático. El estudio que aquí se presenta, de carácter exploratorio y descriptivo, supone un primer acercamiento al problema de investigación planteado en el que se centra la atención en las ecuaciones y sistemas de ecuaciones y se limita el significado de los símbolos literales al de incógnita.

TRADUCCIÓN DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO AL LENGUAJE VERBAL

Al hablar del «simbolismo algebraico» nos referimos al sistema de representación que se caracteriza por el empleo de la forma escrita en numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra. Entendemos por «sistema de representación» un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto (Castro y Castro, 1997).

El simbolismo algebraico es un sistema de representación compacto y de gran precisión, con alto grado de aplicabilidad en las matemáticas y en otras áreas. Permite representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen (Arcavi, 1994) y transformar las expresiones por medio de técnicas algebraicas aprendidas sin necesidad de atender (temporalmente) al significado de los símbolos que las componen. Como consecuencia, una parte esencial de ser competente en álgebra es la capacidad de alternar de forma flexible y oportunista, por un lado, el uso de acciones desprovistas de significado, y por otro lado, la búsqueda de significados dirigida a cuestionar y a elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados (Arcavi, 2006).

De estas dos dimensiones del trabajo con el simbolismo algebraico, la primera se sustenta en mayor medida en el conocimiento procedimental de los estudiantes, entendido como conocimiento de los procedimientos; mientras que la segunda lo hace en el conocimiento conceptual, en otras palabras, en el conocimiento de los conceptos que representa dicho simbolismo (Star, 2005). Es en esta segunda dimensión en la que centramos nuestra atención en este artículo al requerir a los estudiantes la invención de problemas resolubles por unas expresiones simbólicas, lo que implica, por su parte, la búsqueda de cantidades y relaciones posibles entre estas que puedan representarse mediante dichas expresiones.

Rittle Johnson y Schneider (2015) señalan que uno de los métodos para analizar el conocimiento conceptual implícito que adquieren los estudiantes de determinados conceptos matemáticos es la traducción entre diferentes sistemas de representación. Se le llama así al procedimiento mediante el que un objeto matemático representado mediante un sistema de representación pasa a ser representado en otro sistema (Gómez, 2007). Este proceso es complejo desde un punto de vista cognitivo. Además de la comprensión de los sistemas de representación implicados, requiere distinguir la información esencial que define el concepto representado para trasladarla a otro sistema de representación, obviando aspectos superfluos impuestos por el sistema de representación en el que viene expresado el concepto (Molina, 2014).

ESTUDIOS PREVIOS

Los estudios que han analizado el conocimiento conceptual que los estudiantes de educación secundaria tienen sobre simbolismo algebraico han atendido tanto a componentes independientes de este simbolismo (por ejemplo, los símbolos literales, el signo igual) como a las expresiones de forma global.

En su trabajo con estudiantes de entre 13 y 15 años, Küchemann (1981) observó que la mayoría de los estudiantes tenían dificultades para interpretar las letras en álgebra como incógnitas o como números generalizados. Furinghetti y Paola (1994), en un estudio con estudiantes de nivel educativo superior, encontraron que solo una pequeña minoría podría describir adecuadamente las diferencias entre los parámetros, incógnitas y variables, y la mayoría tendían a interpretar las letras como suplencia de objetos o de palabras. Ambos estudios coinciden con Booth (1984) en aludir al desigual uso de las letras en la aritmética y el álgebra como una de las causas de estas dificultades. Filloy, Rojano y Puig (2008) reportan casos en los que estudiantes asignan significados diferentes a una misma letra (por ejemplo, como incógnita y como variable) al interpretar una ecuación en una variable tal como $x + x/4 = 6 + x/4$. En esta línea cabe señalar la reflexión de Arnau y Puig (2013) sobre el diferente significado (variable *vs.* incógnita) que puede adquirir la letra según si la resolución de un problema se aborda desde el campo semántico de las funciones o desde el campo semántico de las ecuaciones.

En relación con el conocimiento que se adquiere de expresiones de forma global, estudios destinados a ayudar a los estudiantes a construir dicho conocimiento por medio de modelos de área rectangular (Chalouh y Herscovics, 1988) y de identidades aritméticas (Herscovics y Kieran, 1980) detectan mayor facilidad para interpretar de forma correcta las ecuaciones que las expresiones abiertas (sin signo de igual).

En general las dificultades que los estudiantes presentan a la hora de poner de manifiesto el conocimiento que tienen sobre las expresiones algebraicas se identifican como un reflejo de los errores que cometen en contextos numéricos (Linchevski y Livneh, 1999). No obstante, cabe destacar los obstáculos conceptuales que tienen lugar cuando los estudiantes pasan a operar con ecuaciones que tienen una incógnita a un lado del signo igual, a ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo igual (Filloy y Rojano, 1989). Para trabajar con este segundo tipo de ecuaciones el estudiante ha de entender que las expresiones en ambos miembros son de la misma naturaleza y deben dar significado a la igualdad de las expresiones, lo que en el marco de la enseñanza tradicional del álgebra requiere de instrucción específica según los citados autores.

Encontramos en la literatura tres grupos de autores que indagan específicamente en las traducciones del sistema de representación simbólico al verbal. Marmeche y Mathieu (1987) proponen a estudiantes de entre 11 y 14 años que, a partir de una expresión algebraica en la que intervienen estructuras aditivas, aporten una traducción con o sin contexto en la que se dé significado a dichas expresiones. Concluyen que ninguno de los estudiantes es capaz de proponer una traducción no contextualizada (por ejemplo, un número más su doble menos cinco) sin haber construido previamente una historia concreta para dicho enunciado. Los datos de su estudio les permiten plantear la hipótesis de que, para el aprendizaje del álgebra formal, un importante predecesor puede ser interpretar expresiones que tengan algún referente concreto.

Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2011) analizan los errores en los que incurren estudiantes de 4.º de la ESO en la traducción no contextualizada de simbolismo algebraico a lenguaje verbal. Entre los más comunes destacan: *a*) la confusión de operaciones aritméticas (especialmente, potencia y producto); *b*) la generalización de elementos de las expresiones (por ejemplo, al traducir

–4 como «se resta un número par» en vez de «se resta el número cuatro»); *c*) el uso polisémico de una incógnita, y *d*) la inclusión de más variables de las necesarias. Rodríguez-Domingo (2015) detecta en estudiantes de secundaria una falta de precisión al abordar traducciones entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Además, destaca los procesos de traducción del sistema de representación simbólico al verbal, frente a la traducción en sentido inverso, como más accesibles para los estudiantes tanto al inicio como al cierre de la educación secundaria, por lo que recomienda aprovechar esta mayor facilidad para promover un trabajo integrado de invención y resolución de problemas.

Isik y Kar (2012) analizan las dificultades que manifiestan profesores en formación cuando inventan problemas sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. En el primer caso, las dificultades identificadas se deben a la traducción incorrecta de la notación matemática, la asignación de valores no realistas a las incógnitas de los problemas inventados, al uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema, al cambio de la estructura de la ecuación en el problema inventado y al fallo al establecer una relación parte-todo. En los sistemas de ecuaciones, identifican las tres primeras dificultades anteriores y, además, otras dos: inventan problemas separados para cada una de las ecuaciones que forman el sistema y fallo al establecer una relación entre las variables.

En el contexto de las traducciones entre el sistema de representación verbal y el simbólico se reconoce como requisito para una traducción exitosa el comprender las incógnitas y las relaciones de dependencia mutua descritas en el enunciado verbal, así como las características sintácticas del simbolismo algebraico (Kaput, 1989). Estas observaciones nos llevan a distinguir dos dimensiones en nuestro análisis de las traducciones que realizan los estudiantes en este estudio: *a*) las características sintácticas de las ecuaciones y sistemas que los estudiantes conservan, y *b*) los significados que asignan a las incógnitas y a las operaciones que relacionan dichas incógnitas.

Acudimos a las clasificaciones de problemas aritméticos aditivos y multiplicativos que proponen Carpenter y Moser (1982) y Castro (2001), respectivamente, para distinguir significados de las operaciones que componen la estructura aditiva (suma y resta) y la estructura multiplicativa (multiplicación y división). Así, distinguimos entre problemas aditivos de cambio, comparación, combinación e igualación. En el caso de la estructura multiplicativa, distinguimos entre problemas de proporcionalidad simple, comparación y producto cartesiano.

ESTUDIO EMPÍRICO

En este artículo abordamos, por medio de la invención de problemas, el problema de investigación planteado al inicio: analizar el conocimiento conceptual, relativo al simbolismo algebraico, que adquieren los estudiantes como resultado de su formación matemática a lo largo de la ESO. Para la investigación que aquí se reporta, acotamos dicho problema por medio de dos objetivos específicos y precisando el tipo de expresiones simbólicas que consideramos.

Los objetivos específicos son: 1) identificar las características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultan a los estudiantes la tarea de inventar un problema, y 2) distinguir el significado que dan los estudiantes a las incógnitas y operaciones contenidas en las ecuaciones y sistemas.

Las expresiones simbólicas consideradas son ecuaciones lineales y cuadráticas de una incógnita y sistemas de ecuaciones de dos incógnitas, cuyos coeficientes, términos independientes y soluciones son números enteros. En este primer acercamiento al problema de investigación nos centramos en el significado de la letra como incógnita por ser el significado al que mayor atención se le dedica en la ESO y, por tanto, el más familiar para los alumnos al cierre de esta etapa.

Sujetos participantes

La muestra de estudiantes considerada fue intencional, dada su disponibilidad. La constituyen 20 estudiantes de 4.º curso de la ESO matriculados en la materia de matemáticas, opción A. El poder adquisitivo de los habitantes de la zona donde se encuentra el centro educativo es de nivel bajo, y las condiciones socioculturales también. La asistencia a clase de los estudiantes es regular salvo en dos de ellos. Según la información facilitada por su profesora de matemáticas, el nivel de rendimiento en la asignatura de matemáticas del grupo es heterogéneo, pudiendo calificarlo de medio.

Respecto a su conocimiento previo, desde el primer curso de la ESO han trabajado la resolución de ecuaciones y problemas relacionados, comenzando por ecuaciones de primer grado con una incógnita y, posteriormente, con ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas. Cuando se realizó la recogida de datos de este estudio habían concluido el trabajo en el aula de los contenidos relativos al álgebra. En concreto, habían trabajado ecuaciones de primer y segundo grado con paréntesis y denominadores, sistemas de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones no lineales, ambos con dos ecuaciones y dos incógnitas, todo ello de forma teórica y por medio de la resolución de problemas.

Diseño del instrumento

Para la recogida de datos se diseñó un cuestionario compuesto por siete tareas en cada una de las cuales se pedía al estudiante que inventara un problema que implicara en su resolución el uso de una ecuación o sistema dado. El tipo de expresiones consideradas habían sido previamente trabajadas por los estudiantes, tanto en el curso académico en el que se realizó el estudio como en cursos anteriores, y forman parte de los contenidos que se reflejan en el currículum de la ESO. Fueron diseñadas considerando los tipos de ecuaciones y sistemas más frecuentes a lo largo de la ESO, según un análisis de libros de texto de esta etapa, y buscando que hicieran factible la tarea de inventar un problema.

Las expresiones incluidas son cinco ecuaciones y dos sistemas de ecuaciones, con solución única, limitando así el uso de la letra al de incógnita. Los coeficientes, los términos independientes y las soluciones de las ecuaciones son números enteros. De este modo queríamos reducir la limitación que la resolución pudiera ejercer en el contexto del problema que inventar. En todas ellas, la incógnita o incógnitas aparecen relacionadas con otras cantidades –coeficientes, términos independientes, o la misma u otras incógnitas–, de tal forma que una sola incógnita no queda despejada a un lado del signo igual. El resto de variables de tarea consideradas en el diseño del cuestionario fueron el número de incógnitas, el número de miembros con incógnita, el coeficiente de la incógnita, la estructura operatoria de la operación de la incógnita con otras incógnitas o con términos independientes y la posición de la incógnita respecto del signo de igual. En la tabla 1 presentamos las ecuaciones y sistemas de ecuaciones considerados caracterizándolos en función de las variables de tarea que los diferencian.

