ESTUDIO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PRODUCIDOS POR ALUMNOS DE ENSEÑANZA OBLIGATORIA AL RESOLVER UN PROBLEMA DE FERMI

Study of Mathematical models developed by mandatory school students while solving a Fermi problem

Albarracín, L.[a], Ferrando, I.[b] y Boliart, J.[c]

[a]Professor Serra Húnter, Universitat Autònoma de Barcelona, [b]Universitat de València, [c]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este artículo presentamos un estudio de tipo cualitativo dirigido a analizar la evolución de los modelos matemáticos que desarrollan alumnos de 8 a 16 años para resolver un problema de Fermi en el que deben estimar el número de personas que caben en el patio de su centro educativo. Los resultados muestran las estrategias de resolución desarrolladas basadas en modelos matemáticos emergentes que elaboran los alumnos en cada etapa educativa y las dificultades al enfrentarse a contenidos matemáticos como el área o las magnitudes intensivas.

Palabras clave: *modelización, problemas de estimación, medida de magnitudes.*

Abstract

In this article we present a qualitative that analyzes the evolution of the mathematical models that students from 8 to 16 years develop to solve a Fermi problem. The objective of the problem is to estimate the number of people that fit in the courtyard of their educational center. The results show the strategies based on emerging mathematical models developed by the students in each educational stage and the difficulties in dealing with mathematical contents such as area or intensive magnitudes.

Keywords: *modelling, estimation problems, magnitudes measurement.*

INTRODUCCIÓN

Desde el ICMI 14 (Blum, 2002) se ha desarrollado un movimiento dentro de la Didáctica de las Matemáticas con la principal idea de llevar a las aulas actividades que muestren la fuerte relación que existe entre las Matemáticas y el mundo que nos rodea. En este sentido se ha desarrollado el área de interés hacia la modelización matemática. En el caso concreto de España, los currículos han incluido recientemente (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre) de forma explícita la práctica de procesos de matematización y modelización, tanto en contextos de la realidad como en contextos propiamente matemáticos. Este contexto nos mueve a estudiar las posibilidades de los alumnos las etapas obligatorias para generar modelos matemáticos por ellos mismos con el propósito a largo plazo de diseñar actividades que permitan trabajar en las aulas los procesos de modelización.

En investigaciones previas se han utilizado los denominados problemas de Fermi como un tipo de actividades que permiten introducir la modelización matemática en las aulas de Educación Primaria y Secundaria (Peter-Koop, 2004; Ärlebäck, 2009). Los problemas de Fermi son una propuesta de actividades de aula que permite a los alumnos desarrollar sus propias estrategias de resolución de problemas a partir de plantearles preguntas sobre aspectos de la vida real en las que no se ofrece demasiada información

Albarracín, L., Ferrando, I. y Boliart, J. (2017). Estudio de los modelos matemáticos producidos por alumnos de enseñanza obligatoria al resolver un problema de Fermi. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 109-118). Zaragoza: SEIEM.

sobre los fenómenos a estudiar. Provienen de una larga tradición de la enseñanza de la Física a nivel universitario (Robinson, 2008), pero en los últimos tiempos han sido propuestos en otros ámbitos educativos, como para promover el pensamiento matemático (Sriraman y Knott, 2009). Hasta el momento, las investigaciones que utilizan problemas de Fermi son escasas, pero estas han mostrado potencial para desarrollar el razonamiento matemático de los alumnos en diferentes niveles educativos. En este trabajo presentamos un estudio de tipo exploratorio y nos centramos en estudiar los modelos que generan los alumnos de diferentes niveles educativos a un mismo problema, para identificar los conceptos matemáticos que los soportan los modelos matemáticos desarrollados por alumnos de diferentes edades.

MARCO TEÓRICO

Modelización matemática

Las actividades de modelización matemática son aquellas en las que los alumnos deben estudiar un fenómeno real utilizando conceptos y procedimientos matemáticos. El componente principal de estas actividades es que los alumnos creen o generen modelos que se puedan aplicar a la realidad o contexto dados y que, además, estos modelos y las soluciones que se extraen de ellos se puedan generalizar e interpretar en otros contextos (Doerr y English, 2003). En la literatura existe una gran discusión sobre el uso de la modelización matemática en las aulas y se pueden encontrar diferentes posiciones respecto a la naturaleza de los procesos de modelización. Aunque existen diversas formas de concretar la estructura de estos procesos, se entiende que se puede dividir en diferentes fases y que los alumnos las recorren ordenadamente, superando una fase cuando consideran que el trabajo en esa fase se ha cerrado satisfactoriamente (Blum y Leiss, 2007).

