

CONCEPCIONES SOBRE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN EN UN GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Conceptions on addition and subtraction on a Primary Teaching Degree

Castro, A.^a, Prat, M.^b y Gorgorió, N.^b

^aUniversidad Austral de Chile, ^bUniversidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Las concepciones que poseen los estudiantes para maestro sobre los conceptos matemáticos son una valiosa información para ayudar a los formadores de maestros a desarrollar el conocimiento del contenido. Este artículo presenta parte de los resultados de un estudio más amplio en el que se evalúan las concepciones de 203 estudiantes para maestro que aún no han iniciado sus estudios en didáctica de la aritmética. Presentamos las concepciones generales sobre los significados de la adición y la sustracción, y la relación entre ambas, que surgen del análisis en conjunto del conocimiento de los diferentes aspectos evaluados. Los resultados sugieren que los futuros maestros inician su formación con un conocimiento aditivo inadecuado, evidenciado en concepciones estereotipadas y/o erróneas sobre los significados de la suma y la resta, así como de la relación entre estas operaciones.

Palabras clave: concepciones, adición y la sustracción, relaciones suma y resta, formación de maestros.

Abstract

Student-teachers' conceptions of mathematical concepts are valuable information to help teacher educators to develop mathematical content knowledge. This article presents part of the results of a larger study that evaluates the conceptions of 203 student-teachers who have not yet begun their courses in didactics of arithmetic. We present the general conceptions about the meanings of addition and subtraction, and the relationship between the two, arising from the joint analysis of the knowledge of the different aspects evaluated. The results suggest that future teachers begin their training with inadequate additive knowledge, evidenced in stereotyped and / or erroneous conceptions about the meanings of addition and subtraction, as well as the relationship between these operations.

Keywords: conceptions, addition and subtraction, relationship addition and subtraction, teacher education.

INTRODUCCIÓN

Las concepciones, entendidas como el conjunto de representaciones internas evocadas por un concepto, describen la naturaleza de los objetos matemáticos y de las diferentes imágenes de éstos en la mente (Martínez y Gorgorió, 2004). Gómez (2010) señala que las concepciones que los estudiantes construyen de los diferentes conceptos matemáticos dependen de la aproximación o de los enfoques que la enseñanza pone a su alcance. En algunos casos, las concepciones llegan a constituir obstáculos para el aprendizaje en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Gómez (2010) señala que el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza, ayudando a determinar qué es lo que realmente se está aprendiendo, orientando sobre qué y cómo enseñar.

Los formadores de maestros necesitan ser conscientes de las concepciones que poseen sus estudiantes, y estar preparados para tomarlas como punto de partida para ayudarlos a desarrollar el conocimiento del contenido matemático (Thanheiser, 2009; 2010; Thanheiser, Browning, Lo, Kastberg y Edson, 2013). No obstante, tal y como señalan Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) sorprende la escasez de trabajos que se han centrado en estudiarlas. Si bien se han realizado algunos estudios que analizan las

concepciones que poseen los maestros en formación sobre algunos aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción, como por ejemplo la comprensión de las operaciones aritméticas (Chapman, 2007) o sobre la adición con varios dígitos (Thanheiser, 2009; 2010), coincidimos con Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) en que se requiere investigación adicional para entender mejor las concepciones que los estudiantes poseen cuando ingresan en nuestros programas de formación, y para comprender como estas se desarrollan.

En el contexto de la formación de maestros, al impartir las asignaturas de matemática y su didáctica, observamos en nuestros alumnos limitaciones en su pensamiento aditivo similares a las que se detalla en la literatura al respecto. En particular, en la comprensión del significado de estas operaciones evidenciado, entre otros aspectos, en el planteamiento de problemas aditivos en los que la palabra clave es indicador de la operación a realizar (Castro, Gorgorió y Prat, 2014b). El conocimiento sobre los significados y relaciones de las operaciones es un aspecto básico que el futuro maestro debe poseer (Cañadas y Castro, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004; Maza, 2001; entre otros). Esto motivó nuestro interés por profundizar en su estudio, incluyendo otras dimensiones del conocimiento del significado y la relación de estas operaciones. Considerando el potencial que tiene para la formación de maestros la identificación de las concepciones que los futuros maestros poseen sobre un determinado concepto, en este estudio analizamos las concepciones de 203 estudiantes para maestro sobre los significados y la relación de la adición y la sustracción. Para, sobre la base de dicho análisis, generar perfiles de concepciones acerca de la adición y la sustracción.

