EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO Y PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA REGLA DEL PRODUCTO PROBABILÍSTICO

THE REASONING OF THE HIGH SCHOOL AND TEACHERS TRAINING STUDENTS ABOUT THE PRODUCT RULE OF PROBABILITIES

Sánchez. E., Mayén, S., Salazar, A.

Cinvestav-IPN, México

Resumen

Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es describir la evolución del razonamiento de estudiantes de bachillerato (15-17 años) y profesores de secundaria en formación inicial sobre la fórmula binomial. Se describen y analizan las respuestas a dos preguntas de un cuestionario de 10, que fueron elaboradas para evaluar los niveles de razonamiento de elementos de conocimiento de la fórmula binomial. Se aplicó a tres tipos de estudiantes: un grupo de bachillerato sin instrucción previa de probabilidad; un grupo de bachillerato y otro de futuros profesores que reciente e independientemente habían estudiado un curso. Se concluye con una jerarquía de razonamiento de la regla del producto de probabilidades.

Abstract

This communication is part of a wider investigation in which the goal is describe the evolution of reasoning of high school students (15-17 year-old) and teachers in pre-service about the binomial formula. The responses given by the students to two questions of a ten items questionnaire are described and analyzed. The questions were designed to determine reasoning levels of binomial formula knowledge elements. Three kinds of students were questioned: a group of high school who have not taken a probability course and other two groups that have recently and independently taken a course, one of high school and another of teachers in pre-service. The conclusion is a hierarchy of reasoning on the product rule of probabilities.

Palabras clave: *Regla del producto, jerarquía, sesgo de representatividad, estudiantes de bachillerato, profesores en formación.*

Key words: *Product rule, hierarchy, high school students, teachers in pre-service.*

Sánchez. E., Mayén, S., Salazar, A. (2012). El razonamiento de estudiantes de bachillerato y profesores en formación sobre la regla del producto probabilístico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 487 - 496). Jaén: SEIEM

Introducción

La distribución binomial es la más importante distribución discreta y forma parte del contenido de los temas del currículo de matemáticas de bachillerato y de cualquier curso introductorio de probabilidad y estadística. Los objetivos de la mayoría de programas de bachillerato establecen que los estudiantes aprendan a construir distribuciones de probabilidad de variables aleatorias elementales; a calcular e interpretar su valor esperado y su variancia; y a utilizar distribuciones en la solución de problemas (Jones, Langrall y Mooney, 2007). Esto presupone una comprensión y dominio de la fórmula binomial y de los elementos de conocimiento que la constituyen.

Varios investigadores han verificado la existencia y persistencia de sesgos cognitivos, creencias y concepciones erróneas de los estudiantes cuando resuelven tareas de probabilidad en situaciones de incertidumbre (Kahneman, Slovic y Tversky, 1972; Fischbein y Schnarch, 1997; Batanero y Sánchez, 2005); la percepción de aleatoriedad, los sesgos derivados de la heurística de representatividad, el sesgo del resultado aislado y los sesgos de equiprobabilidad y de linealidad son los más conocidos en didáctica de la probabilidad.

El sesgo de representatividad se presenta en gran variedad de situaciones; Shaughnessy (1992) opina que persiste aún después de que los estudiantes han adquirido técnicas de cálculo de probabilidades que les permitiría evitarlo. La verificación de esta persistencia pondría en entredicho la manera en que se enseña la materia. Sin embargo, a pesar de la importancia de aclarar esta cuestión, no se han encontrado investigaciones que describan y analicen cómo abordan los problemas que propician el sesgo de representatividad estudiantes recientemente preparados en los temas que permitirían superarlo. ¿Las respuestas que ofrecen éstos son similares a las de los que no han llevado el curso de probabilidad?