Tabla 1.
Caracterización de las expresiones según las variables de tarea

N.º	Expresión	Variable de tarea: N.º de incógnitas	N.º de miembros con incógnita	Coeficiente de la incógnita	Estructura de la operación de la incógnita con incógnitas o términos independientes	Posición de la incógnita
1	$8 = x + 6$	1	1	1	Aditiva	Derecha
2	$2x - 1 = 9$	1	1	≠ 1	Aditiva	Izquierda
3	$x + 10 = 6x$	1	2	≠ 1	Aditiva	Ambos lados
4	$16 = x^2$	1	1	1	Multiplicativa	Derecha
5	$\left.\begin{array}{l}5x + 3y = 69\\ x + y = 15\end{array}\right\}$	2	1	≠1	Aditiva	Izquierda
6	$\left.\begin{array}{l}x + y = 7\\ xy = 10\end{array}\right\}$	2	1	1	Aditiva / Multiplicativa	Izquierda
7	$20 = x(x + 1)$	1	1	1	Aditiva/ Multiplicativa	Derecha

El cuestionario fue administrado por una de las investigadoras en una sesión de clase de matemáticas, estando presente la profesora oficial del grupo. Su resolución por los alumnos fue individual con lápiz y papel, a partir de las siguientes instrucciones:

> En cada recuadro, os tenéis que inventar el enunciado de un problema, el que vosotros queráis, que se pueda resolver con el planteamiento de cada una de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones propuestos. Si en alguno no sabéis qué poner podéis saltároslo y volver después, cuando hayáis inventando los otros problemas. Es importante que trabajéis individualmente y en silencio. Si tenéis cualquier duda levantad la mano y yo iré a ayudaros.

Durante la implementación del cuestionario no se plantearon dudas relevantes por parte de los estudiantes.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Iniciamos el análisis de cada problema[1] inventado por los estudiantes realizando su traducción a simbolismo algebraico, a la que nos referiremos como «traducción simbólica». Para realizar estas traducciones, hemos procedido de izquierda a derecha y traduciendo palabra por palabra siempre y cuando era posible. En caso contrario, hemos realizado la traducción a simbolismo algebraico a partir de la construcción de un esquema mental de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado. Por ejemplo, este último es el caso del proceso de traducción realizado en el siguiente problema propuesto por uno de los estudiantes para la tarea 5: *Cada 5 días Marcos recibe su paga y Ana la recibe al cabo de 3 días ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 69 días? ¿y al cabo de 15 días?* El cual traducimos a la siguiente expresión simbólica:

1. Utilizamos el término *problema* para referirnos a los enunciados inventados por los estudiantes, sin entrar a discutir ni analizar si incluyen los elementos mínimos para que sean considerados como problemas de acuerdo con alguna definición prefijada.

$$\begin{cases} \frac{69}{5}x + \frac{69}{3}y = z \\ \frac{15}{5}x + \frac{15}{3}y = t \end{cases}$$

Comparando la traducción simbólica con la expresión algebraica dada, clasificamos los problemas en «correctos», si la traducción simbólica del problema inventado coincide, con posibles cambios de orden en los términos, con la ecuación o sistema de ecuaciones propuesto, o en «incorrectos» en caso contrario. Etiquetamos como incorrectos problemas con traducción simbólica equivalente a la expresión dada, pues nuestra atención no está en el conocimiento conceptual de las expresiones en su conjunto, sino en cada uno de los componentes de estas.

A partir de un primer análisis de los enunciados formulados por los estudiantes y de la información extraída de los trabajos previos consultados, definimos dos grupos de categorías. Distinguimos entre «categorías sintácticas» y «semánticas» según si atienden a características sintácticas (forma) o semánticas (significado) de los problemas planteados. Las categorías sintácticas (tabla 2) surgen de la identificación de los elementos en los que difieren las expresiones dadas y de las traducciones simbólicas de los problemas inventados por los estudiantes. Estas categorías son las que nos permiten dar respuesta al primer objetivo específico de esta investigación. Por su parte las características semánticas (tabla 4) permiten dar respuesta al segundo objetivo específico.

Tabla 2.
Definición de las categorías sintácticas

Categoría	Nombre	Definición
A	Conservación de términos y operaciones	En la traducción simbólica del problema planteado, el tipo de términos (monomios de diferente grado, término independiente) que aparece y las operaciones que los relacionan son los que se presentan en la expresión algebraica dada.
B	Presencia de incógnitas operando	La traducción simbólica del enunciado planteado presenta incógnitas operando con otros elementos de la ecuación.
C	Relación entre coeficiente/s e incógnita/s	En la traducción simbólica del problema están presentes los mismos coeficientes de las incógnitas que aparecen en la expresión algebraica dada, operando con dichas incógnitas.
D	Igual número de incógnitas	El número de incógnitas que aparecen operando con otros elementos de la ecuación en la traducción simbólica es el mismo que el de la expresión algebraica dada.

Las categorías A y B no son excluyentes y presentan dos valores posibles para cada uno de los enunciados propuestos por los estudiantes: «Sí» y «No». En la tabla 3 presentamos el ejemplo 1, en el que observamos que no se conservan los elementos de la ecuación, ya que se añade un monomio (categoría A); pero sí hay incógnitas operando con otros elementos de la ecuación (categoría B).

Las categorías C y D incluyen adicionalmente el valor de «No analizable» (N/A), debido a que un «No» en la categoría B excluye el análisis de las categorías C y D: si no hay incógnitas operando con otros elementos de la ecuación, no puede haber coeficientes operando con dichas incógnitas (categoría C), y el número de ese tipo de incógnitas no es igual al de la expresión dada (categoría D). Lo podemos observar en el ejemplo 2 de la tabla 3.

Las categorías sintácticas aportan información únicamente en el análisis de los problemas incorrectos; por ello, mostramos los resultados solo en estos casos. Si consideramos estas categorías en el caso de los problemas correctos, todas ellas se codificarían con un «Sí» (véase el ejemplo 3 de la tabla 3). En los problemas incorrectos, al menos una de las categorías sintácticas se valora con un «No».