En este trabajo no pretendemos caracterizar el proceso de modelización desarrollado por los alumnos y nos centramos en el análisis de los modelos generados durante la resolución de un problema de Fermi. En concreto, utilizamos la siguiente definición de modelo matemático propuesta por Lesh y Harel (2003) que nos debe permitir identificar modelos en las producciones de los alumnos:

> Models are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
>
> Models include both: (a) a conceptual system for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) accompanying procedures for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals. (pág. 159)

Con esta perspectiva, entendemos que un modelo matemático es un constructo en lo que podemos identificar dos tipos de elementos, los conceptuales y los procedimentales, dirigidos a describir un sistema -generalmente complejo- y que serán expresados utilizando diversos tipos de lenguajes.

Problemas de Fermi para introducir la modelización matemática

Los problemas de Fermi son un ejemplo de este tipo de situaciones en las que el punto de partida para obtener el resultado de un problema es una estimación que requiere de la creación de un modelo matemático que simplifique el fenómeno estudiado. Ärlebäck (2009) define los problemas de Fermi como “open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (p. 331)”. En concreto, Ärlebäck (2009) entiende que este tipo de problemas son abiertos en el sentido que no están asociados a una estrategia de resolución conocida por los alumnos o a unos procedimientos concretos, exigiendo a los alumnos a invocar construcciones, concepciones o experiencias previas. Los problemas de Fermi a menudo tienen enunciados con una formulación que proporciona escasa información, sin embargo, al analizarlos en detalle, se pueden descomponer en sub-problemas más sencillos para dar respuesta a la pregunta original. La necesidad de determinar los factores más relevantes del fenómeno estudiado para resolver un problema de Fermi conecta con los aspectos estudiados en el ámbito de la Modelización Matemática. Desde esta perspectiva, Ärlebäck (2011) afirma que los problemas de Fermi son útiles para introducir la modelización matemática en las aulas ya que son accesibles para alumnos de niveles diversos y, en muchas ocasiones, no requieren conocimientos matemáticos profundos por lo que promueven que los estudiantes definan la estructura del problema identificando la información relevante.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de los problemas de Fermi como herramientas para promover la modelización consta de un pequeño número de investigaciones que permiten establecer una base de conocimiento sobre el que fundamentamos nuestro trabajo y que repasamos a continuación.

Peter-Koop (2004) utilizó los problemas de Fermi con alumnos de 9 y 10 años para investigar las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes. Su estudio muestra que los alumnos de estas edades pueden enfrentarse los problemas planteados dando significado a las soluciones obtenidas. Por su parte, Ärlebäck (2009) ha estudiado la forma en la que los alumnos de Educación Secundaria resuelven problemas de Fermi. En concreto, este autor ha observado que los alumnos utilizan mucha información de tipo extra-matemático tanto para realizar las estimaciones correspondientes como para validar los resultados obtenidos.

A partir de las propuestas pioneras de Peter-Koop (2004) y Ärlebäck (2009) respecto al estudio de los procesos de modelización al resolver problemas de Fermi, se han desarrollado diversas investigaciones para estudiar las posibilidades de utilizarlos como herramienta para introducir la modelización en las aulas de Primaria y Secundaria en el contexto educativo español. Para ello se han utilizado problemas en los que deben estimarse grandes cantidades (PEGC), como sub-clase de los problemas de Fermi, ya que por su naturaleza fuerzan a los alumnos a generar procesos matemáticos para resolverlos al no poder efectuar recuentos exhaustivos. En estudios previos (Albarracín y Gorgorió, 2013) se han identificado diferentes estrategias de resolución en PEGC planteados a los alumnos de Educación Secundaria. Algunas de estas estrategias no les permiten resolver el problema por ellos mismos, pero otras contienen los elementos necesarios para dar respuesta efectiva a las preguntas formuladas y lo hacen a partir de desarrollar modelos matemáticos. Las principales estrategias identificadas en estos estudios se listan a continuación:

