



Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas*

Bernardo García Quiroga**

Arnulfo Coronado***

Leonardo Montealegre Quintana****

Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas

El artículo plantea una postura teórica sobre el proceso de formación y desarrollo de competencias matemáticas, argumentando desde el enfoque sociocultural unos conceptos que, a juicio de los autores, contribuyen a resignificar el concepto de competencias matemáticas. Los planteamientos teóricos asumidos se hacen en el marco de una visión contemporánea de la didáctica de las matemáticas.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, competencias matemáticas, conocimiento, pensamiento, lenguaje, actividad.

Formation and development of mathematical competences: a theoretical perspective in the didactics of mathematics

This article presents a theoretical perspective about the process of formation and development of mathematical competences, by using the sociocultural perspective to explain some concepts that, according to the authors, may resignify the concept of mathematic competences. The theoretical formulations used in this article make part of a contemporary vision of the didactics of mathematics.

Key words: Didactics of mathematics, mathematic competences, knowledge, thinking, language, activity.

Formation et développement de compétences mathématiques: une perspective théorique dans la didactique des mathématiques

L'article propose une posture théorique sur le processus de formation et développement des compétences mathématiques, en argumentant depuis l'approche socioculturelle quelques concepts que selon les auteurs contribuent à resignifier le concept de compétences mathématiques. Les propositions théoriques reprises sont faites dans le cadre d'une vision contemporaine de la didactique des mathématiques.

Mots clés: Didactique des mathématiques, compétences mathématiques, connaissance, pensée, langage, activité.

* Este artículo forma parte de los desarrollos teóricos adelantados por el grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado, en el marco de la investigación "Formación y desarrollo de competencias matemáticas a partir de la investigación en didáctica de las matemáticas", como parte del programa de investigaciones de la Maestría en Ciencias de la Educación, Facultad de Educación, Universidad de la Amazonía, 2009.

** Profesor-investigador titular, Maestría en Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonía. Doctor en Ciencias Pedagógicas, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas (ICCP), la Habana, Cuba.
E-mail: bgarciaquiroya@hotmail.com

*** Profesor asociado, adscrito al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad de la Amazonía. Magíster en Docencia de las Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Bogotá.
E-mail: arcoronado_123@yahoo.es

**** Catedrático en Didáctica de las Matemáticas, programa Licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad de la Amazonía. Magíster en Docencia de las Matemáticas, UPN, Bogotá.
E-mail: leonarmont@gamil.com

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son procesos sociales de creciente complejidad teórica y metodológica. Por un lado, la didáctica de las matemáticas ha evolucionado hasta convertirse hoy en una disciplina científica (Gascón, 1998: 8) y como tal, aborda su objeto de estudio en el marco de su propósito esencial: estudiar científicamente los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos educativos institucionalizados. Por otro, las rupturas epistemológicas y ontológicas en matemáticas y en didáctica de las matemáticas, implican replanteamientos sobre el rol del maestro y del estudiante, sobre la enseñabilidad de la matemática y sobre su desarrollo didáctico y curricular.

Estos replanteamientos conllevan a asumir que el conocimiento matemático no es una réplica objetiva de una única realidad externa al sujeto, sino una construcción personal y social de significados, el resultado de una evolución histórica, un proceso cultural en permanente desarrollo, situado en un contexto específico (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008).

En este proceso, la interacción y la intersubjetividad de los sujetos que construyen y reconstruyen sus representaciones son esenciales para hacer posible la enseñanza y el aprendizaje de calidad y, en consecuencia lógica, para asumir, en el marco de la didáctica de las matemáticas, el complejo proceso de formación y desarrollo de competencias matemáticas (García et ál., 2009: 12).

En Colombia, durante la última década, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), a través del Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación (Sinec), ha expandido el uso generalizado del concepto de *competencia* a todos los ámbitos de la educación, con la aplicación de las pruebas masivas de evaluación de la calidad de los aprendizajes y de la calidad de la educación (pruebas de Estado "Icfes", Saber y Ecaes). En esa dirección, el MEN ha establecido el desarrollo de competencias matemáticas como el eje transversal en la actual propuesta de lineamientos curriculares y estándares básicos de calidad en el área de matemáticas. Lo que no quiere decir, desde luego, que así ocurra efectivamente entre los maestros en sus prácticas pedagógicas y didácticas coti-

dianas, como tampoco que éstas sean conceptualizadas coherentemente en las instituciones y centros educativos del país, desde sus proyectos educativos institucionales.¹

El concepto de *competencias* es complejo, dinámico y polisémico (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008: 11). En este texto se aborda este concepto, en principio, en el marco de la didáctica de las matemáticas y se proponen para ello dos aspectos específicos: 1) una aproximación filosófica y epistemológica a la concepción de competencias, convencidos de que las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas ejercen una influencia determinante sobre la educación en general y la educación matemática en particular (Moreno y Waldegg, 1992: 7); y 2) una contribución al desarrollo teórico sobre el proceso de formación y desarrollo de competencias matemáticas, a partir de la enseñanza y aprendizaje de esta área.

Se trata de una elaboración no acabada, que pretende contribuir a la reflexión académica necesaria para construir una concepción de *competencias matemáticas* como aporte a la construcción de un eje conceptual transversal del programa de investigación de la Maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en didáctica de las matemáticas, eje centrado en problemas didácticos y curriculares, característicos de los niveles de formación básica, media y superior. En este programa, uno de los proyectos en ejecución es la "Formación y desarrollo de competencias matemáticas, a partir de la investigación en didáctica de las matemáticas" que adelanta actualmente el

grupo de investigación Desarrollo Institucional Integrado.²

Conceptos centrales que subyacen al concepto de *competencia*

Al concepto de *competencia* le subyacen un conjunto de conceptos esenciales, imprescindibles en su construcción. Tales conceptos, con frecuencia, son usados en el trabajo didáctico y curricular de los maestros y de los expertos del MEN, sin que necesariamente coincidan en su significado y, por tanto, en su aplicación e implicaciones en el proceso de la formación humana que desarrolla la escuela como institución de saber.