Tabla 3.
Ejemplos de codificación de enunciados según las categorías sintácticas

Ejemplo	Expresión dada	Enunciado inventado	Traducción simbólica	Codificación			
				A	B	C	D
1	$8 = x + 6$	La suma de dos números consecutivos pares da 8. Calcula qué dos números son.	$2x + 2x + 2 = 8$	NO	SÍ	NO	SÍ
2	$2x - 1 = 9$	Si tengo 9 globos y mi madre me da uno más pero se me explotan la mitad ¿cuántos globos me quedan?	$\frac{9+1}{2} = x$	NO	NO	N/A	N/A
3	$\begin{cases} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{cases}$	Roberto ha ido al centro comercial y se ha comprado 5 camisetas y tres chaquetas, gastándose 69 € y Alba que le ha acompañado ha comprado una camiseta y una chaqueta para su novio igual que la de Roberto gastándose 15 € en total. ¿Cuánto es el valor de una camiseta? ¿Y de la chaqueta?	$\begin{cases} 5x + 3y = 69 \\ x + y = 15 \end{cases}$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
4	$x + 10 = 6x$	La edad de Luis dentro de 10 años es igual que la edad de su hermana multiplicada por 6. ¿Qué edad tiene la hermana?	$x + 10 = 6y$	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Cada una de las categorías semánticas, no excluyentes, definidas en la tabla 4, presenta tres valores posibles para cada uno de los enunciados propuestos por los estudiantes: «Sí», «No» y «No Analizable» (N/A). El valor de no analizable para la categoría E se aplica a los problemas en los que no hay incógnita operando con otros términos de la ecuación; son aquellos problemas que presentan «No» en la categoría B. En el caso de las categorías F y G, el valor de no analizable se utiliza para los casos en los que en la ecuación original no hay estructura aditiva o multiplicativa; este es el caso de la ecuación 1, que no presenta estructura multiplicativa, y la ecuación 4 que no presenta estructura aditiva.

Tabla 4.
Definición de las categorías semánticas

Categoría	Nombre	Definición
E	Da significado a las incógnitas	Se asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático.[2]
F	Da significado a las estructuras aditivas	La parte aditiva del problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: cambio, combinación, comparación o igualación.
G	Da significado a las estructuras multiplicativas	La parte multiplicativa del problema presenta alguna de las siguientes estructuras semánticas: proporcionalidad simple, comparación o producto cartesiano.

2. Esta categoría busca distinguir los enunciados en los que las incógnitas son asociadas a un contexto no matemático de aquellos problemas en los que las incógnitas son números descontextualizados (por ejemplo, en *la ecuación 2, ¿qué número al multiplicar por 2 y al restarle 1 te da como resultado 9?*).

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes no consideramos aquellos problemas que no pueden traducirse a un enunciado simbólico (por ejemplo, *En una casa hay 2 personas y una tele y 9 muebles. ¿Qué sería la tele? ¿x o y?),* o que se limitan a pedir la resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones dado (por ejemplo, *Teniendo esta expresión 20 = x(x + 1), halla la x sabiendo que en los dos casos es el mismo número, y al resolverlo nos da 20*). A estos dos tipos de problemas nos referimos como «problemas descartados».

La tabla 5 recoge las frecuencias de problemas descartados e ítems sin respuesta.

Tabla 5.
Frecuencias de problemas no analizables (n = 20)

Codificación	Ecuación/Sistema de ecuaciones						
	1	2	3	4	5	6	7
Sin respuesta	0	2	1	2	5	5	6
Descartados	1	2	2	1	0	3	1
Total	1	4	3	3	5	8	7

RESULTADOS

En este apartado, mostramos los resultados obtenidos al clasificar los problemas inventados por los estudiantes en correctos e incorrectos, y al utilizar las categorías presentadas en el apartado anterior para codificar dichos problemas. El mayor número de problemas inventados analizables (no descartados) corresponde a la ecuación 1, mientras que las dos últimas expresiones 6 y 7 son las que presentan menor número de enunciados analizables (véase la tabla 6).

La ecuación 1 destaca sobre las demás por ser la que presenta la mayor frecuencia de problemas correctos propuestos por los estudiantes. En el resto de ecuaciones, entre 6 y 8 de los 20 estudiantes proponen un problema cuya traducción simbólica es correcta. La ecuación 3 destaca por ser la que presenta una mayor frecuencia de enunciados incorrectos.

Tabla 6.
Frecuencias de problemas correctos e incorrectos

Codificación	Ecuación/Sistema de ecuaciones						
	1	2	3	4	5	6	7
Correctos	15	8	6	8	8	6	6
Incorrectos	4	8	11	9	7	6	7
Total	19	16	17	17	15	12	13

Categorías sintácticas

Las categorías sintácticas permiten describir las diferencias que se detectan en la traducción simbólica de los problemas incorrectos planteados por los estudiantes.

Categorías A y B: conservación de los términos y operaciones y presencia de incógnitas operando.

La tabla 7 recoge las frecuencias que se registran al clasificar respecto de las dos primeras categorías (no excluyentes) los enunciados incorrectos propuestos por los estudiantes.

Tabla 7.
Codificación de los enunciados según las categorías A y B.
n (número problemas incorrectos) = 52

Codificación		Ecuación							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
A									
	SÍ	0	0	3	0	1	1	1	6
	NO	4	8	8	9	6	5	6	46
B									
	SÍ	2	4	8	3	6	6	5	34
	NO	2	4	3	6	1	0	2	18

De entre las diferencias que presenta la traducción simbólica de los problemas incorrectos planteados respecto de las expresiones algebraicas dadas destaca la modificación de los términos y/o las operaciones que los relacionan por su alta frecuencia (categoría A) (por ejemplo, en el sistema 6, *Me he comprado una camiseta y un pantalón y total me he gastado 7 euros. Si comprándome la camiseta al precio del pantalón me gasto 10 €. ¿Cuánto vale el pantalón y la camiseta?,* problema con traducción simbólica $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ y+y=10 \end{array}\right\}$). Esta diferencia se detecta en el 42% de los problemas analizables (88% de los problemas incorrectos), presentando las mayores frecuencias en las ecuaciones 2, 3 y 4.

