OBSERVACIONES ACERCA DEL PROPÓSITO DEL ÁLGEBRA EDUCATIVA

REMARKS ON THE PURPOSE OF EDUCATIONAL ALGEBRA

Puig, L.

Universidad de Valencia

Resumen

En este texto reflexionamos sobre algunos aspectos del álgebra educativa a partir de lo que hemos llegado a saber gracias al estudio de procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en el sistema escolar, y gracias al estudio de la historia del álgebra desde un punto de vista educativo. En particular, reflexionamos sobre los tipos diferentes de significados de campos semánticos distintos, implicados en los sistemas algebraicos de signos, y su integración en un sistema algebraico de signos más abstracto.

Abstract

In this text we reflect on some aspects of Educational Algebra using what we got to know thanks both to the study of processes of teaching and learning algebra in the school system and the study of the history of algebra from an educational point of view. Specially, we reflect on the different kind of meanings from different semantic fields conveyed by algebra sign systems, and its integration in a more abstract algebra sign system.

Palabras clave: *Campos semánticos, Álgebra educativa, Sistema matemático de signos, historia del Álgebra.*

Key words: *Semantic fields, educational algebra, mathematical systems of signs, history of the algebra.*

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (Anexo, pp. 1 - 20). Jaén: SEIEM

Las ideas no existen separadas del lenguaje

Karl Marx

Primeras observaciones

En mi texto de 1997 “Análisis fenomenológico”, que se publicó como un capítulo del libro coordinado por Luis Rico La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, afirmaba que la distinción que Freudenthal establece en su libro Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (Freudenthal, 1983) entre lo que él llama objetos mentales (matemáticos) y los conceptos matemáticos, me parecía (y me sigue pareciendo quince años después) que era importante, no tanto en su aspecto teórico, sino porque merced a esa distinción Freudenthal adoptaba “una toma de partido didáctica” (Puig, 1997, p. 75).

La toma de partido a la que hago referencia aparece en obra en muchas partes de sus libros, y está más explícita al final del capítulo segundo, “El método”, cuando Freudenthal anuncia que, para su enfoque de la enseñanza, ha “evitado el término adquisición de conceptos a propósito”, y dice: “En su lugar yo hablo de la constitución de objetos mentales, lo que desde mi punto de vista precede a la adquisición de conceptos y que puede ser altamente eficaz, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos” (Freudenthal, 1983, pp. 32-33).

La terminología de Freudenthal es bastante idiosincrásica, de modo que conviene que indiquemos, siquiera sea someramente, a qué se refiere con esta distinción entre “objeto mental” y “concepto”. El propio Freudenthal señalaba que Fishbein los llamaba “intuiciones”, pero añadía que “ésa es una palabra que intento evitar porque puede significar tanto visión interior como iluminaciones” (Freudenthal, 1983, p. 33), algo que se concibe de repente como caído del cielo, o, por usar dos de las acepciones que aparecen en el diccionario de la Real Academia Española, la “Facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento” o la “Percepción íntima e instantánea de una idea o una verdad que aparece como evidente a quien la tiene”. Nosotros ya indicamos en nuestro texto citado que

> en el uso corriente no suele aparecer el término “objeto mental”. Lo habitual es que también se hable del concepto que tiene una persona –de número o de triángulo o de cualquier otra cosa, ya pertenezca a las matemáticas o no–, o que se use el término “concepción” en vez de “concepto” y se hable de la concepción que una persona tiene de circunferencia, por ejemplo, pero en este caso suele quererse subrayar que lo que hay en la mente de esa persona es una parte o una forma de ver el concepto” (Puig, 1997, pp. 75-76).

Lo que interesa no es, sin embargo, que sea uno u otro término el que se esté usando, sino cuál es el fenómeno del que esa distinción da cuenta y cómo lo organiza conceptualmente. Objeto mental vs concepto, o intuición vs concepto, o concepción vs concepto pretenden dar cuenta del fenómeno de la diferencia y la relación entre cómo concibe una persona concreta un concepto matemático y el concepto social, cultural e históricamente establecido en las matemáticas, y dan cuenta de ello de formas distintas.

Ya Freudenthal indicaba claramente que si él no usaba “intuición” era porque no quería que quien le leyera pensara que estaba señalando que hacía referencia a percepciones íntimas e instantáneas sin necesidad de razonamiento. Los términos o las palabras no tienen un significado pegado a ellos que arrastran vayan a donde vayan como su verdadero significado sino que, entre otras cosas, son las teorías las que delimitan el uso de los términos en uno u otro sentido. Ahora bien, en el intertexto, concepto de raíz bajtiniana del que hablaré más adelante, de un texto en el que aparezca, por ejemplo, el término “intuición”, está no sólo la obra de Fishbein, sino Henri Bergson en cuya filosofía ése es un concepto central, por usar su nombre sólo como ejemplo de a qué apunta esta idea de intertextualidad. Además el lector de un texto (o de los textos de una teoría) lo hace con su acervo de usos de los términos que aparecen en ella (y con su intertexto personal). Es prudente pues que no aparezcan términos en una teoría, cuyo uso en esa teoría haya que estar continuamente delimitando para evitar malentendidos. En el texto de Freudenthal está explícitamente presente una restricción semántica que excluye darle el sentido de iluminación o visión interior a lo que se nombra con el término “objeto mental”, al no haberlo nombrado con el término “intuición”. El término elegido por Freudenthal parece que pretenda ser un término lo menos cargado de significados posible: “objeto” puede ser un tal término, de la misma manera que para los algebristas árabes medievales pareció serlo el término “cosa”.

Pero dejemos el término de momento y volvamos a lo que he dicho que interesa: cuál es el fenómeno del que esa distinción da cuenta y cómo lo organiza conceptualmente. El fenómeno ya lo hemos indicado y, de la discusión anterior sobre la exclusión de “intuición”, ya sabemos al menos que no se trata de que en uno de los lados de la distinción esté lo espontáneo, intuitivo, la comprensión obtenida “sin necesidad de razonamiento”. Sea lo que sea eso que Freudenthal coloca en el lado de las personas concretas y que nombra con el término “objeto mental”, es el producto de un trabajo, el trabajo de una persona.