SIGNIFICADOS Y RELACIÓN DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN

La adición y la sustracción pueden tomar diversos significados. Una primera distinción considera el significado basado en la acción realizada por una persona en una situación dada y su significado como objeto matemático. El significado basado en la acción, sobre un número o un objeto inicial, puede tener una concepción unitaria y una binaria: a) concepción unitaria si hay una cantidad inicial que experimenta un cambio cuando se le añade o se le quita una segunda cantidad; o b) concepción binaria si hay dos cantidades iniciales que se unen o combinan para obtener un resultado. En el lenguaje matemático formal, encontramos diferentes tipos de definiciones para la adición y la sustracción de números naturales. Entre las más utilizadas están las definiciones en base a las operaciones de unión y diferencia de conjuntos, los axiomas de Peano y los desplazamientos en la recta numérica (e.g. Baroody y Ginsburg, 1986; Cañadas y Castro, 2011; Cid, Godino y Batanero, 2004; Maza, 2001; entre otros).

La variedad de significados que se dan a la adición y la sustracción puede ayudar a los niños a comprender la relación entre estas operaciones y sus propiedades básicas, preparándolos para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2004). No obstante, sus fundamentos matemáticos no siempre están presentes en las definiciones de suma y resta como, por ejemplo, las que aparecen en algunos los libros de texto. En estos, las definiciones de suma y resta tienden a ser simplificadas usando verbos de acción como aumentar, añadir y unir para el caso de la suma, y quitar o disminuir para la resta, dificultando que el alumno pueda inferir sus propias estrategias para realizar estas operaciones (e.g. Broitman, 1999; Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Por otra parte, no se pueden englobar todos los problemas aditivos dentro de estas acciones, existiendo diferentes tipos de problemas en los que agregar y quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar (e.g. Vicente, Orrantia y Verschafel, 2008). Nesher (1999) propuso un esquema del desarrollo del conocimiento aritmético en los niños, subyacente a la resolución de los diferentes tipos de problemas aditivos. En este modelo, el éxito en la resolución de problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o aumentando, o los de combinación en los que la incógnita está en la cantidad final, no requieren de un conocimiento aritmético avanzado que requiera la comprensión de estas operaciones como procedimientos distintos. Mientras que los problemas en los que agregar y quitar no necesariamente llevan a la acción de sumar o restar, como algunos problemas de igualación o comparación, requieren un conocimiento más profundo de estas operaciones, exigiendo de la comprensión de la conexión entre la suma y la resta, igualdades y desigualdades.

El planteamiento y la resolución de problemas aditivos han sido utilizados para analizar el conocimiento sobre los significados de la adición y la sustracción. Chapman (2007) analizó la comprensión de las operaciones aritméticas en 20 estudiantes para maestro que, hasta ese momento, no habían trabajado de manera específica los significados de las operaciones y problemas aritméticos. Sus resultados sugieren que el conocimiento inicial de los alumnos era inadecuado para enseñar las operaciones aritméticas con profundidad puesto que estaba basado en la comprensión procesal de las estructuras matemáticas y semánticas del problema, al centrarse por ejemplo en las palabras indicadoras aisladas y descontextualizadas de operaciones con un significado similar. Castro, Gorgorió y Prat (2014a) implementaron una secuencia de formación con 78 estudiantes para maestro que iniciaban sus estudios en didáctica de la aritmética. Tenía como objetivo que los futuros maestros descubriesen que plantear problemas aditivos va más allá de enunciar situaciones que contengan los verbos “añadir” o “juntar” para la suma y “quitar” o “separar” para la resta. Sus resultados sugieren que al inicio de la secuencia los estudiantes basaban la formulación de sus enunciados en palabras clave como indicador de la operación a realizar, y rechazaban la idea de la utilización de este tipo de palabras con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. No obstante, al finalizar la secuencia, los problemas propuestos por los alumnos presentaron un mayor número de estructuras aditivas, y el uso de palabras clave como indicador de la operación a realizar disminuyó considerablemente.