En ese sentido, se plantean a continuación estos conceptos, toda vez que, según el punto de vista filosófico y epistemológico en que se asuman, se requerirá precisar sus implicaciones en los procesos didácticos y curriculares; la concepción de competencias que se adopte va a soportarse teóricamente sobre ellos. Además, son estos conceptos los que delimitarán con claridad el tipo de trabajo didáctico y curricular en matemáticas para la formación y el desarrollo de las competencias de los estudiantes.

Es decir, se trata de situar el concepto de *competencias* en el complejo proceso de formación y desarrollo de un *ser humano*, en permanente *actividad* y con *capacidades* para acceder a nueva información y apropiarse de nuevo *conocimiento*; para enfrentar con *su pensamiento* la incertidumbre y la complejidad de los

- 1 En este sentido, compartimos plenamente la cita de Elsie Rockwell: "La norma educativa oficial no se incorpora a la escuela de acuerdo con su formulación explícita original. Es recibida y reinterpretada dentro de un orden institucional existente y desde diversas tradiciones pedagógicas en juego dentro de la escuela [...] El contacto que los educandos tienen con los conocimientos expuestos en el programa oficial es, necesariamente, mediado por la práctica institucional" (citado por Fortoul, 2006: 4).
- 2 Grupo de investigación de la Universidad de la Amazonía, Florencia, Caquetá, Colombia. Categorizado en Colciencias grado C, que formuló el proyecto de la Maestría en Ciencias de la Educación, el proyecto para la creación del énfasis en Didáctica de las matemáticas, y el proyecto de investigación "Formación y desarrollo de competencias matemáticas, a partir de la investigación en didáctica de las matemáticas", actualmente en desarrollo. Es el grupo responsable, en la Maestría en Ciencias de la Educación, de las actividades de docencia e investigación.

problemas generados por la nueva sociedad del conocimiento, y para, desde *el trabajo, el lenguaje y el pensamiento*, contribuir a la transformación de la sociedad en la que históricamente se sitúa.

Se propone, entonces, que la concepción y la interrelación entre los conceptos de *ser humano, actividad, capacidad, conocimiento, pensamiento y lenguaje*, situados histórica, social, política y culturalmente, estructuren la columna vertebral para construir un concepto de *competencias* como eje transversal de un programa de investigaciones centrado en las líneas de didáctica y currículo.

Relación entre ser humano y conocimiento

Aristóteles plantea que todos los hombres tienen por naturaleza el deseo de saber, la capacidad para aprender y “poseen una potencia —facultad— que se expresa en actos —actuaciones— particulares” (Torres, 2001, citado por Tobón, 2006: 25).

En este texto, se asume al ser humano como

[...] una realidad biológica, psicológica, social y cultural que se concreta en los individuos, pero que es a la vez comunitaria y social, en cuanto sus contenidos sicosociales están determinados históricamente por las condiciones de desarrollo de las fuerzas productivas y las manifestaciones socio-económicas de ese momento de desarrollo (Tapiero et ál., 2007: 47).

Como ser humano, el hombre trasciende su naturaleza biológica y, gracias al trabajo, como actividad humana fundamental, se separa de los demás animales y consolida como especie

su proceso de hominización. En este histórico y complejo proceso, construye y utiliza instrumentos materiales y simbólicos para

[...] rehacer el mundo exterior, formar y desarrollar sus propiedades humanas, crear su mundo social especial en el que puede existir. Este mundo, el conjunto de relaciones sociales, no representa algo externo al hombre, sino que constituye su “esencia”, es decir, hace del hombre un ser social, forma y determina todas las peculiaridades de su actividad [...] (Blauberg, Kopnin y Pantin, s. f.: 86).

Para constituirse como actor central en los procesos sociales de producción, el ser humano desarrolla, además de su naturaleza biológica, una segunda naturaleza, que determina su carácter social y cultural; para ello ha de incorporar la herencia cultural históricamente decantada, de tal manera que él es, a la vez, creador y producto histórico del desarrollo sociocultural de la especie. Desde esta postura, el ser humano es un sujeto educable, autoeducable y educador.

La educabilidad del ser humano implica que se encuentra en continuo proceso de transformación y perfectibilidad. Esta potencialidad está articulada a las condiciones socioculturales históricas en que los sujetos se desarrollan. Es desde esta potencialidad desarrolladora que el ser humano accede a la enseñabilidad de las ciencias, toda vez que puede apropiarse de los discursos científicos como herencia cultural y, creadoramente, enriquecerlos e incorporarlos a su formación cognitiva, afectiva, volitiva, ética y política. La calidad de este proceso de apropiación cultural es esencial en la formación y el desarrollo de competencias “reales”³ en la escuela.

3 Este modelo epistemológico conlleva a reconocer la naturaleza social del aprendizaje mediado por el contexto histórico cultural del ser humano y el contexto de la escuela; en razón a la importancia de la mediación de estos contextos en las actividades de aprendizaje, romper las barreras de los contextos del aula y de la escuela, para

Al apropiarse y enriquecer la herencia científica y cultural, decantada históricamente de generación en generación, el ser humano crea objetos de conocimiento, actúa sobre ellos y los transforma de manera favorable a sus intereses. Estos objetos de conocimiento, en relación de recíproca influencia, también transforman las estructuras mentales del sujeto y la estructura de su conciencia. Por ello, el conocimiento es producto del trabajo del ser humano, de su actividad sobre el mundo material, social y cultural, desde la investigación como práctica social históricamente condicionada.