Por otro lado, en mi lectura del texto de Freudenthal, los conceptos matemáticos no son *noúmenos*, como dice Freudenthal, lo que los situaría en un mundo ajeno a nuestra experiencia, y

> esto se compagina mal con una de las características de las matemáticas que el mismo Freudenthal señala de inmediato: un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno o de unos fenómenos, pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático y este proceso se repite una y otra vez. Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están fuera del mundo de los fenómenos que organizan (Puig, 1997, p. 64).

Los conceptos matemáticos pues son también el producto de un trabajo, el trabajo de los matemáticos, no preexisten en un mundo cuya geografía exploran los matemáticos. Los matemáticos no descubren ni encuentran los conceptos matemáticos sino que los elaboran, y, una vez elaborados, no los depositan en un mundo ajeno a nuestra experiencia.

Además, esa elaboración no es un proceso terminado, sino que todo concepto matemático es siempre provisional y está sometido a transformaciones como producto del trabajo de los matemáticos. La demostración, como lo argumenta Lakatos en *Proofs and refutations* (Lakatos, 1976), la resolución de problemas, el proceso de definir, o la organización de conjuntos más o menos extensos de resultados en sistemas deductivos, son los tipos de trabajo de los matemáticos que inciden más específicamente en la transformación de los conceptos. Para lo que estoy desarrollando en este momento, me interesa traer a colación lo que escribí sobre el papel que desempeña el proceso *matemático* de definir. Y subrayo “matemático” porque el proceso de definir propio de las matemáticas tiene características específicas con consecuencias ontológicas, esto es, con consecuencias sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, tal y como yo los concibo.

> En matemáticas, una definición no sirve simplemente para explicar a la gente lo que significa un término, sino que, cuando consideramos las actividades matemáticas mediante las cuales se

organizan sistemas deductivos, las definiciones –usando una expresión de Freudenthal– son eslabones en cadenas deductivas.

El proceso de definir es, entonces, un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto matemático, que pone en primer plano las que se juzga que permiten constituir un sistema deductivo, local o global, en el que ese objeto matemático esté incorporado. Ahora bien, resaltar unas propiedades como las que definen un concepto no es una operación inocente, neutral con respecto al concepto, ya que, por un lado, hace aparecer ese concepto como creado originalmente para organizar los fenómenos correspondientes y, por otro lado, hace que el contenido del concepto sea a partir de ese momento lo que se derive de esa definición en el sistema deductivo al que se ha incorporado. Por tanto, al igual que sucede al probar teoremas, este proceso de definir crea también nuevos conceptos (Puig, 1997, p. 74).

Si la distinción entre objeto mental y concepto se describe en términos semióticos como hice en ese texto (Puig, 1997, pp. 76-79, en particular, pero también en otros lugares) a propósito del concepto complejo y múltiple de número, se puede mostrar que los números se usan en contextos con características distintas, que implican significados diferentes, que no voy a detallar aquí. La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de "número", el significado de número descrito en forma de enciclopedia y no de diccionario. El concepto matemático de número tiene su origen fenomenológico y una historia de elaboración del concepto en la que ha sido sometido a múltiples cambios, en su uso como medio de organización de fenómenos que están en uno u otro de esos contextos de uso, y se perfila, se delimita como concepto a través de procesos de definir, que, en su caso, se presentan como recortes del campo semántico, pero que pretenden que el conjunto de significados de todo el campo semántico pueda derivarse de los propios de ese recorte, gracias a un proceso de abstracción (en el que, esto es una característica fundamental de los procesos de abstracción, se abandonan significados).

Ahora bien, una persona concreta no tiene en su experiencia la totalidad de la enciclopedia, es decir la totalidad de los usos de "número" propios de una cultura o una episteme, sino que ha ido elaborando un *campo semántico personal* para "número", gracias a haberle dado sentido a "numero" en distintos contextos de uso, con mayor o menor fortuna, esto es, de forma que el sentido producido se corresponda más o menos con los significados establecidos en la enciclopedia de esa cultura (así es como yo uso aquí "afortunado", para dar cuenta de las consecuencias comunicativas de ese diálogo de una persona concreta con su entorno sociocultural). Así como el concepto matemático de número está elaborado para poder dar cuenta del conjunto del campo semántico propio de una cultura (en un momento concreto de su historia), una persona concreta da cuenta del campo semántico personal de número con su objeto mental número. De manera similar a como los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos para una cultura, los objetos mentales son pues medios de organización de fenómenos para una persona concreta.

Sin demasiado problema para lo que me interesa podríamos pues abandonar el término "objeto mental" de Freudenthal y usar para lo que aquí estamos delimitando el término de "concepto personal", estaríamos más cerca de uno de los usos del término en lo civil, y, por otro lado, estaríamos mostrando en la propia terminología la correspondencia de esta distinción con la distinción entre campo semántico y campo semántico personal.

Ahora bien, si queremos dar cuenta cabal de la toma de partido de Freudenthal que se deriva de esta distinción entre lo que ahora estamos llamando "concepto personal" y "concepto" (siempre referida a conceptos matemáticos, ya que hemos señalado que la forma de elaboración de los conceptos matemáticos es específica de las matemáticas), no podemos quedarnos simplemente con la idea de que las personas elaboran sus conceptos personales a través de su experiencia de uso para la organización de fenómenos. Esto nos llevaría a una deriva constructivista ajena, a nuestro entender, a las ideas de Freudenthal y, en cualquier caso, totalmente ajena a nuestras ideas. Freudenthal habla de la elaboración de "objetos mentales buenos" y no simplemente de objetos mentales, tan pronto como pone en juego la acción educativa.

En nuestros términos, un concepto matemático personal es afortunado cuando organiza los fenómenos de la misma manera que los organiza el concepto matemático correspondiente. La toma de partido de Freudenthal por la constitución de objetos mentales en vez de la adquisición de conceptos, expresada en mis términos conlleva que la intención de los sistemas educativos sea, por un lado, que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico, es decir, abarque suficientemente el campo semántico del concepto en cuestión, y, por otro, que su concepto personal organice los fenómenos de forma similar a como lo hace el concepto matemático correspondiente. De esta manera los alumnos serán capaces de dotar de sentido de forma afortunada todas las situaciones en que hayan de usar ese concepto matemático.