En este trabajo describimos y analizamos las respuestas de estudiantes sin y con enseñanza de probabilidad a dos ítems, uno conocido en la investigación, que propicia el sesgo de representatividad y otro (cuya procedimiento de solución es el instrumento para resolver el anterior) formulado de manera directa para evitar cualquier interpretación desviada. Las respuestas de los ítems analizados en este reporte ofrecen también la posibilidad de explorar y organizar los diferentes niveles de razonamiento que desarrollan estudiantes frente a estas tareas, dando lugar a una jerarquía sobre la construcción de la *regla del producto* de probabilidades. Con esto se avanza en responder a la pregunta: ¿Cómo evoluciona la comprensión de la regla del producto de probabilidad?

Antecedentes

Es escasa la literatura de investigación que explora la comprensión o razonamiento de la fórmula binomial. Van Dooren et al. (2003) exploran la presencia de la *ilusión de linealidad* y muestran que hay estudiantes de bachillerato que a pesar de haber llevado cursos de probabilidad, caen en este sesgo cuando se les plantea problemas binomiales, cuyo enunciado contiene datos que aparentan ser o son proporcionales. Cabe señalar que los autores se proponen documentar la conducta de resolución de los estudiantes que no responden correctamente a preguntas cuantitativas (hay otras similares de tipo cualitativo) y también que, en gran parte, la causa del fracaso es la ilusión de linealidad. Sin embargo, no enfocan su atención hacia los rasgos de conocimiento que manifiestan los estudiantes que ofrecen una respuesta correcta, los cuales no son pocos.

Abrahamson (2009a) realiza tres estudios de caso sobre el razonamiento de estudiantes universitarios frente a una situación simple de probabilidad hipergeométrica (la cual es casi-binomial). En Abrahamson (2009b y 2009c) se reporta una entrevista a profundidad con un niño de 11.5 años; utiliza dispositivos de mediación cuya comprensión requiere diferente niveles de abstracción. En la entrevista se muestra el proceso de construcción de una distribución (casi) binomial que lleva a cabo el niño con ayuda de la mediación de diferentes artefactos. Abrahamson (2009b) se interesa en el papel de instrumentos de aprendizaje: un dispositivo físico (marbles scooper), tarjetas cuadradas divididas en 4 partes para representar las posiciones de las canicas en el dispositivo y su organización en un histograma. Llama la atención que su diseño que tiene el propósito de que los estudiantes distingan las secuencias THHH, HTHH, HHTH, HHHT en el evento "1T y 3H" no incluya los diagramas de árbol, los cuales son un instrumento de mediación accesible para el mismo fin.

Landín y Sánchez (2010) informan de las respuestas de 66 estudiantes de bachillerato a 4 tareas relacionadas con la fórmula binomial. Tres de esas tareas inducían un sesgo cognitivo. Proponen una jerarquía para evaluar las respuestas de los estudiantes a tareas relacionadas con la fórmula binomial. En Sánchez y Landín (2011), se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento reportada en Landín y Sánchez (2010).

Perspectiva teórica

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión. Las inferencias y explicaciones que realizan estudiantes de un grupo de una edad similar y del mismo nivel educativo al resolver una tarea se pueden organizar en una jerarquía para dar cuenta de los diferentes grados de integración de esos elementos; los procedimientos más eficientes que desarrollan algunos estudiantes del grupo son un indicio, sin ser determinante, de los niveles de desempeño que pueden ser alcanzados por los sujetos de ese rango de edad y nivel educativo; mientras que los niveles inferiores ofrecen indicaciones de las dificultades que encuentran y los conocimientos clave que permiten superarlas y mejorar sus niveles de desempeño.

En la literatura de educación estadística frecuentemente se ha aplicado la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991) para el análisis o evaluación de diferentes conceptos probabilísticos y estadísticos o se han presentado propuestas de jerarquías inspiradas en SOLO. Tarr y Jones (1997) presentan una jerarquía de las nociones de probabilidad condicional e independencia; en Jones, Thornton, Langrall, y Tarr (1999) se extiende a tareas de espacio muestral, probabilidad teórica, probabilidad experimental, comparación de probabilidades, independencia y probabilidad condicional. En este trabajo se retoman los niveles que definieron estos autores en su jerarquía, pero ahora es referida a la fórmula binomial.