El conocimiento es “el proceso histórico-social de la actividad humana orientado a reflejar la realidad objetiva en la conciencia del hombre” (Blauberg, Kopnin y Pantin, s. f.: 35). Este proceso, de complejidad creciente, tiene como fin central aprehender, reflejar, captar con progresiva rigurosidad, la esencia del objeto de estudio, de la realidad en continuo movimiento y desarrollo.

Al admitir relaciones de influencia recíproca entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento, se afirma también que lo que puede ser conocido no es independiente del sujeto que conoce, sino que, como objeto de conocimiento, está en relación de dependencia con un proceso de construcción e investigación asumido por el sujeto que investiga.

Desde esta perspectiva, el conocimiento no es entonces una verdad absoluta, mensurable y perenne; su validez se instala en la falibilidad y provisionalidad del mismo. Tales características están implícitas en su naturaleza compleja y dinámica, evolutiva y perfectible.

Esta epistemología implica lógicamente una pregunta: ¿cómo conoce el ser humano? Este

interrogante conduce al problema metodológico, problema central en la escuela y los maestros, en el contexto del debate sobre la formación y el desarrollo de competencias.

En esta concepción de conocimiento se postula una metodología hermenéutica, que establece rupturas epistemológicas con el monismo metodológico positivista. Esta metodología admite la complementariedad entre el análisis cualitativo y el análisis cuantitativo de los fenómenos, y reconoce la necesidad de permanentes replanteamientos y reconstrucciones en el proceso de conocer, de indagar en forma creciente el conocimiento más informado de la realidad.

Actividad, conocimiento, pensamiento y lenguaje

“Actividad” puede considerarse una palabra omnipresente en la vida de la escuela y en el lenguaje de los expertos en calidad de la educación y de los aprendizajes. Pero, ¿qué se concibe por ella?

Desde un punto de vista filosófico, se asume la actividad como

[...] la forma específicamente humana de relación activa con el mundo circundante cuyo contenido estriba en la transformación del mundo en concordancia con un objetivo. La actividad del hombre presupone determinada contraposición del sujeto y el objeto de la actividad [...] Toda actividad incluye en sí un objetivo, determinados medios, el resultado y el propio proceso de la actividad y, por consiguiente, una característica inalienable de la

experimentar prácticas concretas del “afuera”, es decir del contexto histórico cultural propias del sujeto, es lo que lleva a entender y significar el concepto de competencias “reales”, en la medida en que están en función de su uso social (Valero, 2006, citado por García, 2009: 42). Se trata entonces de asumir que el aprendizaje no se relaciona exclusivamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden social y afectivo (Vanegas y Escobar, 2007: 74).

actividad es su carácter consciente. La actividad es la fuerza motriz real del progreso social y es condición de la existencia misma de la sociedad (*Diccionario enciclopédico de filosofía*, citado por García et ál., 1996: 1).

El carácter consciente y transformador de la actividad humana permite la existencia de propósitos definidos en la conciencia del hombre como sujeto de actividad para alcanzar la transformación del objeto. Por ello, las categorías filosóficas básicas del concepto de *actividad humana* son *el sujeto y el objeto*. La actividad humana como interacción del hombre con el mundo permite al sujeto desarrollar el pensamiento, subjetivizar y transformar el objeto, para objetivizar el conocimiento en su práctica social. En este sentido, "la actividad humana es precisamente, desde el punto de vista filosófico, el ser actual de la relación sujeto-objeto" (Kagan, citado por García et ál., 1996: 3).

Como se trata de avanzar hacia una conceptualización de las competencias en el marco de la didáctica de las matemáticas, se hace necesario plantear la concepción de actividad humana en el terreno de lo psicológico. Ello es así, pues estas precisiones conceptuales se inscriben en el marco de la transformación de los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de la investigación pedagógica y didáctica.

La actividad humana es regulada por la experiencia del hombre y las exigencias sociales. Un primer rasgo distintivo de la actividad humana, en consecuencia, es que su contenido no está completamente determinado por la necesidad que la origina. Ella es el motor que impulsa el sujeto hacia la actividad, pero las formas y el contenido de la actividad del sujeto son determinadas por las condiciones sociales, las exigencias y la experiencia; son ellas las que determinan el fin consciente que

dirige y regula la actividad del sujeto. Por ello, se comparte que

[...] el primer rasgo distintivo de la actividad, es que siendo generada por la necesidad como fuente, la actividad es dirigida con un fin consciente como regulador de ella (Petrovski, 1980: 141).

Podemos concluir, entonces, que

[...] la actividad humana está indisolublemente ligada con la conciencia y la voluntad, se apoya necesariamente en éstas y no es posible sin procesos volitivos y conscientes. La actividad es actuación interna (síquica) y, externa (física) regulada por el individuo mediante un fin consciente (p. 142).

Apyados en esta concepción de actividad humana, es posible comprender mejor por qué se asume el conocimiento como un producto de la actividad humana sobre el mundo natural y social en el marco de un proceso investigativo, social e históricamente situado. En consecuencia, hay que entender por qué al concepto de *competencias* subyacen procesos complejos que trascienden lo cognitivo y el saber-hacer para, en desarrollo de tal complejidad, interrelacionar el saber-ser (deseo, motivación, iniciativa, inclinación cultural favorable, etc.), el saber-conocer (observar, pensar, explicar, argumentar, demostrar) y el saber-hacer (actuación, uso y desempeño ilustrado) en el proceso de formación y desarrollo de competencias.