Éste es pues, expresado de forma general, el propósito de la matemática educativa, y, en particular, el del álgebra educativa. Ahora bien, como sucede con todo enunciado general, para que no se quede vacío, se deriva de él un plan de trabajo para el estudio y el desarrollo del álgebra educativa. Haré algunas observaciones al respecto en lo que sigue.

Segundas observaciones

En el esbozo de análisis fenomenológico del álgebra escolar que escribí para el libro *Educational Algebra* (Filloy, Rojano y Puig, 2008) recorría dos de sus aspectos: uno como fenomenología histórica, que desembocaba en el álgebra moderna, y otro en que se examinaba el sistema de signos del álgebra y su relación con los sistemas de signos de la aritmética y del lenguaje natural, reescribiendo el capítulo sobre el lenguaje algebraico de Freudenthal (1983).

Señalaré aquí que uno de los hilos conductores de ese análisis histórico del álgebra lo traza lo que en Puig (2010) llamé "el proyecto algebraico", cuyos componentes expresé de este modo:

- La elaboración del concepto de especie de número.
- La elaboración de un sistema de signos específico para tratar el cálculo con especies.
- El establecimiento de un procedimiento de traducción del enunciado de un problema a una ecuación.
- La clasificación de las ecuaciones en formas canónicas, y el establecimiento de todas las formas canónicas.
- La elaboración de un cálculo que garantice transformar cualquier ecuación en una forma canónica.
- La resolución de todas las formas canónicas.

Desde al-Khwārizmī este proyecto está en marcha con todos estos componentes, como muestro en Puig (2010), y se pueden rastrear algunos de ellos en algún sentido en textos anteriores.

Dicho en términos generales, los fenómenos que organiza el álgebra son los que aparecen en el desarrollo del proyecto algebraico, para empezar, el cálculo no con números sino con especies de números.

El propio al-Khwārizmī comienza su libro, tras indicar que quiere exponer “lo que las gentes necesitan en sus herencias, legados, repartos, arbitrajes, comercios […] medida de tierras, perforación de canales, medición y otras cosas que dependen del cálculo” (Rashed, 2007, pp. 94-95), presentando las especies de números como las formas que adoptan los números que se necesitan en el cálculo:

> He encontrado que los números que se necesitan en el cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* son de tres especies, que son: raíces, tesoros y números simples no relacionados con raíz ni con tesoro.
> La raíz (*jidr*) es cualquier cosa que se multiplica por sí misma, como la unidad, o los números, que le son superiores, o las fracciones, que le son inferiores.
> El tesoro (*māl*) es todo lo que resulta de la raíz multiplicada por sí misma.
> El número simple (*ᶜadad mufrad*) es todo lo que, entre los números, es expresable y que no se relaciona con raíz ni con tesoro (Rashed, 2007, p. 96-97; Hughes, 1986, p. 233).

Al-Khwārizmī no explica de ninguna manera la necesidad de establecer y estudiar ese cálculo con especies de números en vez de con números. Las razones para ello las buscamos en otro momento de la historia del álgebra y en su interpretación por parte de Jakob Klein: se trata de superar la concepción griega de la necesidad de tratar con objetos que estén dados.

Cuando el análisis se realiza en problemas que tratan con objetos geométricos, el carácter de “dado” puede tomarse como “*posibilidad* de haber sido dado” al trazar la figura de análisis que da la construcción por ya realizada y constituye el primer paso del análisis:

> Esta “posibilidad de haber sido dado” aparece en el análisis geométrico en el hecho de que la construcción que se considera como ya efectuada […] no necesita el uso de magnitudes “dadas” como unívocamente determinadas, *sino sólo como que tienen el carácter de haber sido “dadas”* (Klein, 1968, p. 164).

Ahora bien, Klein se pregunta cómo puede transferirse esa situación al análisis en el terreno de la aritmética, y responde:

> Claramente de esta manera: que los números “dados” en un problema se consideren sólo en su carácter de haber sido dados, y no como precisamente esos números determinados (Klein, 1968, p. 164).

Es decir, que, cuando los problemas pertenecen al terreno de la aritmética, es necesario para efectuar el análisis que los números se consideren como dados, pero no determinados. Pero, se pregunta Klein ahora, “¿cómo puede ser que números “dados” y por tanto “determinados” desempeñen un papel “indeterminado”?” (Klein, 1968, p. 165). El establecimiento de especies de números como los objetos del álgebra y el desarrollo de un cálculo con especies es la respuesta que da el proyecto algebraico.

Las especies de números no representan números concretos, sino formas distintas que los números pueden adoptar cuando se calcula con ellos, son, en ese sentido, indeterminados. Las incógnitas de los problemas aritmético-algebraicos, que son números desconocidos, pero determinados, ya que están dados por las relaciones del enunciado del problema, pueden convertirse así en el objeto del cálculo: por el intermedio de considerarlas no como números, sino como especies de números, y por tanto su carácter de dado está tomado como posibilidad de haber sido dado.

Tratar lo conocido y lo desconocido de la misma manera en los cálculos, que para Descartes constituye el meollo del método de resolución algebraica de problemas, que llamamos "método cartesiano" en su honor, se puede hacer precisamente gracias a esa transformación de los objetos del cálculo algebraico en especies de números. La constitución del concepto de especie de número se realiza resolviendo una tensión entre "dado", "determinado" y "conocido", que veremos reaparecer en los significados de las expresiones algebraicas.

