CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN: EXPLORANDO EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA DERIVADA

PROSPECTIVE TEACHERS' DIDACTIC-MATHEMATICS KNOWLEDGE: EXPLORING THE SPECIALIZED KNOWLEDGE ABOUT THE DERIVATIVE

Pino-Fan, L.R. (1), **Godino, J.D.** (1), **Castro, W.F.** (2) , **Font, V.** (3)

Universidad de Granada (1), *Universidad de Antioquia* (2), *Universitat de Barcelona* (3)

Resumen

El estudio sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea efectiva, ha sido motivo de estudio en los últimos 30 años. Sin embargo, las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar aspectos sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre temas específicos no son numerosas. En el presente trabajo se informa sobre algunos resultados obtenidos a partir de la aplicación de un instrumento que se ha diseñado para explorar aspectos relevantes la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de bachillerato.

Abstract

The study on the knowledge that a mathematics teacher needs to achieve an effective teaching has been studied in the last 30 years. However, there is scarcity of instruments designed to explore aspects of the didactic-mathematics knowledge of teachers on specific topics. In this paper we present some results obtained from the implementation of a test designed to explore some important aspects on the epistemic facet of the didactic-mathematics knowledge about the derivative of prospective high school teachers.

Palabras clave: *Formación de profesores, conocimiento del profesor, enfoque ontosemiótico, faceta epistémica, derivadas.*

Key words: *Teacher's training, teacher's knowledge, onto-semiotic approach, epistemic facet, derivative.*

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F., Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM

Antecedentes

Una de las problemáticas que más ha interesado a la comunidad de investigadores interesados en la formación matemática y didáctica de los futuros profesores, es la de determinar el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986), las investigaciones de Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas (Godino, 2009). El problema que se aborda en esta investigación, siguiendo las recomendaciones de Badillo, Azcárate y Font (2011), es el conocimiento que requiere el profesorado de bachillerato para enseñar el objeto derivada.

Existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores, y menos aún, en los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción (Gavilán, 2005). Dentro de las investigaciones centradas en el profesor y la derivada se encuentran: 1) las que estudian aspectos de su práctica profesional y 2) aquellas que estudian sus creencias y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la derivada. Estas investigaciones ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo.

El objetivo de esta comunicación es informar sobre los resultados de la aplicación de un instrumento diseñado para explorar, de manera específica, aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación inicial, sobre la derivada. Concretamente, centramos nuestra atención en dos niveles del conocimiento especializado para los cuales se proponen categorías de análisis.

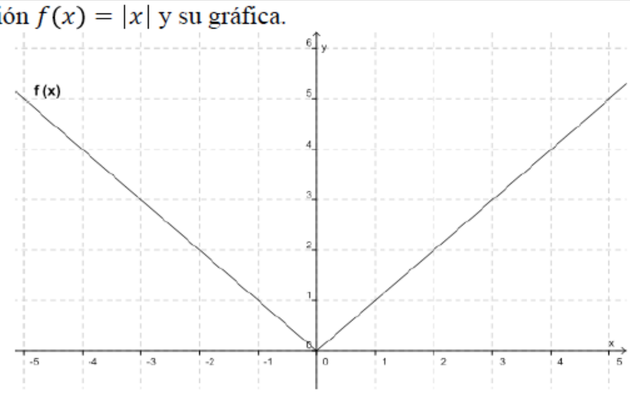
El diseño del instrumento

Como parte del proceso de diseño del instrumento se creó un banco de problemas los cuales han sido estudiados en las diversas investigaciones realizadas en didáctica del cálculo. Posteriormente se eligieron aquellas que cumplieran tres criterios clave de la faceta epistémica: 1) globalidad de significados del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011); 2) diversidad de representaciones (Font, 1999); y 3) tipo componente de la faceta epistémica que se evalúa, es decir, conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento ampliado. El cuestionario se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, et al., 2001; Hill, et al., 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común, conocimiento especializado* y *conocimiento ampliado*.