- Recuento exhaustivo: el estudiante sugiere que la resolución se basa en el recuento exhaustivo.
- Fuente externa: el estudiante sugiere que la solución debe ser aportada mediante una fuente externa que conozca los datos exactos para resolver el problema.
- Densidad: el estudiante basa su resolución en la densidad, hallando el número de elementos que ocupan un área determinada y obtiene el resultado multiplicando densidad por área total.
- Iteración de la unidad: el estudiante parte de la superficie ocupada por uno o varios elementos y, a partir del área total, obtiene el resultado mediante una división.
- Distribución en cuadrícula: el estudiante simula que los elementos están distribuidos en filas y columnas y, de esa forma, estima el número total usando la regla del producto.

Al trabajar en la resolución de los problemas de estimación del número de elementos en un área acotada, los alumnos utilizan diversas formas para aproximarse a las soluciones requeridas y, al trabajar en grupo, desarrollan modelos matemáticos que les permiten explicar los fenómenos estudiados. Hemos observado diferencias en los conceptos que sustentan los modelos desarrollados por alumnos de 16 años y que cursan Educación Secundaria (Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi, y Gorgorió, 2017) de los que desarrollan los alumnos de Educación Primaria de entre 10 y 12 años (Albarracín, Lorente, Lopera, Pérez y Gorgorió, 2015). En este contexto surge la motivación de analizar con detalle los modelos que pueden desarrollar alumnos de entre 8 y 16 años al trabajar con PEGC para poder desarrollar actividades de aula que se ajusten con mayor precisión a los objetivos educativos de cada etapa y para entender la forma en la que los alumnos incorporan nuevos elementos a los modelos que desarrollan a medida que crecen y tienen mayores conocimientos tanto matemáticos como extra-matemáticos, especialmente con alumnos de menos de 10 años, para los que no existe en la literatura una base de conocimiento sobre sus competencias modelizadoras (Stohlman y Albarracín, 2016).

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Para Ärlebäck (2009), los problemas de Fermi como recurso didáctico destacan por su accesibilidad, en el sentido de que pueden ser resueltos por alumnos de diferentes edades y generando respuestas de diferente nivel de complejidad. Esta afirmación se basa en la experiencia de distintos profesores e investigadores a partir del uso de este tipo de problemas en las aulas, pero no existen estudios que la respalden ni disponemos del conocimiento concreto de cómo se concreta esa diferencia de complejidad. Por lo tanto, en este trabajo realizamos un estudio exploratorio de tipo cualitativo para identificar los modelos matemáticos que desarrollan los alumnos de diferentes edades para resolver el problema propuesto y concretar la forma en la que los problemas de Fermi son accesibles a alumnos de diferentes edades.

Así, el objetivo principal de este trabajo es determinar el tipo de modelos matemáticos emergentes (en el sentido desarrollado por Gravemeijer, 1999) que desarrollan alumnos de diferentes edades de las etapas obligatorias para resolver un problema de Fermi en el que se debe estimar el número de personas que caben en un espacio determinado. Para ello se diseña una actividad de aula ad hoc para recoger los informes que elaboran los alumnos y analizar los modelos matemáticos elaborados.

METODOLOGIA

Recogida de datos

La recogida de datos se realiza en una escuela de Educación Primaria (EP) y en un instituto de Educación Secundaria (ESO) de la misma localidad. Concretamente, hemos recogido datos del trabajo de aula de alumnos de los cursos de segundo, cuarto y sexto de Primaria y de segundo y cuarto de Secundaria, con lo que cubrimos el espectro de edades de los 8 a 16 años. En cada curso participan los alumnos de una clase que trabajan en grupos de 4 personas para resolver un problema en el que deben estimar el número de personas que caben en el patio del centro en el contexto de un concierto. La Tabla 1 se muestra el número de alumnos y equipos de trabajo por curso participantes en el estudio:

Tabla 1. Resumen de los participantes en la experiencia

Curso	Número de alumnos	Número de grupos
2º Primaria (8 años)	23	6
4º Primaria (10 años)	19	5
6º Primaria (12 años)	20	5
2º Secundaria (14 años)	20	5
4º Secundaria (16 años)	22	6
Total	102	27

El enunciado concreto del problema que se proporcionó a los alumnos es el siguiente:

> La escuela está preparando un concierto para celebrar el final de curso el día 22 de junio. Para hacerlo, necesita de tu ayuda para encontrar el espacio más adecuado para realizar el concierto. La opción prioritaria es el patio, pero no tenemos claro cuánta gente cabe. Por lo tanto, ¿cuánta gente crees que cabe en el patio?