Metodología

El presente estudio es de tipo exploratorio y las hipótesis se han precisado o transformado de manera paralela a la observación y al análisis de los datos. En el estado actual de la investigación y para los fines de este informe se consideran las siguientes hipótesis: 1) Los conocimientos formales de probabilidad son una componente que contribuye a superar los sesgos cognitivos sin necesariamente garantizar su extinción. 2) Los conocimientos más abstractos para los estudiantes de este nivel son las combinaciones y la regla del producto de probabilidades, y para adquirirlos, los estudiantes se apoyan fuertemente en los diagramas de árbol (*instrumentos de mediación,* en terminología de Abrahamson).

Sujetos: tres grupos, uno de 31 estudiantes de bachillerato sin curso previo de probabilidad; uno de 28 estudiantes de bachillerato y otro de 18 profesores de secundaria en formación inicial, ambos con estudios previos de probabilidad.

Instrumentos: Problemas 3 y 4 de un cuestionario de 10 problemas de probabilidad, ambos relacionados con la regla del producto probabilístico y la fórmula binomial, que a continuación presentamos:

3. Considere todas las familias en las que hay 5 hijos. Se elige una familia al azar. Se supone que la probabilidad de ser mujer es igual a la de ser hombre y es igual a ½. De las siguientes afirmaciones ¿cuál es correcta?:
   a) El evento HMHMM es más probable que el evento HHHHH
   b) El evento HHHHH es más probable que el evento HMHMM
   c) El evento HHHHH es igual de probable que el evento HMHMM

Donde HMHMM significa que el mayor es Hombre, el que sigue Mujer, después Hombre y los dos menores Mujeres. HHHHH significa que todos son Hombres. Justifica tu respuesta.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que en 5 nacimientos ocurra el evento MMMMM (nacen cinco niñas)? Justifica tu respuesta.

El problema 3 es una versión de un problema que ha sido útil para confirmar un sesgo derivado de la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky, 1972). En el problema 4, se pide el cálculo de la probabilidad del evento MMMMM, mientras que el problema 3 induce un sesgo cognitivo al pedir comparar dos eventos, uno de los cuales a simple vista parece más probable que el otro (es más probable que en una familia de 5 hijos haya hijos e hijas a que solo haya hijos del sexo masculino), el problema no requiere hacer comparación alguna y la respuesta es $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

Procedimiento: Se aplicó el cuestionario a cada uno de los grupos examinados en presencia de los investigadores.

Procedimiento de análisis de datos. El análisis de las respuestas es de tipo cualitativo, y consiste en ubicarlas en diferentes niveles en función de los elementos de conocimiento que se ponen en juego y de la precisión de su ejecución. Tales elementos, para las preguntas analizadas se reducen a tres: definición clásica de probabilidad, diagramas de árbol y regla del producto.

Se elaboró una jerarquía de razonamiento siguiendo dos pasos: 1) Se definió una jerarquía teórica de cuatro niveles similares a la propuesta por Jones, Langrall y Mooney, (2007) para otros conceptos de probabilidad, en este caso, referida a la regla del producto probabilístico; 2) Con base en los resultados observados se ajustó la jerarquía de manera que se precisan rasgos o tendencias observadas en los datos que no fueron previstos en la jerarquía teórica. El resultado se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Jerarquía de Razonamiento sobre la Regla del Producto de Probabilidades

Nivel subjetivo:

- Respuesta no relacionada con la situación o influidas por el sesgo de representatividad
- Muestra rasgos de conocimientos pertinentes pero presenta diagrama de árbol defectuoso o cálculos erróneos, de modo que no llega a la solución
- Opera con los datos dados, pero de manera inapropiada, con componentes extraños o con gran cantidad de errores

Nivel transicional:

- Representación parcial o total del espacio muestral con diagramas de árbol y aplicación de la definición clásica de probabilidad. Se incluyen casos en que no llegan a la respuesta correcta, pero su procedimiento es pertinente