En la Figura 1 se ilustra una de las tareas del instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM sobre la derivada. Si bien es cierto que sólo discutiremos una tarea, la misma ilustra el estudio de dos niveles del conocimiento especializado, lo cual es el foco de atención de este documento. Dicha tarea, de la cual tomamos sin cambios los ítems a), b) y c), ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones (Tsamir, et al., 2006; Santi, 2011) e indaga dos componentes del CDM: 1) conocimiento común (ítem a), en tanto que el futuro profesor debe solamente resolver el ítem, sin necesidad de utilizar diversas representaciones o argumentaciones; y 2) conocimiento especializado (ítems b, c y d), ya que demandan al profesor, además de resolver los ítems, el uso de representaciones (gráficas, simbólicas y verbales) y argumentaciones que justifiquen sus procedimientos. En la tarea se ponen en juego dos significados de la derivada: como pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación.

Cabe señalar que la tarea presentada en la Figura 1, evalúa *dos niveles de conocimiento especializado*. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben *hacer uso* de objetos matemáticos primarios, es decir, diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos para resolver la tarea (ítems *b* y *c*). El segundo nivel refiere a la competencia de los profesores para *reconocer explícitamente* los objetos matemáticos primarios, mencionados anteriormente, en la resolución de una tarea sobre derivadas (ítem *d*).

2. Examina la función $f(x) = |x|$ y su gráfica.



a) ¿Para qué valores de x es derivable $f(x)$?
b) Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
c) Si es posible, calcula $f'(0)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
d) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver este problema?

Figura 1. Tarea 2 del instrumento para evaluar el CDM sobre la derivada

En el siguiente apartado se abordan algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado, en términos de los objetos matemáticos y significados asociados que propone el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, et al., 2007): *elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos*. Estos objetos y significados se agrupan en varios procesos que se explicitan en términos de dualidades (representación – significación; composición – descomposición; particularización – generalización; materialización - idealización). Estos procesos pueden intervenir simultáneamente en la realización de una práctica matemática y su reconocimiento explícito e individualizado por parte del profesor, es necesario para prever posibles dificultades de los estudiantes en la realización de la misma.

Aspectos relevantes del conocimiento especializado

Una de las características fundamentales de los ítems incluidos en el cuestionario sobre el conocimiento especializado, es la reflexión, de los futuros profesores, sobre los objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego con motivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las relaciones entre objetos y significados se concreta y se operativiza mediante la noción de *configuración de objetos y procesos* (Godino, et al., 2007). Dicha noción favorece no sólo la identificación sistemática de diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, sino también la identificación de argumentaciones o justificaciones de los procedimientos y las propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y de las variables didácticas que intervienen en la misma, orientan la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

A continuación se presenta sucintamente, a manera de ejemplo, el análisis epistémico para una posible solución de la tarea presentada en la Figura 1. En dicho análisis se identifican detalladamente los objetos centrales (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), y procesos que intervienen en el enunciado y en la solución esperada de la tarea. Para su realización nos apoyamos, en parte, en una guía para el reconocimiento de objetos y procesos desarrollada en Godino, Gonzato y Fernández (2010). Dicho análisis forma parte del conocimiento especializado que se espera que los futuros profesores manifiesten, y su promoción debe comenzar desde los cursos de formación inicial.

Proceso de Representación − Significación

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos previos y emergentes. Algunos elementos previos identificados son la representación algebraica de la función valor absoluto de x ($f(x) = |x|$) y su representación gráfica, la representación notacional de la imagen de la función derivada en el punto $x = 2$ ($f'(2)$), y la representación notacional de la imagen de la función derivada en el punto $x = 0$ ($f'(0)$). Como elementos emergentes podemos encontrar la representación notacional que describe el dominio de la función derivada ($\mathbb{R} - \{0\}$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, etc.), la representación gráfica y notacional de la imagen de la función derivada en los puntos $x = 2$ y $x = 0$, así como la representación gráfica de la función derivada de la función "valor absoluto de x".

Algunos de los conceptos previos necesarios para la resolución del problema son: el valor absoluto y su definición, el concepto de función (función valor absoluto), dominio (valores de x para los cuales las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ están definidas), imagen (valor $y \in \mathbb{R}$ que se le asigna a cada uno de los valores $x \in \mathbb{R}$ del dominio de la función por medio de una regla de correspondencia) y continuidad. Algunos conceptos emergentes son: el límite, límites laterales, derivada (en el sentido de pendiente de la recta tangente y límite del cociente de incrementos) y derivadas laterales.