En el caso de las ecuaciones y sistemas cuadráticos (4, 6 y 7), algunos problemas presentan modificaciones en las operaciones que relacionan los términos de la ecuación, debido a que su traducción simbólica corresponde a la de una ecuación lineal (dos de nueve en la ecuación 4, dos de cinco en el sistema 6 y cinco de seis en la ecuación 7).

La categoría B se codifica con un «NO» en un 17 % de los problemas analizables (35% de los problemas incorrectos). En la traducción simbólica de todos estos problemas, salvo uno, la incógnita no se encuentra operando con ningún otro elemento de la ecuación, sino que se encuentra despejada a un lado del signo igual. La excepción es el siguiente problema planteado en la ecuación 7, en el que no se menciona ninguna operación que implica una incógnita: *Ana tiene 20 años y Antonio es un año más pequeño. Dentro de un año la edad de Antonio será igual a la de Ana [ahora]*; si bien este problema también podría haberse descartado como sin sentido si se interpreta que en la última frase el estudiante se refiere a la edad de Ana entonces. La ecuación 4 destaca sobre las demás debido a que es para la que los estudiantes proponen un mayor número de problemas sin incógnita operando con otros elementos de la ecuación.

Categorías C y D: relación entre coeficientes e incógnitas e igual número de incógnitas.

La tabla 8 muestra las frecuencias correspondientes a la clasificación de los problemas incorrectos según las categorías C y D.

Tabla 8.
Codificación de los enunciados según las categorías C y D.
n (número problemas incorrectos) = 52

Codificación		Ecuación							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
C									
	SÍ	1	4	5	1	2	6	5	24
	NO	1	0	3	2	4	0	0	10
	N/A	2	4	3	6	1	0	2	18
D									
	SÍ	2	2	4	3	2	2	4	19
	NO	0	2	4	0	4	4	1	15
	N/A	2	4	3	6	1	0	2	18

Al atender a los coeficientes de las incógnitas (categoría C), distinguimos, dentro de los casos en que los estudiantes incluyen los coeficientes y términos independientes de las ecuaciones dadas, aquellos casos en que estos se relacionan con las incógnitas de forma diferente a la dada. Esto tiene lugar en seis problemas, tres correspondientes a la ecuación 3 y otros tres correspondientes al sistema de ecuaciones 5. Un ejemplo es el problema siguiente, que incluye los números cinco, tres, y uno pero no desempeñan la función de coeficientes: *En una clase hay 69 mochilas, están repartidas en un grupo extranjeros y uno de españoles, los españoles tienen 5 mochilas iguales y los extranjeros 3. Los grupos de extranjeros y españoles son de 15 ¿Cuántas mochilas hay en cada grupo?*

Teniendo en cuenta las frecuencias recogidas en la tabla 8 para la categoría C, destaca el caso de las ecuaciones 3 y 4 y el sistema 5 por ser donde se concentran los problemas en los que las incógnitas presentan coeficientes diferentes (por ejemplo, *Pablo tiene una bolsa con canicas y a María le gana 10 más ¿Cuántas bolas tendrá si al llegar a casa cuenta que tiene 6 bolas más de las que ya tenía?*; cuya traducción simbólica es $x+10=x+6$, propuesto en la ecuación 3). En el caso del sistema 5, las dificultades se manifiestan en la primera de las ecuaciones, la que incluye coeficientes diferentes a uno. Cabe destacar que la ecuación 3 y el sistema 5, a diferencia del resto, incluyen ambas algún coeficiente superior a dos. En la ecuación 4, en la que el coeficiente sí es uno, la dificultad se encuentra asociada a la presencia de potencias. En este caso proponen enunciados que no se resuelven con la operación potencia y su traducción simbólica corresponde a la de una expresión lineal incluyendo expresiones tales como «el doble» o «el cuádruplo» (por ejemplo, *Calcula la edad de Ana sabiendo que su hermana le cuadruplica la edad, teniendo la hermana 16 años*, cuya traducción simbólica es: $4x=16$).

Cuando los estudiantes modifican el número de incógnitas (categoría D), tienden a añadir una incógnita; así ocurre en dos problemas en la ecuación 2 y el sistema 6, cuatro, en la ecuación 3, y uno, en la ecuación 7 y el sistema 5. En los sistemas de ecuaciones también ocurre que en una ocasión incluyen una única incógnita y en dos y un caso, respectivamente, se incluyen cuatro incógnitas. La ecuación 3 y los dos sistemas de ecuaciones propuestos son las expresiones en las que con mayor frecuencia los alumnos tienden a incluir un mayor número de incógnitas que las dadas, mostrando dificultad para precisar que se refieren a las mismas incógnitas cuando en el enunciado se narran relaciones relativas a ecuaciones diferentes (por ejemplo, *En una caja hay cinco veces un número de chicles y tres veces un número de caramelos y en total hay 69. En otra caja hay un número de chicles y un número de caramelos y en total hay 15 ¿Cuántos caramelos y cuántos chicles hay en total entre las dos cajas?*, cuya traducción simbólica es

$\begin{cases} 5x+3y=69 \\ z+t=15 \\ 5x+3y+z+t=w \end{cases}$). En la ecuación 3, cuatro estudiantes identifican las incógnitas como distintas al encontrarse en miembros diferentes (por ejemplo, *La edad de Luis dentro de 10 años es igual que la edad de su hermana multiplicada por 6. ¿Qué edad tiene la hermana?,* cuya traducción simbólica es: $x+10=6y$).

Categorías semánticas

Atendemos ahora a los resultados que se obtienen al clasificar los problemas según las categorías semánticas definidas, que nos informan de los significados que los estudiantes asignan a las operaciones e incógnitas contenidas en las expresiones simbólicas dadas. Mostramos los resultados para cada ecuación (véanse las tablas 9 y 10) teniendo en cuenta los problemas correctos e incorrectos de forma conjunta.

Categoría E: da significado a las incógnitas.

En la mayoría (65%) de los enunciados analizables, los estudiantes asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático (categoría E), siendo las ecuaciones 4 y 7 donde con menor frecuencia ocurre esto. En la ecuación 6, a 10 de los problemas les asignan a las incógnitas referentes de un contexto no matemático, pero solo 4 son correctos. También son correctos los dos problemas a los que asigna referentes matemáticos a las incógnitas. Estas tres expresiones algebraicas (dos ecuaciones y un sistema) tienen en común la presencia de operaciones de la estructura multiplicativa entre las incógnitas. Cabe destacar que en todos los problemas propuestos por los estudiantes, los símbolos literales han sido interpretados como incógnitas.