Nivel cuantitativo informal:

- Utiliza la regla del producto, la cual deriva de la representación de un diagrama de árbol o expresada en un árbol de probabilidades
- Expresa y utiliza la regla del producto pero comete errores de cálculo

Nivel numérico:

- Se aplica convenientemente la regla del producto de probabilidades

Resultados

Grupo de bachillerato sin cursos previos de probabilidad. Respecto al problema 3, 28 de las respuestas de estos alumnos se clasificaron en el *nivel subjetivo*, y 3 en 'sin respuesta' (Figura 4a). A su vez, estas respuestas se han agrupado en tres clases:

1) Respuestas basadas en conocimientos o experiencias personales del estudiante (conocimientos correctos o incorrectos o experiencias pertinentes o no, pero en todo caso, sin captar el aspecto teórico de la pregunta), 5 estudiantes dieron este tipo de respuesta; por ejemplo:

> *Respuesta c), Pues yo creo que es igual de probable, porque en mi caso mi familia (papá y mamá) es de HMHM y, y no me voy muy lejos, mi tía (hermana de mi papá) tuvo puros hombres y su otra hermana tuvo puras mujeres, entonces es igual de probable*

> *Respuesta a), yo digo que a) porque en la actualidad el índice de hombres predomina en las familias; hay más hombres que mujeres* [Hay que observar, además, que el inciso que está de acuerdo con la idea que expresa es el b y no el a, como dice en su respuesta]

2) Respuestas que eligen el inciso a, probablemente influidos por el sesgo de representatividad y que la "explicación" consiste sólo en la afirmación de la opción elegida, 12 estudiantes dieron este tipo de respuesta, por ejemplo:

> *Respuesta a), El evento HMHMM es más probable que HHHHH ya que es más probable que algunos sean mujeres a que todos sean hombres*

> *Respuesta a), es correcto; es el inciso a) ya que es más probable que haya más mujeres con hombres que sólo hombres*

3) Respuestas que infieren que a partir de la igualdad de los sexos, la secuencias de “Hs y Ms” son equiprobables, pero con explicaciones imprecisas o vagas, detrás de ellas se percibe que hay una intuición correcta pero con escaso nivel de elaboración verbal; 8 respuestas fueron de este tipo; en ningún caso se basan en diagramas de árbol o en operaciones aritméticas o combinatorias.

c) la Respuesta correcta es el inciso c. Ya que existe la misma probabilidad de que nazca un niño ó una niña”

c*) porque Mujeres y Hombres tienen exactamente la misma probabilidad*

En relación al problema 4 (sin sesgo), 26 respuestas de este grupo se clasificaron en el nivel subjetivo, 4 en el transicional y 1 no contesta. En el *nivel subjetivo* se observan tres tipos de respuestas: las que presentan textos y rasgos incoherentes (12), las que se basan en una información u opinión personal (6) y las que sólo afirman que la probabilidad de ambas secuencias es ½, derivada de la probabilidad de los eventos H y M (8). Las respuestas clasificadas en *nivel transicional* presentan árboles incompletos y la utilización de la definición clásica de probabilidad.

Grupos con cursos previos de probabilidad. En relación con el problema 3*,* de las 28 respuestas de los estudiantes de bachillerato, 9 se clasifican en el nivel subjetivo, 17 en transicional, 1 en cuantitativo informal y 1 no responde. De las respuestas de los profesores en formación, 8 se clasifican en nivel subjetivo, 7 en transicional, y 2 en cuantitativo informal. La distribución de las respuestas de ambos grupos es similar, aunque con un ligero mejor desempeño en los futuros profesores; las respuestas de estos fueron más limpias y ordenadas, pero con niveles de razonamiento análogos a los del grupo de bachillerato. A continuación se describen los rasgos principales encontrados en las respuestas de ambos grupos.