La recogida de datos se realizó en una sesión de 90 minutos para cada uno de los cursos durante la cual el profesor de aula se limitó a dar las instrucciones sobre el desarrollo de la actividad y a aclarar aspectos relativos al enunciado. En primer lugar, se proporciona el enunciado del problema a los alumnos en el aula y se les permite discutir en pequeños grupos de 4 alumnos sus propuestas de resolución para, posteriormente, ir hasta el patio para tomar los datos que necesiten. Cuando han conseguido los datos necesarios, los alumnos vuelven al aula para resolver el problema y escribir los informes de resolución en los que se les pide que especifiquen los métodos utilizados y los resultados obtenidos. De esta forma, los datos con los que contamos para este estudio son los informes de resolución elaborados por los alumnos y las notas de campo recogidas durante el trabajo en el aula y el patio.

Análisis de datos

Para analizar los modelos emergentes generados por los alumnos durante la recogida de datos proponemos caracterizar cualitativamente los aspectos esenciales que los definen y que nos proporcionan una visión objetiva de la complejidad con la que estos modelos representan la situación estudiada. Siguiendo a Lesh y Harel (2003), consideramos que un modelo matemático incluye conceptos y procedimientos de forma interrelacionada, aunque los alumnos de estas etapas difícilmente explicitan los conceptos en los que basan sus resoluciones. Según Hiebert y Lefevre (1986), el conocimiento conceptual es una estructura de conocimiento (hechos y proposiciones) conectada en red, y el conocimiento procedimental se centra en los símbolos utilizados y las reglas o procedimientos para la resolución de problemas matemáticos. En nuestro análisis utilizamos los procedimientos descritos por los alumnos para interpretar los conceptos que soportan al modelo utilizado en la resolución del problema.

A continuación mostramos algunos ejemplos de las resoluciones analizadas que permiten ilustrar cómo hemos realizado el análisis y que, además, ilustra el vínculo entre los procedimientos descritos y los conceptos en los que se soportan los modelos. En la Figura 1 mostramos la resolución de un grupo de 4º de ESO.

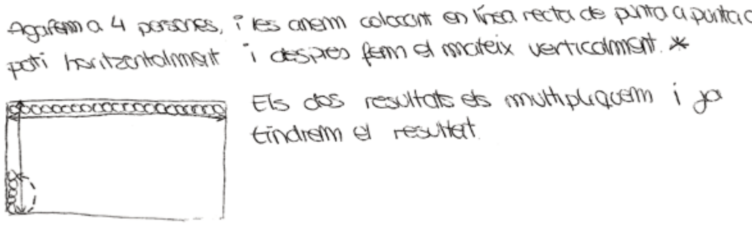

Fig. 1. Una propuesta para contar personas en el patio.
Los alumnos escriben: “Se coge a cuatro personas y se van colocando en línea recta de punta a punta del patio. Luego hacemos lo mismo verticalmente. Luego multiplicamos y obtenemos el resultado.”

Estos alumnos explicitan un procedimiento concreto para realizar la estimación a partir de colocarse en fila y contar para determinar cuántas personas son necesarias para llenar el patio en sus dos direcciones para acabar calculando el producto de estos dos valores. Los alumnos no dan información concreta en su informe escrito sobre ningún concepto aplicado, pero su producción permite inferir que los alumnos han estructurado la posición que puede tomar la gente en el patio siguiendo un patrón de distribución en cuadrícula, con lo que este es el concepto matemático sobre el que sostienen el modelo utilizado. Entendemos que estos alumnos no tratan la superficie del patio como un todo y, al contar el número de personas en filas y columnas, su aproximación a la respuesta pasa por un romper el problema inicial en dos sub-problemas unidimensionales. La distribución de personas elegida es el concepto que articula la resolución y que da sentido al procedimiento escogido. De esta forma entendemos que esta resolución se basa en la elaboración del modelo de distribución en cuadrícula, que ya se han identificado en estudios anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013; Albarracín et al., 2015; Ferrando et al., 2017) propuesto tanto por alumnos de Educación Primaria como Secundaria.