EL ESTUDIO

El presente estudio es de tipo cualitativo descriptivo y se aborda desde una perspectiva interpretativa. Se enmarca dentro de la investigación cualitativa orientada a la comprensión, teniendo como objetivo describir, analizar, comprender e interpretar la realidad particular (Bisquerra, 2009) de los estudiantes del Grado de Educación Primaria al inicio de su formación. Participan 203 estudiantes de primer y segundo año del GEP de una Universidad pública española que aún no habían cursado la primera asignatura en que se trabaja de manera específica el pensamiento aditivo.

El proceso de análisis de los datos tiene rasgos de la teoría Emergente de Datos - Grounded Theory- (Trinidad, Carrero y Soriano, 2006). Los instrumentos de análisis, emergen del trabajo con los datos, la organización y el análisis de las respuestas que los alumnos dan a las tareas propuestas, por lo que el análisis y los resultados obtenidos en este estudio se presentan de manera conjunta.

Instrumento y recogida de datos

Los datos que aquí presentamos, forman parte de un estudio más amplio que tiene como objetivo establecer perfiles de conocimiento aditivo. Para ello, se elaboró y aplicó un cuestionario que recoge diferentes aspectos matemáticos fundamentales relacionados con el pensamiento aditivo, que emergen de la revisión teórica sobre las investigaciones que analizan el conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas (ver Castro, Prat y Gorgorió, 2016).

Las preguntas del cuestionario fueron validadas por expertos y se distribuyeron estratégicamente antes de fijar su versión final, incluyéndose de manera intercalada preguntas de distintos bloques temáticos. El cuestionario contenía preguntas referidas a contenidos distintos que se complementan entre sí, con la intención de triangular las respuestas de los alumnos y así descartar una incorrecta interpretación de las respuestas obtenidas.

Los alumnos del estudio respondieron el cuestionario en una sesión de la asignatura *Didáctica de las matemáticas* que es la primera asignatura de los estudios del Grado de Educación Primaria, en la que se trabaja específica el pensamiento aditivo. El cuestionario fue administrado en la sesión previa al inicio de la didáctica de la aritmética, en presencia del profesor que dictaba la asignatura. Los alumnos disponían de 1 hora para responder individualmente el cuestionario. No se permitía el uso de calculadora y los alumnos debían realizar todos los cálculos en el propio cuestionario con la finalidad de recoger al máximo la riqueza de sus respuestas. Durante su administración sólo se respondieron por

parte del investigador preguntas que no eran de contenido matemático. Al final de la sesión, por petición de los profesores que dictaban la asignatura, se les entregó una copia del cuestionario para discutir con los alumnos las dificultades a las que se enfrentaron durante su aplicación.

| Pregunta | Aspecto a evaluar |
|---|--|
| 1) Explica qué entiendes por: a) Sumar b) Restar | (<i>Principal</i>) Significados de la adición y la sustracción (<i>Secundario</i>) Relación entre la adición y la sustracción |
| 2) ¿Cuál o cuáles de los siguientes verbos asocias con sumar? Organiza los verbos según el criterio del cuadro. a) Juntar b) Recibir c) Agregar d) Combinar e) Unir f) Obtener g) Ganar g) Aumentar h) Incrementar i) Añadir Verbos que asocias claramente con suma. Verbos que no asocias con la suma Verbos que pueden ser de suma. | (<i>Principal</i>) Concepciones de la adición basadas en la acción (<i>Secundario</i>) Uso de palabras clave |
| 3) Utilizando sólo números naturales, elabora: a) dos problemas de suma, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí. b) dos problemas de resta, cada uno de los cuales se resuelva con una única operación y que sean distintos entre sí. | (<i>Principal</i>) Significados y relaciones de la adición y la sustracción (<i>Secundario</i>) Uso de palabras clave |
| 4) ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de suma con la palabra menos? ¿Por qué? Da un ejemplo. | (<i>Principal</i>) Relación de la adición y la sustracción |
| 5) ¿Es posible redactar el enunciado de un problema de resta con la palabra añadir? ¿Por qué? Da un ejemplo. | (<i>Secundario</i>) Uso de palabras clave |