Las explicaciones que se ubican en el nivel subjetivo, son incoherentes o no ofrecen justificación alguna, a pesar de que en algunos casos eligieron la opción correcta (Figura 1):

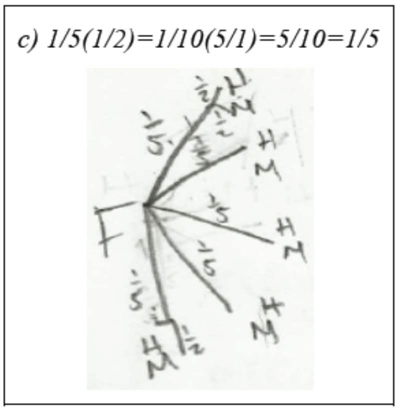
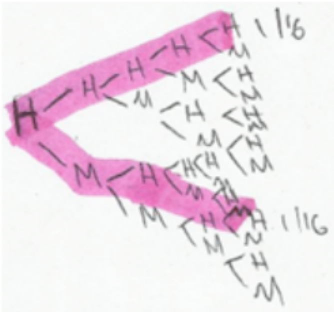


Figura 5. Respuesta del nivel subjetivo

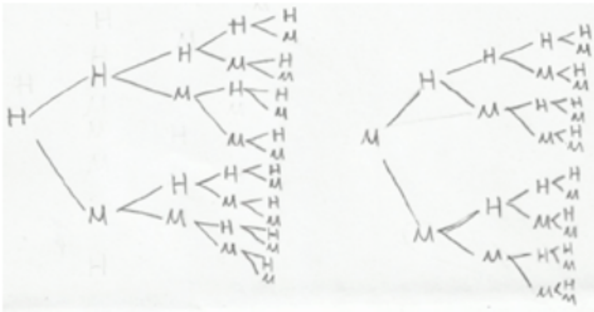
Las respuestas del nivel transicional eligen la opción adecuada, usan árboles parciales o completos, afirman que la probabilidad de cada secuencia es ½ y exhiben un árbol combinatorio, de donde deducen que ambas secuencias tienen la misma probabilidad; en algunos casos exhiben el árbol y encuentran e indican la probabilidad 1/32, sin embargo, no hacen comentarios suficientes o eligen una opción incorrecta (Figura 2).



P(HHHHH)=1/16

P(HMHMM)=1/16

Por lo tanto es el inciso (c) ya que sería igual de probable a un 1/16

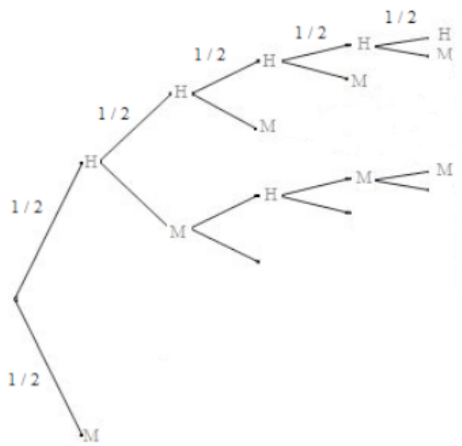


a) P(x)=1/32

Figura 6. Respuestas del nivel transicional

Es importante señalar que en 2 respuestas del grupo de bachillerato y 5 de los futuros profesores no hay errores importantes, y fueron clasificadas en este nivel, ya que en ellas se elabora un árbol, se encuentra la probabilidad 1/32 y se elige la respuesta correcta. Estas respuestas están en la frontera entre transicional y cuantitativo informal; se distinguen del resto de las clasificadas en transicional en que no contienen errores, pero no se clasifican en cuantitativo informal debido a que en su justificación no muestran conocimiento de la regla del producto.

Del grupo de futuros profesores, sólo una respuesta se encuentra en nivel cuantitativo informal pues deriva el producto a partir de un árbol de probabilidades (Figura 3):



Inciso c

$$P(HHHHH) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}.$$

$$P(HMHMM) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}.$$

La probabilidad es la misma puesto que un evento solo puede ocurrir una vez.

Figura 7. Respuesta del nivel cuatitativo informal

No hubo ninguna respuesta clasificada en el nivel numérico, ya que ninguna se basó solamente en una aplicación directa de la regla del producto de probabilidades.