Tabla 9.
Codificación de los enunciados según la categoría E

Codificación		Ecuación							Total
		1	2	3	4	5	6	7	
E									
	SÍ	14 (13)	11 (7)	13 (6)	5 (4)	14 (8)	10 (4)	4 (2)	71 (44)
	NO	3 (2)	1 (1)	1 (0)	6 (4)	0 (0)	2 (2)	7 (4)	20 (13)
	N/A	2 (0)	4 (0)	3 (0)	6 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	18 (0)

Nota: Las frecuencias entre paréntesis corresponden únicamente a los problemas correctos.

Categoría F y G: da significado a las estructuras aditivas y multiplicativas.

Atendiendo a los resultados según las categorías F («Da significado a las estructuras aditivas»)[3] y G («Da significado a las estructuras multiplicativas»)[4] (véase la tabla 10), observamos que, en la mayoría de los enunciados (82%), los estudiantes dan significado a las estructuras aditivas; sin embargo, solo ocurre esto en el 46% de los enunciados en el caso de las estructuras multiplicativas; porcentajes relativos a los problemas inventados correspondientes a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que tienen presencia de estructuras aditivas y multiplicativas, respectivamente. Es destacable observar que en el sistema 6 y en la ecuación 7 ningún estudiante da significado a las estructuras multiplicativas. En la ecuación 4 también se detecta una alta presencia de problemas que no dan significado a dichas estructuras; en siete de los problemas sí le dan significado, pero la traducción simbólica de ninguno de ellos coincide con la ecuación dada.

Tabla 10.
Codificación de los enunciados según las categorías F y G

Codificación		Estructura Semántica	Ecuación							Total
			1	2	3	4	5	6	7	
F										
	SÍ									
		CM	4 (2)	10 (5)	8 (4)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	7 (3)	30 (14)
		CB	9 (8)	2 (0)	6 (2)	0 (0)	14 (8)	9 (4)	0 (0)	40 (22)
		CP	0 (0)	0 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (1)	3 (1)
		I	3 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (3)
	NO		3 (2)	4 (3)	2 (0)	0 (0)	1 (0)	3 (2)	4 (2)	17 (9)
	N/A		0 (0)	0 (0)	0 (0)	16 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	16 (8)
G										
	SÍ									
		CP	0 (0)	11 (6)	9 (4)	4 (0)	2 (1)	0 (0)	0 (0)	26 (11)
		PS	0 (0)	2 (1)	1 (0)	3 (0)	9 (7)	0 (0)	0 (0)	15 (8)
		PC	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
	NO		0 (0)	3 (1)	7 (2)	10 (8)	4 (0)	12 (6)	13 (6)	49 (23)
	N/A		19 (15)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	19 (15)

Estructuras semánticas: cambio (CM), combinación (CB), comparación (CP) o igualación (I), proporcionalidad simple (PS) y producto cartesiano (PC). Nota: Las frecuencias entre paréntesis corresponden únicamente a los problemas correctos.

Al atender a la estructura semántica de las partes aditivas de estos problemas se observa que predominan los problemas de combinación (53%), seguidos de los de cambio (39%). Todos los problemas que presentan estructura semántica de igualación son correctos, mientras que para el resto de estructuras semánticas lo son un 48% de los de cambio, el 55% de los de combinación y uno de los tres problemas de comparación. En el caso de las componentes multiplicativas, se observa que predominan las operaciones multiplicativas de comparación (63%) –42% de los cuales son correctos–, seguidas de las

3. Recordamos que la estructura aditiva no aparecía en la ecuación 4, sin embargo un alumno propuso un problema aditivo.
4. Todas las expresiones salvo la ecuación 1 incluyen una componente multiplicativa.

de proporcionalidad simple (37%) –donde predominan los problemas correctos (73%)–, con ausencia de problemas de producto cartesiano.

DISCUSIÓN

Los resultados ponen de manifiesto que los estudiantes encontraron dificultades para inventar problemas cuya traducción a simbolismo algebraico se correspondiera con las expresiones dadas. En todas salvo la ecuación 1 el porcentaje de problemas cuya traducción simbólica corresponde con la expresión dada no supera el 50%. El menor número de problemas correctos se presenta en las expresiones 3, 6 y 7. La ecuación 3 es la única que presenta la incógnita a ambos lados del signo igual, y las tareas 6 y 7 tienen como variable de tarea común que la estructura de las operaciones entre las incógnitas es multiplicativa. Los resultados correspondientes a las categorías sintácticas nos permiten dar respuesta al primer objetivo de investigación, mientras que los correspondientes a las categorías semánticas nos permiten abordar el segundo. Comenzamos la discusión de los resultados anteriormente presentados atendiendo a estas últimas en primer lugar.

Teniendo en cuenta la variable de tarea «estructura de la operación», se observa que los estudiantes manifiestan mayor facilidad para dar significado a las estructuras aditivas, por lo que se detecta un predominio de las estructuras semánticas de combinación y cambio (tanto en problemas correctos como incorrectos). Estas son las dos estructuras aditivas más frecuentes en los libros de texto de educación primaria según un estudio de Orrantia, González y Vicente (2005); por tanto, las más familiares para los estudiantes. Las estructuras multiplicativas identificadas son las de comparación y de proporcionalidad simple. Estos resultados llaman la atención sobre significados particulares de las estructuras multiplicativas que se detectan como débilmente vinculados a dichas operaciones en tanto que ningún alumno los considera al proponer problemas. La consideración del contexto del área de figuras planas rectangulares, por ejemplo, hubiera facilitado la invención de problemas asociados a las ecuaciones cuadráticas. El uso de las estructuras semánticas de proporcionalidad simple y comparación para dar significado a estas expresiones resulta artificial, pues requiere idear una situación en la que *a*) se desconozca tanto el factor escalar como una de las cantidades para el caso de la comparación o *b*) se desconozca la cantidad de elementos en cada grupo y el número de grupos, y ambas cantidades desconocidas estén relacionados aditiva o multiplicativamente (según consideremos el sistema 6 o las ecuaciones 4 o 7 respectivamente). Al no considerar situaciones de producto cartesiano, los estudiantes tuvieron dificultades para proponer problemas correctos.