Proceso de Composición − Descomposición

A partir de los elementos lingüísticos y conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos. Algunas proposiciones son: las reglas de correspondencia para las funciones $f(x)$ y $f'(x)$, la continuidad o discontinuidad de dichas funciones, la derivabilidad de una función en un punto crítico, y la relación entre continuidad y derivabilidad.

Mediante el análisis del tipo de elementos lingüísticos, los conceptos y propiedades empleados en las resoluciones, pueden identificarse tanto los procedimientos usados para resolver una tarea como los argumentos que organizan los objetos y los significados, y que constituyen, en conjunto, la justificación o explicación provista para la tarea. Un posible procedimiento se presenta en la Figura 2.

Para saber si existe la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, debemos verificar que el $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

Para este caso particular, el $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ no existe, ya que:

$$\text{Si } h > 0, \text{ entonces } f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{Si } h < 0, \text{ entonces } f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Por tanto, dado que las derivadas laterales en x = 0 son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Figura 2. Posible resolución del apartado c) de la tarea presentada en la Figura 1

El procedimiento presentado en la Figura 2 puede valorarse como formal dado que los elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones empleados para comprobar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, se articulan en torno a la expresión formal de la derivada (límite del cociente de incrementos). Es decir, el procedimiento se centra en la comprobación de la existencia de la derivada en un punto mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. El carácter de formal concedido al procedimiento se basa en la sentencia: “dado que las derivadas laterales son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$”.

Análisis similares pueden realizarse con otras resoluciones de la tarea, que pongan en juego otros procedimientos y justificaciones que involucren distintos elementos lingüísticos, conceptos y proposiciones. En este sentido los procesos de significación no tienen configuraciones únicas.

Proceso de Particularización − Generalización

La tarea de la Figura 1, plantea un caso particular de la derivabilidad de una función en un punto crítico: “la derivabilidad de la función valor absoluto de x en $x = 0$ ”. La tarea admite posibles generalizaciones que requerirían de los futuros profesores de bachillerato la puesta en práctica de conocimientos especializados y avanzados. Por esta razón, este proceso está estrechamente vinculado con la transición del conocimiento común y especializado al conocimiento avanzado de los futuros profesores.

Ejemplo de una posible generalización sería argumentar por qué la gráfica de una función derivable no puede tener “picos” (esquinas, puntas o ángulos).

Proceso de Materialización − Idealización

Estos procesos son de suma importancia si se quieren explorar los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los futuros profesores sobre temas específicos de matemáticas, puesto que mediante la manifestación de los objetos materiales los futuros profesores exhiben su comprensión de objetos ideales (y viceversa) tales como la derivada y, en general, los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen sobre dicho objeto.

La tarea presentada en la Figura 1 requiere que, a partir de objetos materiales (ostensivos) tales como la representación gráfica y algebraica de la función y de los distintos conceptos y definiciones, el futuro profesor atribuya significado a objetos matemáticos ideales emergentes, tales como la derivada, la derivada en un punto, la derivabilidad de una función en un punto crítico.

Resultados y discusión

El Cuestionario *CDM-derivada* se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. La duración de la licenciatura es de cuatro años (8 semestres). La Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

Los 53 estudiantes cursaron cálculo diferencial en el primer año de su licenciatura y, a lo largo de ella, han tomado otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También han cursado materias relacionadas con la didáctica de las matemáticas.

Para el análisis de los resultados obtenidos consideramos variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems) y cualitativas (análisis del tipo de resolución dado a cada tarea, ver apartado 3). Por esta razón nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

A continuación se ejemplifica, con la tarea de la Figura 1, el tipo de análisis que hemos realizado con cada una de las 11 tareas incluidas en el cuestionario. La Tabla 1 presenta los resultados para el grado de corrección: *respuesta correcta*, *parcialmente correcta* o *incorrecta*, de las respuestas de los futuros profesores.