En la relación de conocimiento entre sujeto cognoscente y objeto de conocimiento, como proceso social y cultural, el sujeto se enfrenta a problemas que, con frecuencia, no puede resolver con el apoyo de sus conocimientos previos. Debe entonces pensar, descubrir lo desconocido, profundizar en lo hasta ahora inexplorado para su conocimiento. Estas complejidades e incertidumbres, el sujeto las

aborda y puede superarlas a través del pensamiento. Pero, ¿qué es el pensamiento? Es

[...] el proceso síquico socialmente condicionado de búsquedas y descubrimientos de lo esencialmente nuevo y está indisolublemente ligado al lenguaje. El pensamiento surge del conocimiento sensorial sobre la base de la actividad práctica y lo excede ampliamente (Petrovski, 1980: 292).

Mediante el pensamiento, el sujeto elabora la generalización de los hechos, del objeto a conocer. Si, por el contrario, sólo fuera posible conocer hechos y objetos aislados, el sujeto no podría conocer la realidad y mucho menos transformarla. Por ello es que se afirma que “el pensamiento es el reflejo generalizado de la realidad. La generalización se efectúa por medio del lenguaje” (Smirnov et ál., 1961: 233).

Cuando el sujeto abstrae lo general, lo identifica con palabras y lo articula con los fenómenos y los objetos que guardan una misma característica general. Es la palabra, el lenguaje, lo que posibilita la generalización; “solo es posible pensar por medio de la palabra. El pensamiento humano es un pensamiento verbal” (p. 233). El sujeto, al profundizar en las características del objeto, descubre lo general que existe en él y puede conocer su esencia, que es lo fundamental de los objetos y los fenómenos.

El pensamiento permite el desarrollo de la capacidad creadora del sujeto, capacidad que se constituye y desarrolla en el trabajo como actividad humana por excelencia. Pero esta capacidad creadora ha de ser comunicada, socializada, para que sea posible su articulación al desarrollo histórico de la especie. Es aquí donde el lenguaje emerge articulado al pensamiento desde su función primaria: la comunicación, el intercambio social. Como lo planteó Vigotsky,

La transmisión racional, intencional de la experiencia y el pensamiento a los demás requiere de un sistema mediatizador, y prototipo de esta es el lenguaje humano nacido de la necesidad de intercomunicación durante el trabajo (1982: 4).

De la misma manera, es durante el trabajo, como proceso de interacción y actividad humana esencial, como el lenguaje se hizo posible. El sujeto creó y utilizó herramientas materiales y herramientas psíquicas, desarrolló su experiencia histórica individual desde donde se articuló a la evolución histórica de la especie. Por ello, el lenguaje es una forma especial de interrelación entre los sujetos; con su mediación, los sujetos socializan sus pensamientos y es este intercambio el que permite consolidar los procesos de producción, reproducción y enriquecimiento de la herencia cultural, transformar la naturaleza y regular las relaciones socioculturales de los sujetos.

En la relación entre pensamiento y lenguaje, Vigostky planteó:

[...] el desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje, es decir por las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia sociocultural del niño [...] El crecimiento intelectual del niño depende del dominio de los medios sociales del pensamiento, esto es, del lenguaje (1982: 31).

Esta influencia, determinante en el desarrollo intelectual del sujeto, implica para el maestro una muy buena comprensión de la relación entre pensamiento y lenguaje, especialmente en un proceso de formación y desarrollo de competencias a partir de procesos de enseñanza y aprendizaje. En esencia, el lenguaje cumple una función cognitiva (función noética) y una de comunicación (función comunicativa) (Duval, 1999: 14) entre los sujetos, lo cual es definitivo en el proceso de formación humana como el que desarrolla la escuela.

En igual sentido, el concepto de *capacidades* es esencial para asumir una concepción de las competencias. Por ello, en coherencia con la conceptualización hasta ahora planteada, se abordará su concepción articulada al trabajo como actividad humana por excelencia.

Smirnov et ál. conciben las capacidades como “las cualidades síquicas de la personalidad que son condición para realizar con éxito determinados tipos de actividad” (1961: 43). De esta concepción puede colegirse que el proceso de formación y desarrollo de capacidades está indisolublemente ligado al desarrollo de una actividad, de un aprendizaje o de un determinado tipo de trabajo. Es decir, toda capacidad es capacidad para algo específico, no existe y se desarrolla por fuera de la actividad humana socialmente condicionada; además, dicha actividad sólo puede ser realizada en forma exitosa cuando se han desarrollado tales capacidades.

La anterior relación entre las capacidades y la actividad humana demuestra un aspecto esencial en el proceso complejo de formación y desarrollo de competencias:

[...] las capacidades no se revelan en los conocimientos, habilidades y hábitos como tales, sino en la dinámica del proceso de adquirirlos, es decir, cuán rápido, profundo, fácil y constante es, en condiciones iguales para todos, el proceso individual de lograr el dominio de conocimientos y habilidades esencialmente importantes para cierto tipo de actividad. Es aquí donde se revelan las diferencias que nos permiten hablar de las capacidades (Petrovski, 1986: 406).

Por tanto, son las capacidades las que establecen las diferencias en el proceso de apropiación del conocimiento y de desarrollo de competencias, habilidades y hábitos en una actividad humana específica.

Las capacidades del sujeto, entonces, no son innatas; son un producto del desarrollo histórico-social del individuo y de la especie, en el contexto del trabajo que éste realiza para intervenir y transformar la realidad. En este complejo proceso es necesario conocer con mayor rigurosidad el objeto de conocimiento y los fenómenos, lo que implicó la convergencia e intervención de diversas capacidades que posibilitaron el trabajo inter y transdisciplinario, consustancial con la naturaleza del conocimiento, de la ciencia, de la técnica y la tecnología. En ese sentido,

[...] ninguna capacidad aislada puede garantizar la ejecución con éxito de una actividad [...] El buen éxito, al desarrollar cualquier actividad, depende de la combinación de capacidades (Smirnov et ál., 1961: 437).

Por lo anterior, en educación es esencial comprender que para la formación y el desarrollo de competencias se requiere el adecuado desarrollo de las capacidades del sujeto y la calidad creciente en los procesos de apropiación y utilización de conocimientos, habilidades y hábitos. Por ello se afirma que “las capacidades se forman de las habilidades generalizadas” (p. 437).