Al presentar estas observaciones en torno al proyecto algebraico como lo he desglosado, puedo crear el malentendido de que concibo el álgebra exclusivamente como resolución (algebraica) de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal. Pero entender esto supone no tener en cuenta que el análisis fenomenológico, ya sea didáctico, puro o histórico, conlleva una concepción de la naturaleza de los conceptos matemáticos (una ontología de las matemáticas, si se quiere) en la que los conceptos que se crean como medios de organización de fenómenos, entran de inmediato a formar parte de un nuevo campo de fenómenos que son organizados por nuevos conceptos, y así sucesivamente en un proceso de abstracción progresiva. El hilo histórico que lleva del proyecto algebraico tal como lo he presentado al álgebra moderna es un ejemplo perfecto de esta escalera de abstracción progresiva, como muestro en el apartado "Pasos hacia el álgebra moderna" de Filloy, Rojano y Puig (2008). Por otro lado, en el desarrollo del proyecto algebraico las expresiones algebraicas, por ejemplo, se estudian por sí mismas, aplicando a ellas todas las operaciones de la aritmética y estudiando los fenómenos que se presentan, ya desde la obra de al-Karajī, apenas un siglo después de Al-Khwārizmī. Otros aspectos del desarrollo histórico delálgebra hay que buscarlos en otros hilos históricos, una lista de los cuales ya presenté en una edición anterior de estos simposios de la SEIEM (Puig, 2003) y también en Puig y Rojano (2004), y en cómo se entretejen unos con otros.

De forma similar, tampoco estoy propugnando al hacer estas observaciones sobre el proyecto algebraico de resolver el problema de los problemas, que la enseñanza del álgebra tenga su centro en la resolución de problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal. A mi entender, lo que Kieran (2007) establece como distintos enfoques en la enseñanza del álgebra, no deben presentarse como alternativas, sino como aspectos complementarios que deberían tratarse todos ellos. Esto obliga además a estudiar las relaciones entre lo que en los enfoques de Kieran aparecen como aspectos separados. Los reformularé en mis propios términos, con lo que de hecho empezaré el trabajo de establecer sus características y sus relaciones.

Para mí pues, si queremos atender a la toma de partido que hemos presentado en las primeras observaciones, el álgebra en el currículo de secundaria (y, en cierta medida que no discutiré aquí, en el de primaria) ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión.

El primero de estos aspectos conduce a la elaboración de materiales de enseñanza en los que se estudien pautas en configuraciones geométricas o en conjuntos ordenados de números, se elaboren conjeturas expresadas en el lenguaje del álgebra, y se demuestren esas conjeturas por procedimientos en los que el dominio de las transformaciones de las expresiones algebraicas es importante. Las expresiones algebraicas pueden adquirir significado para los estudiantes al resolver estas situaciones de enseñanza en la medida en que permiten expresar de forma general relaciones que representan las configuraciones geométricas o las series de números. Y las transformaciones algebraicas tienen sentido en la medida en que pueden dar cuenta del hecho de que expresiones algebraicas distintas, obtenidas por ejemplo por alumnos distintos en una misma sesión de trabajo, representan la misma configuración geométrica o serie de números, lo que atestigua la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones.

El segundo de los aspectos corresponde a la resolución algebraica de problemas de enunciado verbal, es decir, a la resolución de problemas tal y como la establece el Método Cartesiano. En este caso, las expresiones algebraicas son el resultado de un proceso de traducción vía una lectura analítica del enunciado que lo reduce a cantidades y relaciones entre ellas, y para los aprendices tienen el significado que traen de ese proceso de traducción (significado del que tendrán que desprenderse en algún momento, para realizar sin obstrucciones las transformaciones algebraicas, y al que habrán de saber volver, para llevar el resultado de la ecuación al resultado del problema[1]). Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí en la medida en que garantizan que cualquier ecuación podrá llevarse a una forma canónica, y, por tanto, podrá resolverse, ya que las formas canónicas se saben resolver, con lo que, en consecuencia, cualquier problema puede resolverse.

El tercero de los aspectos tiene que ver con los procesos de modelización. En este caso las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales y su significado está ligado a los procesos de traducción entre ellas, las tablas de datos numéricos y las representaciones gráficas cartesianas, que, con el soporte de una calculadora gráfica simbólica o un software que combine un sistema de cálculo simbólico con una pantalla gráfica y una hoja de cálculo, como el GeoGebra, por ejemplo, se realizan de forma automática, mediando, en su caso, decisiones del usuario sobre la ventana con que se mira la gráfica, el tamaño del incremento y de la longitud de la tabla, o la expresión algebraica concreta elegida para representar la relación funcional. Las transformaciones algebraicas tienen sentido aquí de nuevo en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica. Pero, en este caso, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

En los tres casos, las transformaciones algebraicas tienen sentido, no en sí mismas, sino por la posibilidad que ofrecen de mostrar que expresiones distintas pueden representar una misma situación, y porque permiten obtener aquellas expresiones que son más convenientes para el tratamiento de la situación. Es harto conocido que los alumnos a menudo manipulan las expresiones algebraicas siguiendo reglas aprendidas de forma mecánica, sin que le vean sentido a lo que hacen. Esto puede atribuirse a su trabajo desligado de las situaciones que le dan sentido, en ejercicios en los que lo único que se plantea es la mera ejecución de las reglas de transformación. Sin embargo, las transformaciones algebraicas pueden tener sentido para los alumnos a condición de que se vean como un componente esencial del proceso que se está realizando. Dicho de otra manera, sólo el conjunto del proceso es capaz de darle sentido a la manipulación algebraica

Además, los significados asociados a las letras y a las expresiones algebraicas no son, de entrada, los mismos: al menos están presentes los significados de incógnita, de variable, de número generalizado o de nombre polivalente, y entre ellos hay relaciones variadas. Podríamos pensar que en el primer aspecto considerado las letras van a tener

[1] Sobre este asunto véase Filloy, Puig y Rojano (2008).

el significado de número generalizado, en el segundo, de incógnita, y en el tercero, de variable, pero esto no es más que una parte de la historia.