Estos resultados ponen de manifiesto una limitación en el conocimiento de las estructuras multiplicativas que los estudiantes han desarrollado durante la ESO, así como en la capacidad de transferencia de su conocimiento conceptual de las operaciones aritméticas. Se identifican deficiencias concretamente en los contextos/situaciones que dan sentido a las operaciones aritméticas. Si bien los resultados obtenidos no son generalizables, es relevante llamar la atención sobre las situaciones aditivas comparativas y las multiplicativas de producto cartesiano para garantizar el desarrollo de un conocimiento completo de las situaciones que hacen significativas a las operaciones aritméticas. Así mismo, es destacable el caso de la estructura multiplicativa, pues solo en algo menos de la mitad de los enunciados los estudiantes le dan significado (siendo las dificultades más acusadas cuando la operación multiplicativa está presente entre incógnitas). Esta proporción se duplica en el caso de los problemas aditivos.

La dificultad provocada por la inclusión en las expresiones de la multiplicación como operación que relaciona las incógnitas de la expresión dada se manifiesta también a la hora dar significado a la incógnita. La ecuación 4 y el sistema de ecuaciones 7 (en ambas la operación entre incógnitas tiene estructura multiplicativa) son los casos en los que hay un mayor número de problemas propuestos donde no le dan significado a las incógnitas. Adicionalmente, se observa en los resultados aportados por el análisis de las categorías sintácticas. Así, en la ecuación 4 solo ocho de los problemas son correctos. Los estudiantes plantean problemas cuya traducción simbólica no conserva las operaciones entre los términos de la ecuación, bien porque la incógnita no opera con elementos de la ecuación, o son resolubles mediante ecuaciones lineales.

Cuando la estructura multiplicativa se presenta entre un número y una incógnita, los estudiantes tienen menos dificultades en darle significado, de tal forma que relacionan de forma correcta el coeficiente con la incógnita en el 74% de los problemas analizados, de los cuales un 70% son correctos. No obstante, los resultados sugieren que la presencia de coeficientes superiores a 2 en la expresión dada, fue un factor condicionante de la capacidad de los estudiantes para inventar problemas. Partiendo de las evidencias de estudios previos sobre la falta de precisión en procesos de traducción (Rodríguez-Domingo, 2015), este resultado puede estar relacionado con una mayor dificultad para expresar verbalmente relaciones multiplicativas relativas a ser múltiplo de un número natural superior a 2. Teniendo en cuenta el número de incógnitas, también detectamos dificultades en el uso del lenguaje verbal cuando en los sistemas de ecuaciones o en la ecuación 3 (con la misma incógnita en ambos lados del signo igual) han de precisar que las cantidades que aparecen representadas con la misma letra son las mismas. Consideramos que este hecho también está relacionado con la inclusión de más incógnitas de las incluidas en el sistema, lo cual ocurre en siete de los nueve problemas propuestos para los sistemas de ecuaciones (tareas 5 y 6). Estas evidencias llaman la atención sobre la necesidad de trabajar explícitamente en el aula el uso preciso del lenguaje verbal para describir relaciones cuantitativas entre cantidades desconocidas. El simbolismo algebraico por naturaleza es más preciso que el verbal, pero el aprendizaje de esta característica requiere que los estudiantes sean capaces de capturar con igual precisión dichas relaciones en ambos sistemas de representación.

Es interesante observar en los procesos de traducción planteados a los estudiantes la tendencia a proponer problemas cuya traducción simbólica presenta la incógnita despejada. Esto concuerda con la preferencia por métodos aritméticos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando abordan la tarea de resolver problemas (Kieran, 2007). Esta tendencia denota en los estudiantes una visión operacional de los problemas en cuestión, que se aleja del interés del álgebra por dirigir la atención hacia las estructuras comunes de diferentes problemas, lo que da lugar a que sean resueltos por una misma familia de ecuaciones. En consecuencia, hacemos una llamada de atención hacia la enseñanza para dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos más estructurales de la resolución de problemas.

CONCLUSIÓN

En este artículo describimos una investigación en la que indagamos en el conocimiento conceptual que un grupo de estudiantes que están culminando su educación obligatoria ha adquirido sobre diferentes componentes de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Se han identificado características de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones que dificultaron la tarea de inventar problemas, y el significado que los estudiantes atribuyeron a las operaciones e incógnitas contenidas en las expresiones dadas. Las citadas características son: el número de incógnitas superior a uno, la misma incógnita a ambos lados del signo de igual, coeficientes diferentes superiores a dos, y la presencia de estructuras multiplicativas entre incógnitas. En cuanto a los significados atribuidos a las operaciones, se detecta una mayor facilidad cuando se consideran estructuras aditivas, si bien las estructuras semánticas de comparación e igualación se presentan en un porcentaje muy bajo de los problemas, y cabe destacar la ausencia de la estructura semántica multiplicativa de producto cartesiano. La presencia de estructura multiplicativa también influye a la hora de mostrar dificultades en dar significado a las incógnitas.

En un contexto diferente al de estudios previos, en este caso, la invención de problemas, se ratifica la necesidad de atender al significado de las incógnitas cuando aparecen en miembros diferentes de una ecuación. Adicionalmente, llamamos la atención sobre la necesidad de intensificar la experiencia de los estudiantes con la estructura semántica multiplicativa de producto cartesiano, tanto en contextos aritméticos como algebraicos, y de atender al lenguaje natural necesario para la verbalización de relaciones multiplicativas. Se concluye también la necesidad de prestar una mayor atención en la enseñanza a la expresión mediante el sistema de representación verbal de esquemas de relaciones más complejos como son los modelizables mediante sistemas de ecuaciones, así como de promover un estudio más estructural de la resolución de problemas.

Desde el punto de vista de la docencia, las deficiencias identificadas informan para el diseño de propuestas didácticas que busquen desarrollar el conocimiento de los estudiantes relativo al significado de las operaciones aritméticas y del simbolismo algebraico. La utilidad constatada de la actividad de invención de problemas como una herramienta útil para evaluar el conocimiento de los estudiantes se vuelve a ratificar, ya sea con fines docentes o investigadores.