Entre las producciones analizadas se distinguen dos categorías principales. Por un lado, están los alumnos que razonan mediante dimensiones lineales o bien mediante un procedimiento basado en hacer el producto del número de personas en filas y columnas (tal y como se muestra en la Figura 1) o bien usando estrategias alternativas (como la mostrada en la Figura 2). Por otro lado están los alumnos que razonan a partir de la superficie usando dos modelos alternativos para efectuar recuentos de personas en superficies: el modelo de la densidad de población y el modelo de iteración de la unidad.

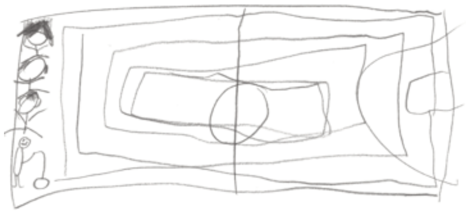

Fig. 2. Resolución de un grupo de 4º de EP

Además, hemos distinguido entre aquellos grupos que consiguen hallar la solución del problema y los que no. Para ello, hemos estudiado si los métodos utilizados y su implementación les permiten obtener estimaciones adecuadas para el valor solicitado. Por la naturaleza de los problemas de Fermi, entendemos que no existe un valor preciso que pueda ser considerado válido y que los valores que entendemos que son acertados deben serlo en el contexto concreto propuesto. Es por ello que, para determinar si el resultado final ofrece una estimación adecuada para el número de personas que caben en el patio durante un concierto, valoramos cada uno de los pasos y decisiones tomados durante la resolución.

En la Figura 3 mostramos la resolución de un grupo de 2ª de EP (8 años). A través de la resolución presentada observamos que el procedimiento se basa en contar el número de niños que caben en la pista horizontal y verticalmente con el objetivo de multiplicar ambos valores. En el informe no explicitaron método alguno, sino que se limitaron a observar que era necesario conocer las dimensiones de la pista, dato que no obtuvieron ni pretendieron utilizar al final. Todo lo que podemos encontrar en el informe de este grupo es el intento de multiplicar 45x118, tal y como se observa en la Fig. 3. Dado que los alumnos no conocen todavía los detalles del algoritmo de la multiplicación trataron, sin éxito, de sumar 45 veces el número 118. De esta forma, estos alumnos no consiguen ofrecer ningún resultado con lo que no obtienen una estimación adecuada, aunque los valores intermedios obtenidos concuerdan con las observaciones del resto de grupos.

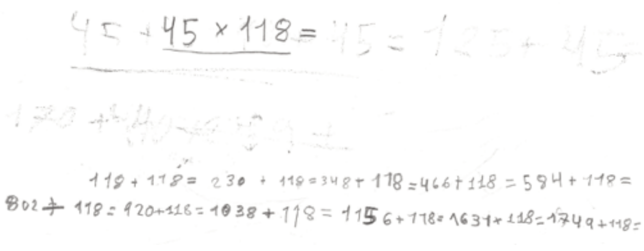

Fig. 3. Resolución de un grupo de 2º de EP

Otro grupo de 2ª de EP realiza un procedimiento similar, pero los valores obtenidos para el número de personas que llenan una fila horizontal o vertical son excesivos, ya que los valoran en 500 y 170, cuando las dimensiones reales del patio son de 41 y 21 metros. En este caso, los alumnos no tratan de multiplicar los valores obtenidos, sino que cometen un error conceptual y los suman, con lo que no están respondiendo adecuadamente a la pregunta. Es por ello que, aunque el procedimiento utilizado puede ser adecuado, hemos considerado que estos alumnos no han resuelto el problema.