Tabla 1. Preguntas que evalúan los significados de la adición y la sustracción y la relación entre ambas

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Concepciones de los futuros maestros sobre los significados de la adición y la sustracción y la relación entre ambas

Para determinar las concepciones sobre estas operaciones de los alumnos de este estudio, se analizan las respuestas y las justificaciones que éstos dan a las preguntas del cuestionario bajo un enfoque cualitativo desde una perspectiva interpretativa. Los instrumentos de análisis emergen del trabajo con los datos, a partir de la organización y el análisis de las respuestas que los alumnos dan a las tareas propuestas.

El proceso de análisis se desarrolla en dos fases. En una primera fase, se realiza un análisis pregunta a pregunta. Para ello, se recogen en una planilla Excel las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las 5 preguntas y se analizan las explicaciones y, cuando corresponde, se analizan también los enun-

ciados que los alumnos dan a las tareas propuestas. Seguidamente se identifican las concepciones emergentes sobre el conocimiento de los distintos aspectos evaluados en los que se centra cada pregunta. En una segunda fase, se realiza un análisis relacional de las 5 preguntas en conjunto del cual emergen las concepciones de los alumnos en relación a la adición y la sustracción. Para ello, se recogen las concepciones emergentes en los distintos aspectos del conocimiento de la adición y la sustracción evaluados en cada pregunta. Seguidamente, se organizan en una planilla Excel las distintas concepciones que emergen en cada una de las preguntas recogidas por alumno y se recogen el número de alumnos que se sitúa en cada uno de los tipos de concepciones que emergen de los distintos aspectos evaluados. Finalmente, se realiza un análisis en conjunto de los distintos tipos de concepciones emergentes en cada una de las preguntas y se establecen concepciones generales sobre los significados y la relación de la adición y la sustracción que muestran los alumnos en base a todos los aspectos evaluados.

El análisis realizado sugiere que podemos identificar 5 tipos de concepciones sobre los significados y la relación de la suma y la resta, dependiendo de si estas operaciones son interpretadas como procedimientos distintos o si se establece una conexión entre ambas.

La suma y la resta como procedimientos distintos

Concepciones esencialmente basadas en la acción: cambio de estado unitario para la suma y la resta / binario para la suma

Un 70.9% de los alumnos encuestados (144 de 203) evidencia una concepción de suma y la resta que tiene un significado esencialmente basado en la acción, en la que estas operaciones se interpretan como procedimientos distintos. Estos alumnos no proponen problemas aditivos que involucren el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo más allá de los problemas de combinación con incógnita en el todo, como las estructuras de igualación, comparación y combinación con incógnita en una parte del todo. Tampoco incluyen en sus definiciones para el caso de la resta la idea de complemento. En su mayoría asocian claramente la suma con al menos uno de los verbos que suelen asociarse con palabras clave para la suma, como ganar, obtener y/o conseguir; y construyen enunciados basados en el uso de palabras clave como indicador de la operación a realizar. En concreto, vemos que:

- El 15.3% de estos alumnos evidencia sólo una concepción unitaria de estas operaciones, basada en las acciones de añadir y quitar. Estos alumnos sólo interpretan la suma y la resta como añadir y quitar, números, cifras, cantidades, elementos, un objeto inicial o no especificando qué (*“Sumar es añadir números”*). Asocian la suma de manera clara sólo con verbos que implican un cambio de estado como añadir, incrementar o aumentar, y en ocasiones con algunos verbos que son asociados con palabras clave para la suma, como los verbos regalar, obtener y/o conseguir. No creen o no están seguros de que verbos que implican una combinación o unión de elementos sean de suma. Proponen problemas aditivos que sólo involucran un cambio de estado, aumentando o disminuyendo, del tipo: *“María tiene 5 lápices, pero pierde 3, ¿cuántos lápices tiene ahora?”*, en los que la palabra clave siempre es indicador de la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, proponen realizar más de una operación; utilizar estas palabras sin relevancia para la suma/resta (*“Porque puedes restar y posteriormente sumar”*); o señalan que no es recomendable pues resultaría confuso para los alumnos (*“Porque menos ya hace referencia a restar. Para crear un problema debes utilizar palabras apropiadas y que no confundan a los niños”*); que no es posible (*“No se puede porque en una resta no tiene lugar la acción de añadir”*); no respondiendo claramente la pregunta (*“Según como se plantee”*); señalando que no saben cómo hacerlo; o no contestan. 4 alumnos evidencian en sus explicaciones sobre lo que entienden por sumar y restar un significado distinto, basado en la noción de contar hacia delante y hacia atrás (*“Sumar es hacer el recuento del total de los números que haya”*), o de la suma y la resta como operación (*“Operación matemática en la que le sacas x a y ”*).

- El 81.9% de los alumnos restantes (118) incluye la idea de unión o combinación para el caso de la suma, en sus explicaciones sobre lo que es sumar (“*Sumar es poner juntos los números para conseguir un total*”), en sus elecciones para los verbos que asocian o no, claramente con suma y/o los PAEV aditivos que proponen (“*Mi madre tiene 35 años y yo 8, ¿cuántos tenemos entre las dos?*”). 15 de los alumnos que conforman este grupo incluyen en sus explicaciones sobre lo que entienden por sumar y restar un significado distinto al basado en la acción. 1 alumno incluye la noción de contar hacia delante y hacia atrás (“*Restar es contar en negativo de número mayor a una menor*”), otro como distancia (“*Restar es saber que distancia hay entre dos números*”), mientras que los 13 alumnos restantes como operación (“*La suma es la operación que consiste en obtener un resultado superior a los números que tenemos para operar*”).

Conexiones entre la suma y la resta

Concepciones basadas en la acción: conexiones parciales o incompletas

Un 26.1% de los alumnos evidencia una concepción de la suma y la resta basada esencialmente en la acción, en la que se establecen relaciones parciales o incompletas entre ambas operaciones.

Conexiones parciales

En concreto vemos que de los 39 alumnos que establecen conexiones parciales:

- 18 de ellos evidencian el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo al proponer problemas aditivos con estructuras de igualación, comparación, combinación con incógnita en una parte o cambio con incógnita en el cambio, en las que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar (“*Elisa tiene 4 años menos que su hermano que tiene 18. ¿Cuántos años tiene Elisa?*”). No obstante, sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar se basan en las acciones de añadir y quitar, y sus argumentos ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos, y uno de resta con el verbo añadir, evidencian el manejo de conceptos erróneos y su interpretación como procesos distintos, señalando por ejemplo que: “*Añadir implica automáticamente una suma, no una resta*”, o que no debe hacerse pues es muy confuso y puede confundir a los alumnos (“*No es adecuado porque si el resultado es una suma y añadimos, el menos puede crear confusión y no saber lo que piden*”).
- 4 alumnos consideran que existe una conexión entre la suma y la resta al interpretarlas en base a las acciones de añadir, unir, quitar y la idea de comparar (“*Restar es quitar, hacer la diferencia entre dos números*”). No obstante, sus elecciones de los verbos que asocian con suma, los problemas aditivos que proponen, y la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al lenguaje natural sugieren una interpretación de las operaciones como procedimientos independientes. Estos alumnos asocian claramente la suma sólo con aquellos verbos que implican un cambio de estado y al menos uno de los verbos ganar, obtener y/o recibir. Son alumnos que proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado y/o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final, en los que los indicios verbales siempre coinciden con la operación a realizar. Ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, proponen su utilización sin relevancia para la suma/resta o señalan que enunciados de este tipo no son recomendables al resultar confusos para quien resuelve el problema (“*Porque puedes usar esa palabra y que sea irrelevante para el problema*”, “*podemos hacer equivocar al alumno*”).
- Los 17 alumnos restantes no evidencian el uso de distintas relaciones del tipo parte-parte-todo para la suma y la resta en los problemas aditivos que proponen ni tampoco lo hacen en sus explicaciones sobre qué entienden por sumar o restar. Estos sólo proponen problemas que involucran un cambio de estado de aumento o disminución, y una combinación de elementos en los que la incógnita está en el todo, siendo en todos los casos la palabra clave indicador de la