En el álgebra árabe medieval y, por herencia de ella, en el álgebra en el occidente cristiano hasta el establecimiento del lenguaje simbólico del álgebra, para traducir el enunciado de un problema al lenguaje del álgebra, es decir, al cálculo con especies de números, se usaba el término "cosa", y su uso se veía tan esencial al álgebra que está llegó a llamarse en algún momento en el occidente cristiano "arte de la cosa". "Cosa" es el término con el que se va a designar una cantidad desconocida, una incógnita, para poder calcular con ella en el cálculo de especies, y, "cosa" trae del lenguaje natural al lenguaje del álgebra su significado de algo sin nombre, una cosa, en el lenguaje cotidiano parece estar diciendo "una cosa cualquiera" o "cualquier cosa", algo pues que está indeterminado. Sin embargo, en el enunciado de un problema, las incógnitas son cantidades desconocidas, pero determinadas por las relaciones entre las cantidades que están (o pueden leerse) en el texto del problema. El significado propio de incógnita es el de algo determinado, pero desconocido. Además, "cosa", en el uso que de ese término hace al-Khwārizmī (Puig, 2011) es un nombre común, que funciona por tanto como nombre polivalente, y que habitualmente sólo se liga por el contexto. Al-Khwārizmī suele empezar la traducción del enunciado de un problema a su lenguaje del álgebra dando indicaciones del estilo de "tú pones una de las dos partes una cosa y la otra diez menos una cosa" (Rashed, 2007, p. 144-145; Hughes, 1986, p. 247), de forma similar a como hoy en día se puede decir en un diálogo entre dos alumnos que están resolviendo un problema "llámale *x*". Como nombre común o nombre polivalente, lleva asociado el significado de algo indeterminado, algo que se refiere a un conjunto de objetos, todos los cuales pueden llamarse de esa manera. Sin embargo, en el curso de la resolución del problema, lo que se ha nombrado con un nombre común acaba ligado con un artículo determinado o un demostrativo, "la cosa vale [tanto]", y ya no es un nombre común, sino un nombre propio. La palabra "cosa", o la *x*, lleva asociada ese significado de indeterminación, de nombre común, que, en el caso de la *x*, ha pasado al uso civil en el lenguaje natural, en el que es habitual escuchar un diálogo como éste en un contexto no matemático: "—No sé cómo se llama. —Llámale *x*."

El método cartesiano precisa, sin embargo, que la *x* no sea un nombre común, sino el nombre propio en el lenguaje del álgebra de una cantidad, que en el lenguaje natural puede llamarse "la edad de Juan ahora", por ejemplo. Pongo este ejemplo porque, en el lenguaje natural se han usado los mecanismos propios de ésta para convertir nombres comunes en nombres propios, en este caso, un genitivo y un adverbio de tiempo. Estos mecanismos de la lengua natural hacen que "la edad", que es un nombre común, o un nombre polivalente, pase a ser otro nombre común "la edad de Juan", que además lleva consigo el significado de variable que le da la dependencia vivida de esa edad del tiempo, y éste pase a ser un nombre propio "la edad de Juan ahora". Sin embargo, *x*, como nombre en el lenguaje del álgebra carece de ese tipo de mecanismos para ligar un nombre común y convertirlo en un nombre propio. En un lenguaje más formal que el que se usa habitualmente en el álgebra escolar, esos mecanismos para ligar existen, son los cuantificadores, especificadores, formadores de conjuntos, y otros que "ligan independientemente del contexto", como señala Freudenthal (1983, pp. 474-475).

Además, este examen de las oscilaciones de significado de "cosa" o *x* lo he hecho tomando en consideración sólo el momento de la traducción, en el que "cosa" o *x* están en el lugar de una cantidad del enunciado del problema. Pero una cantidad es un objeto múltiple.

Si miramos ahora la ecuación en la que ha culminado el proceso de traducción independientemente del hecho de que esa ecuación provenga de ese proceso de traducción, la *x* se refiere a un número determinado por la igualdad de relaciones aritméticas representadas en la ecuación, es "la *x*, tal que $2x + 3 = 3x + 1$", la *x* es claramente otro nombre propio de 2.

La letra está en el lugar, por tanto, de un número determinado (por la ecuación), pero desconocido (para el resolutor). El carácter de determinado es pues una propiedad matemática[2], pero el carácter de desconocido es una propiedad del conocimiento del resolutor, que se modifica una vez obtenido el resultado, gracias a lo cual lo que estaba determinado es conocido, dado. La *x* está en el lugar de un número determinado, pero mientras el resultado no se ha obtenido, el resolutor puede no atribuirle el significado de determinado, que es una propiedad de la ecuación, y no de su conocimiento.

Por otro lado, los dos miembros de una ecuación pueden verse como sendas funciones $f(x)$ y $g(x)$, y la ecuación es entonces la afirmación de que hay un valor de *x* que hace que ambas funciones tengan el mismo valor. La *x* sigue siendo determinada vista en la ecuación, es un nombre propio, "la *x*, tal que $f(x) = g(x)$", pero se hace indeterminada en cada una de las funciones. El significado de indeterminado reaparece de nuevo para la *x*. En la resolución de una ecuación (o de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal) esto puede hacerse totalmente explícito si se usa cualquier procedimiento de tanteo sistemático para encontrar la *x* que hace iguales $f(x)$ y $g(x)$, ya sea numérico o gráfico. Éste es un ejemplo de un hecho que se presenta en otras circunstancias: el proceso de resolución de un problema desencadena una serie de lecturas / transformaciones del texto del problema en el curso del cuál los significados, en particular los significados de las letras y las expresiones algebraicas compuestas, se pueden modificar, por el sentido que se le dé en esas lecturas. Aquí hemos visto como el significado de la *x* se ha desplazado de "la *x* determinada por la ecuación" a "la *x* de entre un conjunto indeterminado (o variable) de números que hace que los valores correspondientes de las dos funciones coincidan" por la lectura de una ecuación como una igualdad de funciones.

El significado propio de las letras en las expresiones algebraicas que son funciones es el de variable. Variables que realmente varían si recuperamos ese significado para el término matemático de "variable". Como señala Freudenthal (1983), el concepto moderno de función engloba variables que realmente varían y nombres polivalentes.