El proceso de formación y desarrollo de capacidades en el marco de la actividad humana socialmente condicionada, está en la base del desarrollo del pensamiento del sujeto, de la apropiación de conocimientos, de sus formas de socialización mediante el lenguaje y, por tanto, de su formación humana integral. Ésta es, a nuestro juicio, una orientación filosófica y psicosocioantropológica coherente, para asumir una concepción científica sobre el complejo y dinámico proceso de la formación y el desarrollo de competencias en el marco del trabajo pedagógico, didáctico y curricular de los maestros.

Desarrollo de competencias matemáticas

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como práctica social, cultural e históricamente situada y científicamente orientada por la didáctica de las matemáticas, instalan hoy nuevas “redefiniciones y desafíos” (Artigue, 2004: 5; D’Amore, Godino y Fandiño, 2008: 35; Vanegas y Escobar, 2007: 75), centrados en activar la construcción del conocimiento matemático por parte del estudiante. Estas redefiniciones y retos han de instalarse en el proceso complejo y dinámico de la formación y el desarrollo de competencias matemáticas, en tanto propósito central de los sujetos que construyen y reconstruyen su propio saber (D’Amore, Godino y Fandiño, 2008: 27).

¿Qué implica, entonces, asumir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para la formación y el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes? En una primera aproximación, implica asumir de forma integrada la siguiente complejidad:

- Crear un clima de interacción y reconocimiento multicultural en el aula, propicio para la actividad del estudiante desde su *saber ser*, es decir, generar deseo y voluntad de saber, motivación a la acción, al trabajo cooperativo y afiliativo, al compromiso y la autoformación. En este caso, el saber ser ha de evidenciarse como desarrollo de una actitud científica creciente en el estudiante, una inclinación cultural favorable al desarrollo de competencias matemáticas. La formación y el desarrollo de dicha actitud es un proceso de construcción individual inicialmente y, después, compartido y validado socialmente. Como lo afirman D’Amore, Godino y Fandiño: “¿Qué sería una competencia sin el deseo, sin la voluntad y sin el gusto de hacer uso de ella?” (2008: 21).

“Al centro de dicha construcción está el ser humano y no el saber en sí” (Fandiño, 2006: 55), aspecto nodal en el punto de vista antropológico en didáctica de las matemáticas. Este punto de vista reivindica la dignidad del aprendizaje del estudiante en cada nivel escolar, adscribe el desarrollo de las competencias al estudiante en su contexto,⁴ a la calidad de sus aprendizajes y postula que el desarrollo de competencias matemáticas implica también un “deseo conocer”, “deseo hacer”, una manifestación afectiva (Vanegas y Escobar, 2007: 74-75) expresada como volición y actitud.

- La generación de esta inclinación cultural favorable en el estudiante, posibilita que su *saber conocer* se exprese como capacidades para observar, describir, explicar, argumentar, proponer, demostrar y analizar “usando los conocimientos” dentro y fuera de los contenidos escolares. Es en este proceso “de enfrentamiento a múltiples tareas” como los seres humanos desarrollan su pensamiento matemático (Cantoral et ál., 2005: 19). El desarrollo de capacidades para este saber conocer y para el desarrollo de competencias es asumido por el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) como desarrollo de competencias matemáticas en el estudiante para pensar y razonar, construir modelos, plantear y resolver problemas, representar, utilizar un lenguaje simbólico y emplear herramientas de apoyo (tecnologías de la información y la comunicación —TIC—, por ejemplo) (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico —OCDE—, 2006).
- El desarrollo de estas capacidades y del pensamiento matemático habilita al estudiante para un *saber hacer*, es decir, para un hacer ilustrado que implique: actuación

4 El significado de contexto hace referencia a por lo menos tres dimensiones interactuantes: el entorno sociocultural del sujeto que contempla las tradiciones, lo político, económico y cotidiano; el contexto de las actividades de aprendizaje propuestas escolarmente y el contexto general de la cultura escolar que contempla desde concepciones personales hasta formas de gestión del profesor en el aula de clases (García, 2009: 41-42).

y desempeño ilustrados, uso transversal de los conocimientos, diseño de formas adecuadas para formular y resolver problemas, aplicación no sólo en contextos escolarizados de su saber matemático, y la ampliación de sus zonas de desarrollo próximo,⁵ al asumir retos y “riesgos” cognitivos y volitivos.

Como puede inferirse, la didáctica de las matemáticas debe contribuir a instalar el problema del desarrollo de competencias matemáticas en el marco de un proyecto cultural orientado a consolidar la creatividad sostenida y la potencialidad del sujeto desde una concepción integral e integrada de la formación humana. Por ello, este proyecto no puede centrarse en el saber matemático en sí, sino en la formación del ser humano que aprende matemáticas para que, en este caso, sus competencias matemáticas evidencien la presencia de tres aspectos, claramente diferentes y absolutamente complementarios. Son ellos:

el cognitivo: conocimiento de la disciplina,

el afectivo: disposición, voluntad, deseo de responder a una determinada solicitud (externa o interna) y

la tendencia de acción: persistencia, continuidad, dedicación (D’Amore, Godino y Fandiño, 2008: 44).

Ahora bien, en Colombia, con los lineamientos curriculares (MEN, 1998) se da un tránsito importante de una conceptualización del currículo de matemáticas centrado en contenidos,⁶ a una aproximación curricular sustentada en conocimientos básicos,⁷ como uno de sus pilares fundamentales, junto a los procesos generales y el contexto. Dicho currículo se orienta al desarrollo de competencias matemáticas, tal y como se expresa en su presentación:

El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al *desarrollo de competencias* que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana (MEN, 1998: 17; el resaltado es nuestro).