operación a realizar. Sus explicaciones sobre que entienden por sumar o restar muestran una interpretación en base a las acciones de añadir y/o juntar para la suma, quitar para la resta y en base a verbos como ganar, recibir, obtener y/o dar y perder. Sólo una de las explicaciones dadas sobre la posibilidad de realizar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir evidencia el manejo de alguna relación del tipo parte-parte-todo más allá de la combinación con la incógnita en la cantidad final (*“En un problema en el que sepas en resultado e insinuemos que era menor que antes dando uno de los sumandos”*). En general, las explicaciones y los ejemplos que proponen para el uso del verbo añadir o la palabra menos implican su utilización como palabra clave para la operación a realizar incluyendo más de una operación, o su utilización como información complementaria, sin que afecte la resolución del problema (*“Puedes hacer una resta y luego que haya que sumar”, “Oscar tiene 8 caramelos menos que Álvaro que tiene 20, es decir 12. ¿Cuántos caramelos tienen en total?”*).

Conexiones incompletas

De los 14 alumnos que establecen una relación incompleta entre estas operaciones:

- 7 muestran el uso de relaciones basadas en un esquema parte-parte-todo para la suma y la resta en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, mostrando una concepción binaria y/o unitaria de estas operaciones (*“Juntar, agregar cosas a algo que ya había”, “Separar una parte de un todo”*). Además, 5 de ellos refuerzan esta concepción en las explicaciones que dan cuando se les pregunta acerca de la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir, estableciendo alguna relación del tipo parte-parte-todo (*“Se puede pedir una comparación”*), aunque muestran una interpretación de la suma y la resta como procedimientos distintos en todos los aspectos restantes (*“Porque cuando sumas estas añadiendo, no quitando”*). Los 2 alumnos restantes, muestran el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo tanto en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar como en los problemas aditivos que proponen. No obstante, sus elecciones para los verbos que asocian con sumar, junto con la valoración que hacen sobre el uso de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye el lenguaje natural, sugieren que interpretan las dos operaciones como procedimientos distintos. Estos alumnos asocian sumar de manera clara sólo con los verbos que implican un cambio de estado aumentando y alguno de los verbos regalar, obtener y conseguir. Proponen utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta utilizándolas como palabras clave para la operación a realizar haciendo más de una operación (*“María tiene 3 juguetes en su habitación. Pablo le quita 2 y los añade a su habitación. ¿Cuántos juguetes le quedan a María?”*).
- Los 7 alumnos restantes establecen una conexión entre estas operaciones en las explicaciones que dan ante la posibilidad de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y uno de resta con el verbo añadir (*“Cuando hacemos una resta obtenemos la diferencia que hay entre dos números, es decir la cantidad que hay que añadir al menor para obtener el mayor”*). No obstante, proponen problemas que sólo involucran un cambio de estado añadiendo o quitando, o una combinación con la incógnita en la cantidad final. En sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, y en los verbos que asocian claramente con suma, sólo evidencian una interpretación basada en la acción unitaria para ambas operaciones.