Ya hemos visto que el significado de nombre polivalente está presente en el significado de la *x* cuando se usa en el contexto de la resolución de problemas, a pesar de que ésta sea más un nombre propio. Lo característico de los nombres polivalentes es referirse a un conjunto de objetos, o, como dice Freudenthal "son medios para formular enunciados generales, esto es enunciados que se cumplen para todos los objetos que nombran" (Freudenthal, 1983, p. 491), de modo que el significado de nombre polivalente sería el más propio del primero de los aspectos del álgebra que he indicado, el aspecto en el que el álgebra se ve como un sistema de signos usado en procesos de generalización, abstracción y demostración. En una identidad algebraica, las letras son

---

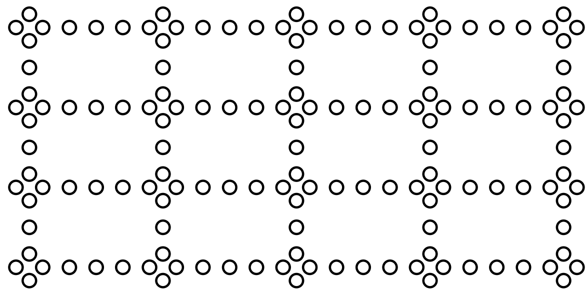
[2] Es preciso señalar que sé que hay ecuaciones que no son determinadas, y que cuando hablamos de sistemas de ecuaciones intervienen dos propiedades, la de ser compatible y la de ser determinado. El análisis que estoy haciendo se puede hacer más complejo teniendo en cuenta esas situaciones. Sin embargo, en las prácticas corrientes en el sistema escolar, los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal se da por sentado que tienen solución.

nombres polivalentes, que se refieren a cualquier número (dentro de un conjunto numérico determinado).

Si las funciones se presentan a través de su definición como subconjunto (de un tipo especial) de un producto cartesiano, entonces el significado de variable que varía desaparece para quedarse con el significado de nombre polivalente (el de todos los pares del subconjunto). En cualquier caso, variable o nombre polivalente, permanece el carácter de indeterminado.

Para Radford (2010) nombrar la indeterminación es un momento crucial del proceso de generalización que lo pone en el camino hacia lo que él llama "generalización algebraica" distinguiéndola de la aritmética y la fáctica.

Mi tarea favorita, que debo a James Mason, para enseñar a los alumnos el proceso de generalización algebraica es la que usa la configuración de los orificios de un bloque de sellos.



La tarea consiste en contar los orificios y expresarlo en general para un bloque de sellos cualquiera. Los alumnos trabajan individualmente o en grupo y presentan las expresiones que han construido. Recopiladas las expresiones, una segunda tarea consiste en ver que esas expresiones son equivalentes.

No voy a describir aquí los distintos tipos de estrategias posibles para tareas como éstas, simplemente voy a usar dos expresiones para mostrar en ellas el uso de las letras. Ambas expresiones están realizadas gracias a un buen análisis de la estructura de la configuración de puntos, que la descompone en partes que se repiten, y son éstas:

$$3c(f+1)+1f(c+1)+ 4(c+1)(f+1)$$

$$5c(f+1)+3f(c+1)+2(c+1)+2(f+1)$$

Ambas expresiones responden al mismo tipo de análisis, realizado de dos maneras distintas. Se han identificado partes de la configuración que se repiten, cuyo número se ha contado. En el caso de la primera, los grupos son tiras de 3 orificios (horizontales) y de 1 orificio (vertical), y cuadrados de 4 orificios (en las esquinas), y se han multiplicado por el número de veces que se repiten. Esos números de veces se han expresado a partir del número de columnas y el número de filas, que se han nombrado con las letras *c* y *f*. Esas letras son aquí nombres polivalentes, están colocadas en el lugar de los números concretos de filas y columnas que tiene este bloque de sellos en particular, que se ha examinado como ejemplo genérico, no en una sucesión en la que se observa la variación a medida que la sucesión se recorre. Las letras *c* y *f* están en el lugar de cualquier número, no son variables que toman valores consecutivos. Lo que está nombrado con las letras tiene pues carácter indeterminado, pero no variable.

Tercera observación

Ya he mencionado que el proceso de resolución de un problema desencadena una serie de lecturas / transformaciones del texto del problema en el curso del cual los significados, en particular los significados de las letras y las expresiones algebraicas compuestas, se pueden modificar, por el sentido que se le dé en esas lecturas. Éste es el caso de la actuación de un alumno que tenía que resolver el problema

> En una granja hay 180 ovejas en dos corrales. Si sabemos que en uno de ellos hay 30 ovejas más que en el otro, ¿cuántas ovejas hay en cada corral?

en una hoja de cálculo. El caso proviene de la tesis de David Arnau, en la que a los alumnos se les enseñaba a resolver problemas en la hoja de cálculo, mediante un método diseñado al efecto, que guardaba el mayor número de similitudes posible con el método cartesiano (ver en Arnau, 2010, para una descripción detallada del asunto).

Lo que me interesa de la actuación de este alumno es que resolvió el problema gracias a una lectura de la historia del texto del problema en el que éste se transformó de una situación estática, hay tantos en un corral, tantos en otro, tantos en total y tantos más en un corral que en el otro, en una historia que se desarrolla en el tiempo. La historia puede narrarse así: Las ovejas están fuera de los corrales, hay o han entrado ya 30 ovejas en el primer corral y ninguna en el segundo y van entrando una a una en los dos corrales a la vez para mantener la diferencia constante, hasta que fuera del corral no queda ninguna oveja, lo que da la solución del problema. Éstas son dos copias de pantalla en las que se muestra el final del proceso

◇	A	BX	BY	BZ
1	1 corral	104	105	106
2	2 corral	74	75	76
3	Diferencia	30	30	30
4	Total	2	0	-2

y la fórmula que introdujo para calcular las ovejas que quedaban fuera, cantidad a la que puso el curioso nombre de “Total”

◇	A	B	C
1	1 corral	30	31
2	2 corral	0	1
3	Diferencia	30	30
4	Total	=180-B1-B2	=180-C1-C2

Ésta es su explicación del significado de las cantidades:

> Lluís: Pues en el primer co… en el primer corral hay treinta más que en el otro, entonces empieza, por uno, treinta y por el otro cero para saber que en el otro hay treinta más. Y luego en el segundo se le sumaría uno al primero y al segundo también uno para que continuara la diferencia de treinta.
> Profesor: ¿Y aquí (el profesor hace clic en B4) qué tienes?
> Lluís: Ahí es el total de ovejas que tendrías. O sea, quiero decirte, que te quedarían fuera.