Tabla 4

Frecuencias y Porcentajes del Grado de Corrección de la Tarea dada en la Figura 1

Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,4	22	41,5	19	35,8
Parcialmente C.	0	0	10	18,8	15	28,3
Incorrecta	10	18,8	15	28,3	13	24,5
No contestan	3	5,6	6	11,3	6	11,3
Total	53	100	53	100	53	100

Se aprecia de la Tabla 1, que un elevado número de los futuros profesores presentaron dificultades para dar respuesta a los apartados b) y c). Así mismo, hemos calculado el grado de corrección global de la tarea, resulta que el 13,2% (7) resolvió de manera incorrecta la tarea, el 69,8% (37) la resolvió parcialmente correcta y el 16,9% (9) la resolvió de forma correcta. Dado que los apartados b) y c) están relacionados con el conocimiento especializado del contenido, los resultados revelan que más de la mitad de los futuros profesores exhiben carencias respecto a este tipo de conocimiento.

Además, a partir del análisis cualitativo de las resoluciones dadas por los futuros profesores, se identificaron tres tipos de procedimientos (y sus argumentos), es decir, tres tipos de soluciones que tienen asociada una configuración particular de objetos y procesos. A estos 3 tipos de resolución los hemos denominado: gráfico-verbal, técnica y formal. Los resultados respecto al tipo de resolución se presentan en la Tabla 2. Cabe aclarar que el análisis cualitativo (tipo de solución descrita en términos de configuración cognitiva), consistió en la identificación de los objetos y procesos, como el presentado en el apartado 3, asociados a las respuestas.

Tabla 5

Frecuencias y Porcentajes del Tipo de Solución de la Tarea dada en la Figura 1

Tipo de resolución	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	47	88,6	12	22,6	29	54,7
Técnica	2	3,7	33	62,2	13	24,5
Formal	1	1,8	1	1,8	3	5,6
No dan solución	3	5,6	7	13,2	8	15
Total	53	100	53	100	53	100

Se observa que un porcentaje elevado de los futuros profesores proporcionan una resolución gráfico-verbal para los apartados a) y c) (e.g., "…no es derivable en x = 0 ya que se pueden trazar infinitas tangentes a la función en ese punto"). Para el apartado b) la mayoría de los futuros profesores proporciona una resolución técnica (i.e., mediante el uso de reglas de derivación y la definición de valor absoluto), y el 9.4% (5) proporcionaron una resolución formal en alguno de los apartados.

Por limitaciones de espacio no se incluyen los resultados del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes al apartado d). En general, los futuros profesores han tenido dificultades para identificar los conocimientos requeridos para resolver la tarea. A pesar de que no han respondido satisfactoriamente al apartado d) se pueden inferir de la configuración de objetos y significados asociada a las "soluciones", los conflictos de significado, información muy importante en los procesos de formación.

Reflexiones finales

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las resoluciones que los futuros profesores dieron a las cuestiones incluidas en el Cuestionario CDM-Derivada, señalan que los futuros profesores exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común y el conocimiento especializado. Las resoluciones dadas a los ítems sobre el conocimiento especializado (ver apartado d, Figura 1) se circunscriben a la enumeración de algunos conceptos matemáticos. Esto hace advertir insuficiencias en el segundo nivel del conocimiento especializado manifestado por los futuros profesores, que podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento de sus futuros estudiantes.

Se observó el predominio de resoluciones de tipo gráfico-verbal (mediante el uso de la derivada en el sentido de pendiente de la recta tangente) y técnicas (mediante el uso de las reglas de derivación).

La aparente desconexión entre el conocimiento común y especializado podría obstaculizar la transición hacia el conocimiento ampliado, ya que al desconocer procedimientos y argumentos formales (como los de la sección 3.2) se dificulta el tránsito hacia eventuales generalizaciones y conexiones con objetos matemáticos más avanzados presentes en el currículo.

Parece justificada la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. El desarrollo podría lograrse mediante el diseño de procesos de enseñanza de la derivada, distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada (Pino-Fan, et al., 2011). En el diseño de dichas acciones formativas, debe tenerse en cuenta el conocimiento especializado en sus dos niveles. Por un lado, el uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos; y por otro el desarrollo de competencias para el reconocimiento explícito de objetos matemáticos, sus significados y vínculos entre ellos.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, EDU2010-14947 (Universidad de Granada) y EDU2009-08120 (Universidad de Barcelona).

Referencias

Badillo, E., Azcárate, C., y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos *f'(a)* y *f'(x)* en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, España.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Fernández, L. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa, 13*(1), 142-178.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics,* 77(2-3), 285-311.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tsamir, P., Rasslan, S., y Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 25, 240-251.