En la Figura 4 mostramos la resolución de un grupo de 6º de EP (12 años), estos alumnos han medido las dimensiones de la pista y, una vez obtenidas, utilizando los metros como unidad, consideran que se pueden disponer 2 personas por cada metro lineal. Este grupo finaliza la resolución multiplicando correctamente los valores obtenidos. De esta forma el grupo 2 de 6º de EP (12 años) proporciona una solución que se sostiene en la corrección matemática de cada paso del procedimiento y de la adecuación de las mediciones y consideraciones realizadas al contexto dado.

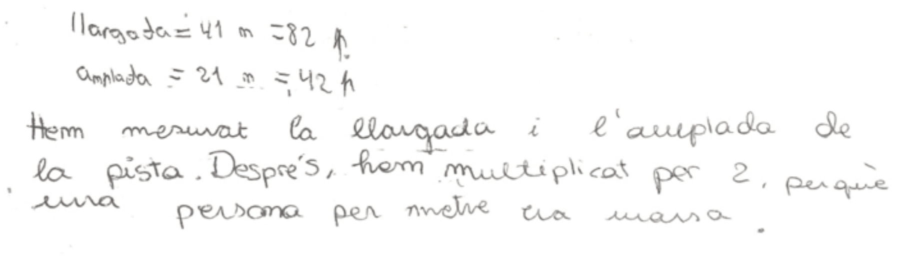

Fig. 4. Resolución de un grupo de alumnos de 6º EP.
"Hemos medido el largo y el ancho de la pista. Después hemos multiplicado por 2 porque una persona por metro era demasiado"

Esta resolución es un ejemplo de razonamiento unidimensional que, sin embargo, incluye una magnitud intensiva (densidad lineal). En efecto, los alumnos no cuentan directamente el número de personas que caben en un metro lineal puestas en fila, sino que estiman el número de personas que caben en un metro lineal y, a partir de la longitud total de cada lado, hallan el número total de personas a lo ancho y a lo largo. Hemos encontrado otras resoluciones con razonamientos unidimensionales que incluyen el concepto de la iteración de la unidad. Tal y como se muestra en la Figura 5, este grupo de alumnos de sexto de EP obtiene, en primer el ancho y el largo de la pista (en centímetros) y, partiendo de la hipótesis de que una persona ocupa 30 cm lineales, obtienen el número de personas que se pueden disponen en cada lado y, de ahí, haciendo el producto, deducen el total.

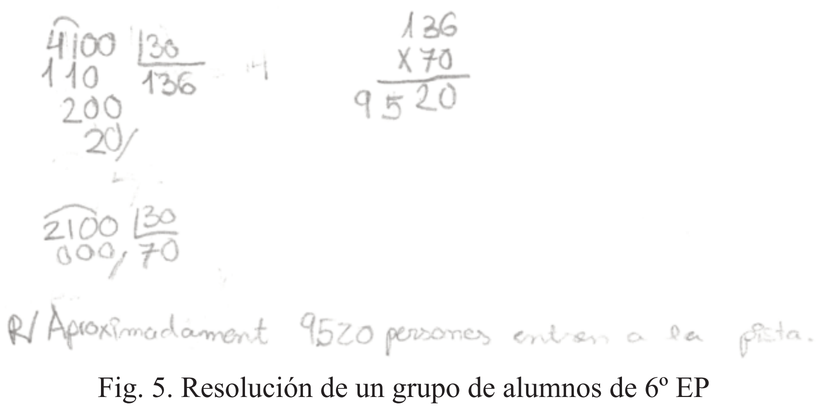

Fig. 5. Resolución de un grupo de alumnos de 6º EP

RESULTADOS

Tal y como hemos detallado en el apartado anterior, hemos diferenciado seis estrategias diferentes de resolución. Cuatro de ellas se basan en razonamientos en los que la aproximación al recuento de personas es de tipo unidimensional y se basan en una representación estática de la distribución de personas en el patio. Estos casos se dividen en dos grupos, los que proponen el encaje de rectángulos y la propuesta de la distribución en cuadrícula. Las resoluciones basadas en este último concepto pueden concretarse en tres procedimientos concretos de recogida de datos, ya sea contando explícitamente todas las personas necesarias para llenar una fila en el patio o calculando esta cantidad a partir de establecer la medida de una unidad o por densidad lineal (personas por metro lineal). Dos estrategias tratan la recogida de datos en el patio a partir de un razonamiento bidimensional y se basan en dos modelos que ya han sido observados y estudiado de forma precisa en trabajos anteriores (Albarracín y Gorgorió, 2013). En concreto nos referimos a la iteración de una unidad en una superficie y el uso de la densidad de población en una superficie.