Las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los sistemas escolares las concebimos como situaciones de comunicación y producción de sentido, esto es lo que justifica el que utilicemos conceptos de la semiótica para tratar de ellas en nuestra teoría. Pero no de cualquier teoría semiótica, las teorías de las que nos nutrimos son aquellas que se han desprendido de una concepción esencialista del significado. En nuestra teoría pues un texto no tiene un significado, que sería el que su autor le ha dado y que el lector tendría que encontrar. Ni, salvo en circunstancias muy especiales, un signo tiene un significado, fijado a la manera de un diccionario, que el que lo lee tiene que descubrir. Más bien el significado está desplegado en el uso, es decir, en los juegos de lenguaje de una comunidad o una cultura, en prácticas sometidas a reglas como decía Wittgenstein, y el lector tiene que producir sentido explorando su campo semántico personal, es decir, el conjunto de usos para ese signo de los que ha tenido experiencia, teniendo en cuenta la restricción semántica que el contexto en que el signo aparece impone, con el fin de que el sentido que produzca sea afortunado, es decir, se corresponda con el significado socialmente establecido en ese contexto (o, en su caso, consiga ampliar el campo semántico introduciendo un nuevo uso en esa comunidad o esa cultura).

Este carácter no unívoco del significado de los textos propio de las teorías no esencialistas, no quiere decir pues que un signo o un texto pueda significar cualquier cosa (salvo en situaciones como la descrita por Lewis Carroll, que introducen otro elemento que no voy a poner ahora en juego, pero que también es crucial para entender los procesos de comunicación en los sistemas escolares, la cuestión del poder, o, como lo dice Humpty Dumpty discutiendo con Alicia en *A través del espejo y lo que Alicia encontró allí*: "Cuando *yo* empleo una palabra significa lo que yo quiero que signifique, ¡ni más ni menos! […] La cuestión está en saber quién manda aquí"[3]).

Los textos, como los signos, rara vez, por no decir nunca, se presentan aislados. Aunque el enunciado de un problema se le presente a un alumno para su resolución en una hoja en la que no hay nada más escrito, ese texto, en primer lugar, no es un mero enunciado de un problema, sino que es algo que se presenta en un tarea. Y, al decir que se presenta en una tarea, uso "tarea" aquí para distinguir el problema de la situación en la que está planteado, ya que sabemos que la tarea "resolver un problema de matemáticas en una situación escolar" no es la misma que la tarea "resolver un problema de matemáticas en un contexto no escolar", pero no entraré ahora a discutir cuáles son las consecuencias que tiene este hecho para la forma en que se le da sentido al texto (ver el apartado "La naturaleza estereotipada de los problemas verbales" de mi libro *Problemas aritméticos escolares*, donde ya discutíamos este asunto hace más de veinte años, Puig y Cerdán 1989).

En segundo lugar, y esto es lo que voy a plantear aquí, cualquier texto está imbricado en lo que Julia Kristeva, presentando a Bajtín, llamó "intertextualidad". En efecto, el concepto de intertextualidad en el sentido en que lo uso aquí proviene de las teorías desarrolladas por Mijail Bajtín en los años sesenta, que, al estar publicadas originalmente sólo en ruso (y en ocasiones firmadas por otros autores), no fueron conocidas directamente en el mundo occidental más que años después. La responsable de difundir sus ideas fue Julia Kristeva, quien ya en 1966 en su texto "Le mot, le dialogue et le roman", incluido poco después en su libro *Semeiotiké. Recherches pour une sémanalyse*, expuso las ideas de Bajtín y usó el término "intertextualidad" para

[3] Cito de la traducción de Ramón Buckley para la edición de Manuel Garrido en Cátedra (Carroll, 1992, pp. 316-317)

referirse a la idea de Bajtín de que “todo texto se construye como mosaico de citas, todo texto es la absorción y transformación de otro texto” (Kristeva, 1969, p. 146). La intertextualidad en el sentido de Kristeva no es una relación entre textos separados, sino que está presente en un texto (dialógico), como ella misma define: “Llamaremos *intertextualidad* a esta interacción textual que se produce en el interior de un solo texto […] la intertextualidad es una noción que será el índice de la manera en que un texto lee la historia y se inserta en ella” (Kristeva, 1968, p. 312).

Bajtín, de hecho, no usaba el término intertextualidad, sino “dialogismo”, pero ya Tzvetan Todorov en su clásica (e insuperable) presentación de las ideas de Bajtín, *Mikhaïl Bakhtine. Le principe dialogique*, prefería el término intertextualidad porque el término diálogo “está cargado de una pluralidad de sentidos, que a veces resulta embarazosa” y proponía reservar el término “dialógico” para “algunos casos particulares de intertextualidad” (Todorov, 1981, p. 95).

Sin entrar en muchos detalles, diré que de esa idea de intertextualidad que afirma que en cada texto está presente una red de otros textos propios de una cultura, una sociedad y un momento histórico determinados, se deriva el concepto de intertexto de un texto concreto para referirse al conjunto de textos con los que ese texto interactúa en su interior. El concepto de intertexto desempeña, con respecto a los procesos de comunicación y producción de sentido en los que se presentan los textos, un papel similar al concepto de campo semántico, que ya hemos presentado en la primera observación, por lo que respecta a los signos. El intertexto es el que ofrece las posibilidades de lectura de un texto, que vienen dadas por todos los textos con los que ese texto está relacionado en una cultura o una comunidad. Pero además, el concepto de intertexto que nos interesa en particular para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje, es doble. Así como en el caso del concepto de campo semántico, necesitamos hablar del campo semántico de un signo en una comunidad o una cultura y el campo semántico personal de un individuo, en este caso necesitamos hablar no sólo del intertexto como las posibilidades abiertas para la lectura de un texto en una cultura o comunidad, sino también del intertexto personal. De la misma manera que el concepto de campo semántico personal pretende dar cuenta de las posibilidades de producción de sentido para un signo que una persona tiene como consecuencia de su experiencia con los usos de ese signo, el concepto de intertexto personal nos permite dar cuenta de los textos que para un individuo particular están ligados con el texto a cuya lectura se enfrenta con el fin de producir sentido. Ése intertexto personal es el que le abre al lector sus posibilidades de lectura.