Respecto al problema 4, de las respuestas de los estudiantes de bachillerato se clasificaron 14 en subjetivo, 8 en transicional, 5 en cuantitativo informal y 1 no contestó. En el caso de las subjetivas, 4 proponen 1/3 o 1/5, el 3 asociado a los 3 eventos exhibidos en el problema anterior y el 5 al tamaño de las secuencias. 5

proponen un diagrama de árbol defectuoso y obtienen un número alejado de la solución. 3 proponen 1/16, pero sin ofrecer indicaciones de cómo lo obtuvieron.

Las Figuras 4 y 5 muestran las frecuencias de respuestas a los problemas 3 y 4, según nivel de razonamiento.

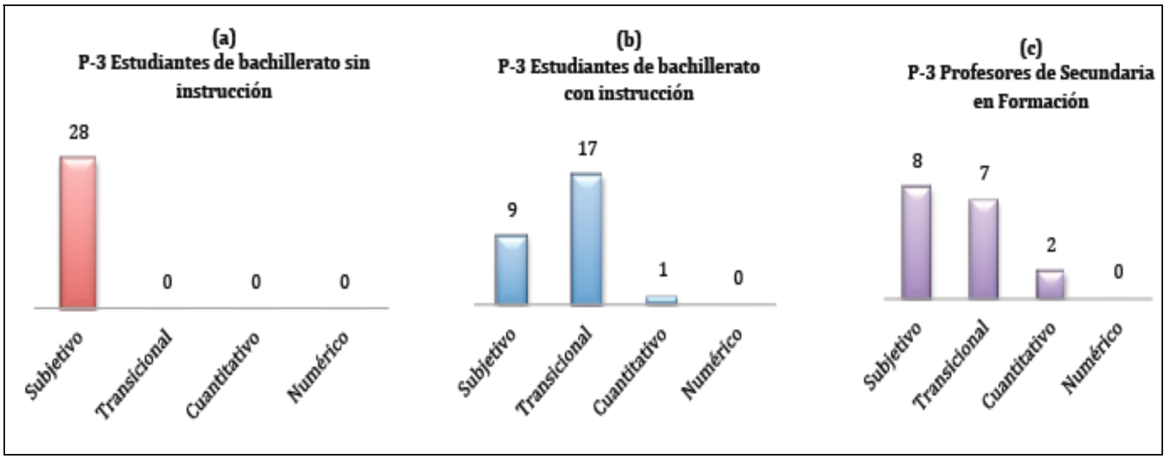


Figura 8. Frecuencias de respuesta al problema 3, según niveles de razonamiento

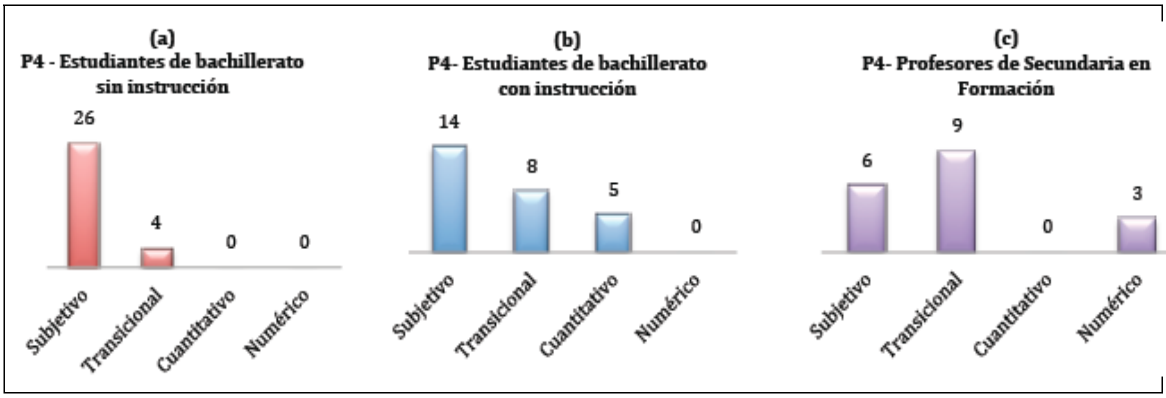


Figura 9. Frecuencias de respuesta al problema 4, según niveles de razonamiento

Conclusión

Respecto a la relación entre el sesgo de representatividad y el conocimiento de probabilidad, se pudo observar que sólo los estudiantes que no estudiaron probabilidad respondieron a la pregunta con base en la heurística de representatividad; además las respuestas de éstos a la pregunta 4 fueron clasificadas en el nivel subjetivo, de modo que no muestran conocimientos de los elementos que hubieran permitido resolver el problema; por otro lado, en las respuestas de los grupos que tuvieron cursos de probabilidad, clasificadas en el nivel subjetivo, sólo un caso puede considerarse influido por la heurística de representatividad; no es posible entonces apoyar la afirmación de que el sesgo persiste aún después de haber adquirido los conocimientos de probabilidad.

Las herramientas que la mayoría de estudiantes de este nivel utilizan para resolver los problemas son la regla clásica de probabilidad y los diagramas de árbol. Estos conceptos o elementos de conocimiento marcan la diferencia entre el nivel subjetivo y el nivel transicional. Las respuestas en este nivel aún no utilizan la regla del producto probabilístico. En el siguiente nivel jerárquico ya se reflejan estos aspectos, y además también se consideran los posibles errores de ejecución que frecuentemente impiden llegar a la respuesta correcta a pesar de manifestar elementos de conocimiento pertinentes.

Una aportación del análisis mediante una jerarquía es que ofrece información sobre los elementos de conocimiento que les permite a los estudiantes superar el sesgo de representatividad. En las respuestas se aprecia que el uso de diagramas de árbol inhibe la posibilidad de la presencia de este sesgo y que además es un puente para construir la regla del producto. La información que proporciona el análisis mediante una jerarquía, en contraste con los resultados de von Doreen