Los resultados obtenidos son un primer paso en el estudio del conocimiento conceptual del simbolismo algebraico que los estudiantes desarrollan durante la ESO mediante la resolución de problemas. Es continuación natural de este trabajo indagar en dicho conocimiento en relación con otros usos de las letras u otro tipo de expresiones algebraicas. Posteriores estudios con muestras más amplias permitirán confirmar los resultados obtenidos, si bien son coherentes con los de estudios previos consultados que abordan este análisis desde enfoques diferentes al de la invención de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 1(3), pp. 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. En I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos y P. Canavarro (eds.), *Números y álgebra na aprendizagem da matemática e na formaçâo de profesores*. Caminha, Portugal: SPCE, pp. 29-47.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias,* 31(3), pp. 49-66.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida, España: SEIEM, pp. 223-233.

http://funes.uniandes.edu.co/1580/

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*a*). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía*, vol. BOJA n.º 156, pp. 15-25. Sevilla, España: Junta de Andalucía.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007*b*). *Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*,vol. BOJA n.º 171, pp. 23-65. Sevilla, España: Junta de Andalucía.

Boletín Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, vol. BOE n.º 3, pp. 169-546. Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Carpenter, T.P. y Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, NJ: LEA, pp. 9-24.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en educación primaria*. Madrid, España: Síntesis, pp. 203-230.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, L. Ordóñez (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*. Baeza, España*:* SEIEM, pp. 75-94.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: Horsori, pp. 95-124.

Cázares, J., Castro, E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula,* 10, pp. 19-39.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), pp. 99-110.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. En A.F. Coxford y A.P. Shulte (eds.), *The ideas of algebra, K-12*. Reston, Virginia: NCTM, pp. 33-42.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics,* 9(2), pp. 19-25.

Filloy, E., Rojano T. y Puig, L. (2008*). Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York, NY: Springer.

Furinghetti, F. y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En J.P. da Ponte y J.F. Matos (eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics,*vol. 2, pp. 368-375. Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher,* 73(8), pp. 572-580.

Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education,* 37(9), pp. 93-113.
http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: NCTM, pp. 167-194.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: IAP, pp. 707-62.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London, Reino Unido: John Murray, pp. 102-119.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics,* 40(2), pp. 173-196.
http://dx.doi.org/10.1023/A:1003606308064

Mestre, J.P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 23(1), pp. 9-50.
http://dx.doi.org/10.1016/S0193-3973(01)00101-0

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME,* 17(3), pp. 559-579.
http://funes.uniandes.edu.co/6498/1/Gac173molina.pdf

Orrantia, J., González, L.B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28, pp. 420-451.
http://dx.doi.org/10.1174/021037005774518929

Resnick, L.B., Cauzinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J.A. Sloboda y D. Rogers (eds.), *Cognitive process in mathematics*. Oxford, Reino Unido: Clarendon Press, pp. 169-203.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. En R.C. Kadosh y A. Dowker (eds.), Oxford Handbook of Numerical Cognition. Oxford, UK: Oxford University Press, pp. 1118-1134.

Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2011). Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. Marín-Rodríguez y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM*. Ciudad Real, España: SEIEM, pp. 379- 391.
http://funes.uniandes.edu.co/1887/

Ruano, R.M., Socas, M. y Palarea, M.M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), pp. 61-74.

Star, J. (2005). Re-«conceptualizing» procedural knowledge in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), pp. 404-411.

Inquiry into secondary students' conceptual knowledge of algebraic symbolism through problem posing

Elena Fernández-Millán
Universidad de Granada, España
elenis@correo.ugr.es

Marta Molina
Universidad de Granada, España
martamg@ugr.es

In this article we address the following research problem through the activity of problem posing: to analyse the conceptual knowledge of algebraic symbolism which students develop as a result of their mathematics education in compulsory secondary education. We delimit this research problem by means of two specific research objectives and specifying the type of symbolic expressions considered. The specific objectives are: 1) To identify the characteristics of equations and systems of equations that make the task of problem solving difficult for students, and 2) To distinguish the meaning given by students to the unknowns and operations contained in the equations and systems.

The justification of the pertinence of this research is based on two ideas. One is the importance of the study of algebra in secondary education according to national and local curricula. The other one is previous studies' evidence of difficulties and reiterative errors in the learning of algebra which suggest limitations in the students' conceptual knowledge of the different components of algebraic symbolism.

We use problem solving as a method to analyse the implicit conceptual knowledge acquired by the students. The sample is formed by 20 students attending the last course of compulsory secondary education. For the data collection we designed a questionnaire with seven tasks where students had to pose a problem to be solved using a given algebraic expression: either an equation or a system of equations. The tasks variables are: number of unknowns, number of members with unknown, coefficient of the unknown, structure of the operation among the unknowns, and the position of the unknown.

To analyse the data we translate each posed problem into algebraic symbolism and compare the translation to the expression given in the tasks. Through this comparison we define two sets of categories –syntactic and semantic– that allow to answer the specific research objectives.

Results evidence that students found difficulties to pose the problems. In all but one of the tasks, posed problems whose translation into algebraic symbolism matched the given expression were less than 50%. The characteristics of equations and systems that made the problem posing task difficult for the students are: the inclusion of more than one unknown and the presence of the same unknown in both sides of the equal sign, coefficients higher than two and multiplicative operations among the unknowns.

Considering the semantic categories, we notice a higher ability to give meaning to additive structures than to multiplicative ones. So, a limitation in the students' knowledge of multiplicative structure was detected. The most common semantic structures considered in the additive problems were change and part-part whole. Multiplicative problems of Cartesian product semantic structure were absent in the students' productions.

The difficulty caused by the inclusion of multiplication as the operation that relates the unknowns in the given expressions was also detected when students had to give meaning to the unknowns as well as in the analysis performed using the syntactic categories.

Students were more successful in giving meaning to the multiplicative structure when it related a number and an unknown, especially if coefficients were not higher than 2. Some detected errors seem to be related to difficulties in verbalizing multiplicative relations including multiples of numbers higher than 2 and in specifying that quantities represented with the same letters are the same.