Sin embargo, como se ha descrito con anterioridad, en el ámbito didáctico la concep-

5 Entendida como la zona más cercana o próxima al desarrollo cognitivo real de todo ser humano, hacia la cual el sujeto puede acceder o avanzar progresiva y paulatinamente, en su interacción con otros, al momento de realizar satisfactoriamente una tarea o actividad, que solo no podría realizar. Desde una perspectiva sociocultural, el éxito educativo se alcanza al lograr correr paulatinamente dichas zonas de desarrollo próximo (ZDP), hacia una zona de desarrollo potencial (ZDPT).

6 Un contenido es una parte limitada del saber, restringido a un tema específico o elemento de dicho saber. Puede ser: disciplinario, metadisciplinario, pluridisciplinario, multidisciplinario, interdisciplinario, a-disciplinario, no disciplinario [...] (D’Amore, Godino y Fandiño, 2008: 10). En este sentido, el currículo centrado en contenidos considera el contenido como el fin en sí mismo del proceso educativo, que en el caso de la educación matemática institucionalizada es el énfasis manifiesto en el estudio formal de los objetos matemáticos, en su naturaleza más abstracta y descontextualizada. Esta perspectiva didáctica se corresponde con una visión acabada, absolutista y ahistórica de las matemáticas, que desconoce su dimensión social como actividad humana constructora de significantes y significados, asociada a la experiencia individual y la del colectivo.

7 El conocimiento puede involucrar uno o más contenidos; es de hecho una reelaboración de contenidos de manera autónoma y consciente en la realización de una actividad humana no rutinaria (D’Amore, Godino y Fandiño, 2008: 11). Por ello, desde una perspectiva socio cultural, se asume por conocimiento el producto de la actividad humana sobre el mundo material o simbólico como práctica social, para nada absoluto, en cambio sí falible y provisional. En el contexto particular del currículo de matemáticas colombiano, los conocimientos matemáticos considerados básicos son organizados por los sistemas: numéricos, geométricos, métricos, variacional y aleatorio (MEN, 1998:35).

ción de las competencias matemáticas exige la descripción y la explicación de los referentes filosóficos, sociológicos y psicológicos que le sustentan, así como de los procesos cognitivos, volitivos y didácticos que conlleva; de su conexión con los contenidos de la disciplina, el conocimiento, el pensamiento matemático y las capacidades del sujeto, para trascender, en el contexto pedagógico, una visión limitada de las mismas como el solo “saber hacer en contexto”, que denota un carácter únicamente instrumental de las matemáticas (Vanegas y Escobar, 2007: 75) y una práctica transmissionista y eficientista de su enseñanza. Tal visión aún subyace a la propuesta oficial y que, a nuestro juicio, como comunidad académica de profesores e investigadores en didáctica de las matemáticas, debemos enriquecer y profundizar.

Para D’Amore, Godino y Fandiño (2008), el concepto de *competencia* es complejo y dinámico. *Complejo*, porque tiene en cuenta dos componentes interactuantes e inseparables, como expresiones no únicas de la competencia: uso (de naturaleza exógena) y dominio (de naturaleza endógena), en la elaboración cognitiva, interpretativa y creativa de conocimientos matemáticos que relacionan contenidos diferentes. *Dinámico*, porque engloba no sólo conocimientos matemáticos, sino también factores metacognitivos, afectivos, de motivación y volición, y, en la mayoría de veces, es el resultado de conocimientos diversos interconectados.

En este sentido, las bases cognitivas de las competencias matemáticas son necesariamente disciplinarias, siendo los contenidos matemáticos el vehículo mediador en su formación y desarrollo. Pero no existe una sola competencia matemática puramente disciplinaria, debido a que el carácter transversal de las competencias desborda la disciplina y la hace parte integral de la formación humana.

Cantoral et ál. (2005) explican tal complejidad a partir de la dualidad proceso / objeto que

cumplen los contenidos disciplinarios de las matemáticas. Típicamente, el conocimiento matemático se inicia con el desarrollo de un proceso en términos concretos de un contenido disciplinar y en la medida en que el sujeto se familiariza con los procesos, estos se coordinan en una forma de pensamiento operacional, que en una etapa posterior se consolida como objeto de conocimiento matemático. Desde esta perspectiva dual (proceso / objeto de los entes matemáticos), construir objetos matemáticos es tarea esencial en el aprendizaje de las matemáticas, de tal forma que el pensamiento operacional es uno de los principales objetivos del currículo.

Así, entonces, el sujeto no abstrae de los objetos mismos el conocimiento matemático al manipularlos en sus múltiples experiencias, como suele suponerse desde una epistemología ingenua de la matemática, sino de las acciones ejercidas sobre ellos. Tales acciones han de ser interiorizadas mediante la abstracción reflexiva para constituirse progresivamente en operaciones mentales más diferenciadas, en complicidad con las estructuras primarias y anteriores. Por tanto, el conocimiento matemático no es una representación de la realidad externa; es el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende y sus experiencias sensoriales; él construye, estructura, reorganiza sus propias experiencias. Se trata, entonces, de una transformación: un objeto de conocimiento que entra en contacto con un sujeto que aprende, es transformado y reconstruido gracias a los instrumentos que como sujeto cognitivo posee transformándose, a su vez, a sí mismo (D’Amore, 2005: 26).

En términos de D’Amore, el conocimiento matemático es el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende (2005: 27). Independientemente de las particularidades de estas experiencias, el sujeto que aprende debe empeñarse en algo (función comunicativa) que necesariamente lo lleva a simbolizar. Se trata de una necesidad humana, con características

internas o sociales, o ambas, que se organiza alrededor de o dentro de los sistemas semióticos de representación. En palabras de Moreno, “toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos” (1999, citado por D’Amore, 2005: 27).