et al. (2003), es que se revisan tanto las causas de los fracasos como las del éxito. Los resultados aquí encontrados también sugieren que para hacer emerger la importancia de la distinción de arreglos ordenados es recomendable considerar en el diseño de situaciones el papel de 'instrumentos' como los diagramas de árbol; la propuesta de utilizar para este fin un dispositivo (como marbles scooper) (Abrahamson, 2009b), es interesante pero los diagramas de árbol también se pueden convertir en instrumentos en el mismo sentido, además de ser útiles para construir la regla del producto de probabilidades.

Reconocimientos

Este trabajo es parte del proyecto 101708, financiado por CONACYT: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México.

Referencias

Abrahamson, D. (2009a). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), pp. 27-47.

Abrahamson, D. (2009b). Orchestrating semiotic leaps from tacit to cultural quantitative reasoning –the case of anticipating experimental outcomes of a cuasi-binomial random generator. *Cognition and Instruction,* 27(3), pp. 175-224.

Abrahamson, D. (2009c). A students synthesis of tacita and mathematical knowledge as a researcher's lens on bridging learning theory. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), pp.195-226. [En línea: www.iejme.com]

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G.A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Biggs, J.B. y Collis, K.F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H.A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Jones, G.A., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in probability. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 909-955. Charlotte, NC, USA: Information Age-NCTM.

Jones, G.A., Thornton, C.A., Langrall, C.W. y Tarr, J.E. (1999). Understanding students probabilistic reasoning. En L. V.Stiff & F. R.Curcio (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12 (1999 yearbook, pp. 146-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjetive probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psichology,* 3(3), 430-454.

Landín, P., Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), pp.598-618.

Sánchez, E., y Landín, P.R. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Rodriguez, G. García, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 533-541). Ciudad Real: SEIEM.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*. Reston, Va., USA: National Council of Teachers of Mathematics

Tarr, J. E. y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students´ thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9 (1), 39-59.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), pp. 113-138.