Concepciones basadas en la acción: conexiones completas

Un 3% de alumnos que participa en este estudio evidencia una concepción de la suma y la resta esencialmente basada en la acción, en la que se establece una relación entre estas operaciones. Vemos que:

- 4 de los 6 alumnos que conforman este grupo muestran el uso de un esquema parte-parte-todo, tanto en los problemas aditivos que proponen, que involucran el uso de estructuras de cambio, combinación y comparación, como también en las explicaciones que dan ante la posibilidad

de redactar un enunciado de suma con la palabra menos y un enunciado de resta con el verbo añadir. Proponen enunciados que involucran diferentes estructuras aditivas, en las que la palabra clave no siempre es indicador de la operación a realizar (*“Necesito 80 folios y tengo 43 en clase, ¿cuántos tendré que comprar?”*). Ante la posibilidad de redactar enunciados de suma con la palabra menos y de resta con el verbo añadir sus argumentos se basan en el uso flexible de un esquema parte-parte-todo (*“En una resta puedes quitar al total o bien puedes partir del total y una cantidad que añadida a otra y no sabemos lo que resulta en ese total. Para descubrirla debemos restarle al total la cantidad que sabemos”*). En cambio, sus explicaciones acerca de lo que entienden por sumar y restar evidencian una interpretación que puede reflejar una concepción unitaria para ambas; unitaria para la suma y la resta, y binaria para la suma; binaria para ambas; o, su interpretación como operaciones matemáticas.

- Los 2 alumnos restantes evidencian el uso de relaciones del tipo parte-parte-todo en una o ambas de las explicaciones que dan ante la posibilidad de utilizar la palabra menos en un enunciado de suma y el verbo añadir en uno de resta, y/o en sus explicaciones sobre lo que es sumar y restar, en las que se evidencia una interpretación basada en la acción unitaria y binaria para la suma y la resta y los problemas aditivos que proponen (*“Lo planteas como cuantas unidades hay que añadir para que te de un número”, “Manuel tiene 6 cromos y Alba 10. ¿Cuántos cromos tiene que Añadir Manuel a su colección para tener los mimos que Alba?”*).

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en este estudio confirman el bajo desempeño evidenciado por los estudiantes para maestro en estudios similares (Chapman, 2007; Thanheiser, 2009; 2010; entre otros). Vemos que los futuros maestros inician su formación con un conocimiento aditivo inadecuado, evidenciado en concepciones estereotipadas y/o erróneas sobre los significados de la suma y la resta, así como de la relación entre estas operaciones. La mayoría de los estudiantes para maestro parecen interpretar estas operaciones como procedimientos distintos, reduciendo su significado a las acciones de añadir, unir y/o juntar para el caso de la suma y quitar para el caso de la resta. En la mayoría de los casos, estas operaciones también son definidas o asociadas claramente a acciones como, dar, recibir, ganar, obtener y/o perder, entre otras. Otras interpretaciones de ambas operaciones como pueden ser, la de la suma y la resta basada en los desplazamientos en la recta numérica, su interpretación en base a la noción de contar hacia adelante y hacia atrás, o la resta como sumando desconocido, son casi inexistentes.

La concepción estereotipada de la suma y la resta, y su interpretación como procedimientos distintos, se ven reflejadas entre otros aspectos en los problemas aditivos que proponen. Siendo problemas que esencialmente involucran un cambio de estado aumentando o disminuyendo, o una combinación de elementos con incógnita en la cantidad final. En muy pocas ocasiones involucran estructuras aditivas que requieran la utilización de relaciones del tipo parte-parte-todo para su resolución, así como la utilización de palabras clave con un significado matemático opuesto al que le atribuye la semántica del lenguaje natural. Cabe destacar que las concepciones erróneas evidenciadas por los futuros maestros de este estudio, como que restar nunca implica añadir, o que el tipo de palabras utilizadas en los problemas aditivos que se proponen a los alumnos siempre deben corresponderse con la operación a realizar, pueden tener repercusiones didácticas importantes. Exponer a los alumnos a un mismo tipo de problemas aditivos centrado en el uso de indicios verbales como indicador de la operación a realizar limita su desarrollo del cálculo relacional y los centra en el aprendizaje del cálculo numérico (Vergnaud, 1991).