En esta perspectiva, el conocimiento matemático representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares. Razón por la cual el conocimiento matemático debe ser considerado el resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, como construcción social de significados y de negociación intersubjetiva, cuyo estado actual no es, en muchos casos, su culminación definitiva y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento (MEN, 1998: 29).

Si el conocimiento matemático es producto de las estructuraciones de la conciencia y de la experiencia del sujeto, entonces, dichas estructuraciones están dadas en la interacción dialéctica del sujeto con el objeto de conocimiento y con su entorno, dentro de un marco contextual histórico y cultural del cual hace parte el sujeto. De cómo el sujeto logra interiorizar las acciones efectuadas sobre los objetos materiales o ideales de este mundo exterior depende, en gran medida, sus aprendizajes acerca del mismo. Para esto, se requiere desplegar todo el potencial humano, en una constante e intensa actividad que inevitablemente desemboca en la necesidad de comunicar, discutir, demostrar, verificar y, por tanto, de simbolizar, proceso que entraña un progreso lógico-formal innegable hacia el desarrollo del pensamiento en la actividad matemática.

El pensamiento matemático es, por tanto, un proceso mental sujeto a la necesidad de socializar, comunicar, que en matemáticas requiere de sistemas semióticos y se condiciona por la elección de un mediador simbólico o registros de representación (D’Amore, 2005: 29). La construcción de los conceptos matemáticos

depende estrechamente de la capacidad de usar registros de representaciones semióticas de dichos conceptos, de representarlos en un registro dado, de transformar esas representaciones al interior de un mismo registro y de realizar actividades de conversión de uno a otro registro de representación semiótica (p. 33).

Los contenidos disciplinarios de las matemáticas, en oposición a un currículo centrado en contenidos, se enseñan para procurar la construcción de conocimientos matemáticos, conocimientos situados, es decir, contextualizados, orientados a mayores niveles de abstracción y complejidad en el estímulo de la formación y el desarrollo de pensamiento matemático que, a su vez, potencia la formación y el desarrollo de competencias matemáticas. Estas competencias trascienden por su naturaleza dinámica y compleja la propia disciplina matemática y no pueden, por tanto, pensarse reducidas o limitadas a esta única disciplina. Como tampoco es posible, en consecuencia, el pensar las competencias matemáticas como medio y fin en sí mismas en la práctica educativa matemática (García et ál., 2009: 22).

En este sentido, Godino y Batanero (1995, 1996) y Godino et ál. (2004: 12-54), en una revisión epistemológica, destacan cómo la visión de los objetos matemáticos como entes culturales —cuya naturaleza no puede ser descrita exclusivamente mediante su aspecto formal, en particular cuando se está interesado en el estudio científico de los procesos de su enseñanza y su aprendizaje— implica las siguientes consideraciones de las matemáticas, desde su naturaleza epistémica ontosemiótica:

- Las matemáticas son parte integrante de la cultura, son una actividad humana situada histórica, social y culturalmente, que se interesa y se ha interesado desde siempre por la solución de situaciones problemáticas, las cuales pueden referirse al mundo físico, social o al propio dominio de las matemáticas, en el cual los obje-

tos matemáticos emergen y evolucionan progresivamente, en niveles mayores de complejidad y abstracción.

- Las matemáticas constituyen un lenguaje simbólico, en el que se expresan las situaciones problemas estudiados y sus diversas soluciones construidas de manera colectiva en contextos sociohistóricos específicos. Los n-sistemas de símbolos elaborados y convenidos culturalmente, tienen una función comunicativa y un papel instrumental, una especie de mediador simbólico entre sujetos y objetos de conocimiento, que se modifican mutuamente y en particular a los propios sujetos que usan dichos símbolos como mediadores en la actividad matemática.
- Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, organizado desde una lógica socialmente compartida, convenida culturalmente en su uso y desarrollos. Su aprendizaje es, por tanto, una construcción social de significados, asociada a la experiencia tanto individual como colectiva (Godino y Batanero, 1996: 58).

En este sentido, las matemáticas en general y las matemáticas escolares en particular, se reconocen como una actividad humana constructora de significados asociados a la experiencia personal y la del colectivo. Al respecto, los *Lineamientos curriculares de matemáticas* (MEN, 1998: 31) son explícitos al indicar cómo desde la década del ochenta, con el fracaso escolar de la matemática moderna, se empezó a rescatar el valor de lo empírico y lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático. Esto ha llevado a involucrar significativamente la manipulación y la experiencia con los objetos que sirven de apoyo a los procesos de construcción, sin restar importancia, desde luego, a la comprensión y a la reflexión, que posteriormente deben conducir a la formalización rigurosa.

Son, entonces, los contenidos disciplinarios de las matemáticas y los conocimientos ma-

temáticos situados, una base cognitiva para el desarrollo del pensamiento matemático y el desarrollo de competencias matemáticas en el estudiante. Cantoral et ál. (2005), al describir el pensamiento matemático como una de las funciones mentales superiores, destacan su desarrollo en todos los seres humanos, en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas. Desde esta visión, se argumenta cómo el pensamiento matemático no se encuentra enraizado ni en los fundamentos de las matemáticas, ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana, de la actividad matemática como actividad humana, en tanto práctica social.

El pensamiento matemático, en tanto proceso mental sobre la base de la actividad y el lenguaje, incluye, por un lado, pensamiento sobre conceptos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento, como la abstracción, la justificación, la visualización, la estimación o razonamientos bajo hipótesis, entre otros. Entonces, el pensamiento matemático debe operar sobre una red compleja de conceptos avanzados y elementales, articulados bajo diferentes contextos de representación, para construir y reconstruir significados matemáticos con un carácter local y eventualmente temporal.