En el caso de la lectura de un problema aritmético-algebraico de enunciado verbal, ya hemos descrito en otras ocasiones, cómo una parte crucial del proceso es la lectura analítica. Recordemos que “lectura” para nosotros es un proceso en el que el texto original se convierte en un espacio textual y se transforma en un nuevo texto, y así sucesivamente[4]. Cuando decimos “lectura” de forma breve, nos referimos a esa lectura-transformación. Cuando decimos “traducción” del enunciado de un problema verbal aritmético-algebraico a una ecuación, nos referimos también a esa lectura-transformación, cuyas peculiaridades hemos esbozado en Filloy, Puig y Rojano (2008), por ejemplo.

[4] Expuse esta idea por primera vez en mi librillo *Semiótica y Matemáticas* (Puig, 1994), la desarrollé en mi texto “Signos, textos y sistemas matemáticos de signos” (Puig, 2003), y está expuesta también en Filloy, Rojano y Puig (2008).

El texto del problema de las ovejas en los corrales describe una situación estática, pero su intertexto contiene sin duda las historias en las que las ovejas se cuentan, probablemente saltando una valla, para poder dormir, las películas del oeste en las que los rebaños de vacas son conducidos a los rediles, las luchas entre ovejeros y ganaderos, y otros textos narrativos en los que las ovejas no están quietas, algunos de los cuales forman parte del intertexto personal del alumno. Además, en el intertexto personal del alumno debían estar también, su actuación nos lo indica de forma plausible, los problemas resueltos estirando para generar una secuencia de números, que habían formado parte de su experiencia reciente. Las cantidades tenían el significado de incógnitas en el texto del problema, reforzado por el carácter estático de lo descrito en el texto, pero la lectura del alumno no se desencadenó ateniéndose a lo que le pedía el modelo de enseñanza, sino que produjo un nuevo texto en que el número de ovejas en cada corral iba variando con el tiempo, las cantidades dejaron de ser incógnitas para ser variables en la propia historia producto de la lectura del alumno. Los nombres escritos en la hoja de cálculo “1corral”, “2corral” y “Total” no se refieren a cantidades determinadas pero desconocidas, sino a cantidades indeterminadas que varían en función unas de otras, describiendo en esa variación la propia variación que se da en la historia que el alumno leyó en el texto, al encontrar esa indeterminación y esa variación en su intertexto personal.

En Filloy, Rojano y Puig (2008) referimos como hay alumnos que ante una ecuación como $x + x/4 = 6 + x/4$, reaccionan diciendo que “esta x (el primer término del primer miembro) vale 6, y esos dos (las x que aparecen en los términos $x/4$ en ambos miembros) pueden ser cualquier número”, o ante una ecuación como $x + 5 = x + x$, diciendo que “esta x (el segundo término del miembro derecho) vale 5, y esas dos (las x que aparecen al principio de ambos lados) pueden tener cualquier valor”. Este fenómeno lo calificamos de “polisemia de la x”, en el sentido fuerte de que la x está tomando su significado de dos campos semánticos distintos: en un caso del campo semántico de los problemas en que el significado es el de incógnita, y en el otro del campo semántico de las identidades algebraicas en el que el significado es el de nombre polivalente (expresado de dos formas distintas: cualquier número y cualquier valor).

En lo que he mostrado puede verse que esos campos semánticos no son estancos, lo que conlleva desde mi punto de vista que todos los aspectos del álgebra mencionados deban tratarse, de forma que aparezcan imbricados todos los significados presentes en ellos: las expresiones algebraicas los tienen todos, y, en ese sentido, son polisémicas. Termino con una cita del libro *El marxismo y la filosofía del lenguaje*, que se publicó con el nombre de autor de Voloshinov, pero que fue escrito por Bajtín:

> En realidad, existen tantos significados de una palabra cuantos contextos hay de su uso. Sin embargo, con todo esto, la palabra no pierde su unidad ni se desintegra en el número de palabras correspondiente a los contextos de su uso. […] ¿Cómo conciliar la polisemia fundamental de la palabra con su unidad? –así es como puede ser formulado de un modo sumario y elemental, el principal problema de la significación. Este problema sólo puede resolverse dialécticamente (Voloshinov / Bajtín, 1992, p. 113).

Referencias

Arnau, A. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Carroll, L. (1992). *Alicia en el País de las Maravillas. A través del espejo y lo que Alicia encontró allí.* Edición de Manuel Garrido. Traducción española de Ramón Buckley. Madrid: Cátedra, Letras Universales.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*. Cambridge, MA: MIT Press. [Reprinted in New York: Dover, 1992.]

Kristeva, J. (1968). Problèmes de la structuration du texte. En Tel Quel. *Théorie d'emsemble* (pp. 298-317). Paris: Seuil.

Kristeva, J. (1969). *Σημειωτικ. Recherches pour une sémanalyse*. Paris: Seuil.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press. [Traducción castellana de Carlos Solís, Pruebas y refutaciones. Madrid: Alianza, 1978.]

Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas.* Valencia: Episteme.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México, DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En Bolea, P.; González, Mª. J. y Moreno, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma*, 65, pp. 87-94.

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa. *Suma*, 66, pp. 89-100.

Puig, L. y Cerdán, F. (1989) *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2010) Layers of Generalization and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA, 4*, pp. 37-62.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Todorov, T. (1981). *Mikaïl Bakhtine le principe dialogique, suivi de Écrits du Cercle de Bakhtine*. Paris: Seuil.

Voloshinov, V. N. [Bajtín, M.] (1992). *El marxismo y la filosofía del lenguaje*. Traducción española de Tatiana Bubnova. Madrid: Alianza.