Finalmente, cabe señalar que los resultados obtenidos en este estudio ofrecen una aproximación a los alumnos con los que se espera trabajar las matemáticas y su didáctica. La diversidad de perfiles identificados sugiere distintos grados de conocimiento e ideas preconcebidas sobre estos conceptos que deben considerarse en el momento de planificar las asignaturas de matemáticas y su didáctica. En esta dirección autores como Thanheiser, Whitacre y Roy (2014) señalan que las concepciones que poseen

los estudiantes para maestro sobre los conceptos matemáticos pueden ayudar a los formadores de maestros a desarrollar el conocimiento matemático del contenido. Así pues, tal y como apuntan estos autores, tareas como las diseñadas y utilizadas en este estudio son un instrumento que pueden contribuir a que los formadores de maestros puedan: (i) determinar las concepciones iniciales que poseen los estudiantes para maestro, (ii) planificar en base a concepciones sus cursos, y (iii) pensar y prever como estas concepciones se pueden desarrollar con el tiempo. En este sentido, la diversidad de concepciones descritas en este estudio puede ayudar a los formadores de maestros a poner énfasis en los errores e ideas incompletas que tienen los futuros maestros en relación a los significados de la suma y la resta, así como acerca de la relación entre ambas operaciones, pudiendo planificar qué estrategia resulta más adecuada para ayudarles a construir un conocimiento sólido del contenido para la enseñanza de las matemáticas en el aula de primaria.

Referencias

- Baroody, A. y Ginsburg, P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp.75-112). Hillsdale. NJ: Lawrence Associates.
- Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Broitman, C. (1999). Sumar no es siempre agregar ni restar es siempre quitar. En *Las operaciones en el primer ciclo* (pp. 9 – 21). Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas
- Cañadas, M.C. y Castro E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.
- Cid, E., Godino, J.D. y Batanero, C. (2004). Didáctica de los sistemas de numéricos para maestros. Adición y sustracción; Multiplicación y división. En Godino (coord.). *Didáctica para Maestros* (pp.187-219). Proyecto Edumat-Maestros.Granada: ReproDigital.
- Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014a). Una secuencia de formación para maestros: reflexionado acerca de los PAEV aditivos de una etapa. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 28*. (pp. 1475-1482). Barranquilla: RELME.
- Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014b). Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 217-226). Salamanca: SEIEM.
- Castro, A., Prat, M. y Gorgorió, N. (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. *Revista de Educación, 374*, 43-68.
- Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 341–349.
- Godino, J. D., Font V. y Wilhelmi, M., R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial*, pp. 131-155.
- Gómez, A. (2010). Concepciones de los números decimales. *Revista de Investigación en Educación, 8*, 97-107.
- Martínez, M. y Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6* (1). Consultado el 10 de febrero de 2015 en: <http://redie.uabc.mx/vol6no1/contenido-silva.html>
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. Estructura multiplicativa. En Castro E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 177-200). Madrid: Síntesis.
- Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma, 31*, 19-26.

- Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in mathematics Education*, 40(3), 251-281.
- Thanheiser, E. (2010). Investigating further preservice teachers' conceptions of multidigit whole numbers: refining a framework. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 241-251.
- Thanheiser, E., Browning, C. A., Lo, J. J., Kastberg, S. y Edson, A. J. (2013). Building a knowledge base: Understanding prospective elementary school teachers' mathematical content knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved from <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/thanheiser.pdf>.
- Thanheiser, E., Whitacre, I. y Roy, G. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Whole-Number Concepts and Operations. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2). Available at: <http://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss2/4>
- Trinidad, A., Carrero, V. y Soriano, R. M. (2006). *Teoría fundamentada «Grounded Theory». La construcción de la teoría a través del análisis interpretacional*. Madrid: CIS.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.
- Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje*, 31(4), 463-483.