En la siguiente tabla resumimos las diferentes estrategias y el número de producciones de cada tipo encontradas en cada nivel académico, en negrita están las resoluciones que, debido a diferentes errores, no llegan a una solución adecuada.

Tabla 2. Resumen de los resultados obtenidos en el análisis

2º EP	**1**	**2**	**3**				
4º EP			3+**1**		1		
6º EP				2	2	**1**+**1**	1
2º ESO				1	1	**1**	2
4º ESO			1			1	4
Estrategias utilizadas	No resuelven	Encajar rectángulos	Recuento exhaustivo	Iteración de la unidad lineal	Densidad lineal	Iteración en superficie	Densidad en superficie
			Cuadrícula			Bidimensional	
		Unidimensional					

Los resultados mostrados en la Tabla 2 permiten distinguir la evolución en las estrategias conforme aumenta el nivel académico de los grupos. Los alumnos más jóvenes, de 2º y 4º de Educación Primaria usan exclusivamente estrategias basadas en los procedimientos asociados a la cuadrícula, sin embargo, en 2º todavía tienen dificultades asociadas a la bidimensionalidad y al algoritmo de la multiplicación. Conforme avanzamos en EP, encontramos algunas estrategias subyacentes algo más complejas tales como la medición de la pista o la estimación del número de personas que se pueden disponer linealmente en un metro. Esta idea intuitiva de densidad evoluciona al saltar al análisis de los grupos de Educación Secundaria, en 2º ya encontramos algunos grupos que utilizan la densidad bidimensional (número de personas por metro cuadrado) y lo hacen de forma adecuada.

Al finalizar la etapa de Educación Primaria algún grupo (en 6º EP) incorpora en su resolución la estrategia basada en utilizar el espacio ocupado por una persona como medida unitaria, este procedimiento permite inferir que los alumnos dominan el cálculo de áreas y el conocimiento de la división como agrupación. Conforme avanzamos en la educación secundaria los alumnos escogen mayoritariamente la estrategia óptima basada en la densidad de población desde el punto de vista bidimensional. Observamos también que los alumnos de 2º de Primaria presentan dificultades para alcanzar un resultado adecuado para la cantidad solicitada en el problema, pero que los alumnos del resto de edades (mayores de 10 años) resuelven mayoritariamente el problema con una estimación adecuada al contexto planteado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio presentado muestra que el problema propuesto admite diversas estrategias de resolución y se aprecia una tendencia en los resultados del estudio al observar el modelo desarrollado en cada etapa educativa. En particular, los alumnos de los primeros cursos de Educación Primaria utilizan de forma mayoritaria la distribución en cuadrícula para resolver el problema. Entendemos que este hecho se sustenta en las dificultades que encuentran al enfrentarse a un problema en el que es indispensable tratar la distribución de personas en una superficie. En concreto, los alumnos de 2º de Primaria utilizan este modelo y lo aplican exclusivamente a partir del conteo directo. Los alumnos de 4º y 6º de Educación Primaria establecen el número de personas necesarias introduciendo los modelos de la iteración de la unidad o de la densidad, tratados ambos de forma lineal. No es hasta 6º de Educación Primaria que encontramos grupos que tratan la superficie del patio como un todo, utilizando la iteración de la unidad y la densidad de población bidimensionales de forma masiva, especialmente en Educación Secundaria. Observamos que en 4º de Educación Secundaria, la densidad de población bidimensional es de uso mayoritario.

El estudio presentado es de tipo exploratorio y presenta algunas limitaciones, aunque permite establecer algunas conclusiones claras, así como orientar futuras investigaciones. Debemos destacar en este punto que este estudio es el que presenta el mayor número de producciones de alumnos analizadas resolviendo problemas de Fermi de los que se pueden encontrar en la literatura. De esta forma, podemos afirmar que las estrategias de resolución identificadas y los modelos en los que se soportan presentan una caracterización fiel de la producción esperable por los alumnos de los distintos grupos de edad. En este sentido los resultados obtenidos en este trabajo son coherentes con los resultados de estudios previos y están relacionadas con las dificultades para dar significado a la bidimensionalidad del área de figuras planas (Corberán, 1996).

Si nos centramos en la distribución de los modelos generados por los alumnos de distintos grupos de edad, entendemos que el presente estudio posee limitaciones que solo pueden superarse a partir de realizar grandes recogidas de datos en diversos centros educativos. En los dos centros en los que se ha implementado la actividad, el trabajo en el aula de matemáticas no incluye la resolución de problemas en contextos reales. Por ello, debemos interpretar los resultados como un esbozo de la situación estudiada, futuros estudios deben ahondar en los detalles para clarificarla. Pese a estas limitaciones, entendemos que los resultados obtenidos y expresados en la Tabla 2 muestran una evolución en los modelos identificados que puede entenderse como una graduación conceptual de los distintos modelos que pueden ser utilizados para resolver el problema. En cualquier caso, no podemos identificar saltos claros en las producciones de los diferentes grupos de edad, observando que grupos de diferentes edades que utilizan estrategias similares. Entendemos que los conocimientos matemáticos y extra-matemáticos de los alumnos son mayores en los niveles superiores y que esta diferenciación es la que explica mayormente las diferencias identificadas, pero no podemos asegurar que el uso de medidas intensivas sea consciente, ni que puedan utilizarlas de forma adecuada en otras actividades.

Las condiciones de la recogida de datos, presentando a los alumnos una actividad en un contexto de investigación y cambiando las condiciones habituales del aula y el papel del docente, nos proporcionan información sobre los modelos emergentes que desarrollan los alumnos por ellos mismos. Así, el trabajo con alumnos entre 2º y 4º de ESO relacionado con el recuento de objetos o personas en una superficie debe permitir introducir los modelos basados en magnitudes intensivas. En cambio, si nos centramos en el trabajo de los alumnos entre 4º y 6º de EP, observamos que el problema utilizado puede utilizarse para que los alumnos sean conscientes de que pueden desarrollar por ellos mismos actividades de modelización y para trabajar aspectos relacionados con la medida (directa e indirecta) de las magnitudes longitud y área.

En el caso de los alumnos de 2º de EP, el problema puede utilizarse para interpretar una situación para ellos compleja y enfrentarse al estudio de las propiedades de las superficies, teniendo en cuenta que es posible anticipar que en el proceso de resolución será necesario realizar una multiplicación y puede ser un buen punto de partida para trabajarla desde el punto de vista conceptual y procedimental (tanto a partir de introducir el algoritmo de la multiplicación como del uso de calculadora). Dado que los estudios sobre los procesos de modelización matemática son escasos si nos centramos en alumnos de menos de 10 años (Stohlman y Albarracín, 2016), el problema utilizado se presenta como una oportunidad para introducir la modelización con alumnos de estas edades y empezar a trabajar con secuencias de problemas que les permitan desarrollar modelos progresivamente más complejos al incorporar nuevos conceptos y procedimientos a los modelos emergentes desarrollados.

Referencias

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16*(3), 289–315.

Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H., y Gorgorió, N. (2015). Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria. *Epsilon, 32*(89), 19-33.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Ärlebäck, J. B. (2011). Exploring the solving process of groups solving realistic Fermi problem from the perspective of the anthropological theory of didactics. En *Proceedings of the 7th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1010-1019). CERME: Rzeszów.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1), 149-171.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). "Filling Up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633).

Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde Primaria a la Universidad.* Tesis doctoral. Universitat de València: Valencia.

Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *BOLEMA, 31*(57), 220-242.

Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Erlbaum: Hillsdale.

Jefatura del Estado (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 157-189.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. En S. Ruwisch and A. Peter-Koop (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 454-461) Sydney, Australia: MERGA.

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education, 43*(1), 83.

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange, 40*(2), 205-223.

Stohlmann, M., y Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International*, vol. 2016, Article ID 5240683, 1-9.

[1] Este artículo es fruto de una investigación llevada a cabo en el marco de los proyectos de investigación EDU2015-69731-R y EDU2013-4683-R financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (España) y que ha recibido soporte de la Conselleria d'Educació i Ciencia de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143) y la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (2014 SGR 00723).