Por otra parte, los contenidos, como la base cognitiva del pensamiento y las competencias, obligan a la reflexión crítica sobre la calidad y la cantidad de dichos contenidos que están a la base de las competencias matemáticas, por lo que se propone la elección de contenidos disciplinarios de las matemáticas que constituyan los núcleos fundacionales o campos conceptuales, alrededor de los cuales articular otros contenidos al interior de un tema disciplinario que provenga de un interés didáctico (D'Amore, Godino y Fandiño, 2008: 19).

Por *núcleo fundacional* o *campo conceptual* en las ideas de Vergnaud (1990), se entiende, en el

ámbito de la didáctica de las matemáticas, los contenidos claves para la estructuración misma de las matemáticas como disciplina científica, tanto en el plano epistemológico, como en el didáctico, que en el enfoque sistémico de las matemáticas escolares contemplan los sistemas numéricos, geométricos, métricos, variacional y aleatorio. Considerar en este punto la noción de *núcleo fundacional* o *campo conceptual*, más que un listado de contenidos, equivale a tejer redes conceptuales a partir de la historia y la epistemología de los objetos matemáticos, para su transposición didáctica.

Como estructuras complejas y dinámicas, las competencias matemáticas son aquellas con las cuales y a través de las cuales el pensamiento matemático se organiza, en un reequilibrio permanente de competencias matemáticas precedentes y la formación y el desarrollo de otras nuevas. Esto permite suponer que un determinado aumento de competencias matemáticas es un reequilibrio del pensamiento matemático y, como tal, ellas generan, a su vez, nuevas competencias.

Por último, es necesario un pequeño paréntesis para enunciar un aspecto central en esta problemática de naturaleza didáctica: las competencias matemáticas del docente. Si bien no es el objeto específico de este artículo, es necesario plantear una breve reflexión al respecto.

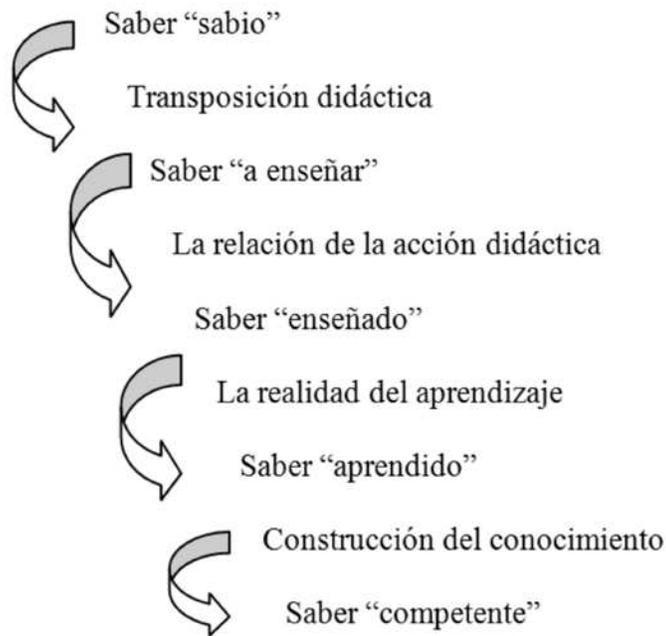
La competencia matemática de los docentes es variada y multiforme, por su naturaleza [...] tiende a ser siempre más profunda a medida que el nivel escolar asciende [...] (Fandiño, 2006: 59).

Los siguientes aspectos referidos a la formación de profesores de matemática y al diseño

de sus currículos, representan una convergencia que posibilita enriquecer este proceso con el aporte de diversos enfoques en investigación en didáctica de la matemática. Se retoman los aportes de Fandiño (2006), D`Amore (2005, 2006) y Godino y Batanero (1995):

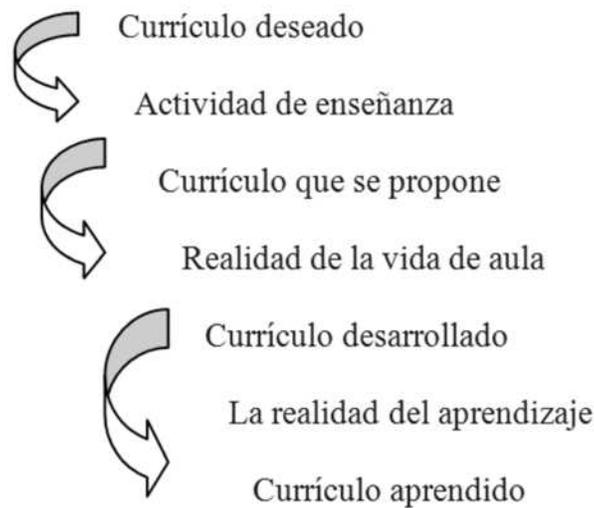
- Lo prioritario es la relación del sujeto con el saber; por eso debe tenerse en cuenta: la historia, la génesis y la práctica de la matemática; el ser (lo ontológico) y el conocer (lo epistemológico).
- El conocimiento matemático es falible y provisional, como todo conocimiento. Por ello, más que de verdades, se habla de un conocimiento construido socialmente y situado cultural e históricamente.
- El profesor de matemáticas ha de desarrollar competencias en el conocimiento de la ciencia matemática, en tanto saber en juego. Igualmente, desarrollar su competencia didáctica para hacer las matemáticas enseñables, haciendo uso social y eficiente de dicha competencia.
- El desarrollo del saber es un hecho individual, pero compartido socialmente. Su fase central y última es la comunicación social y cultural del mismo desde las prácticas de enseñanza.
- En todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas hay dos elementos esenciales, absolutamente complementarios, que deben estar presentes: competencia en el saber matemático y competencia en didáctica de las matemáticas.

Esta perspectiva, en la que el saber matemático del docente se expresa en saber enseñar matemáticas, la ilustra Fandiño (2006: 39) a través del siguiente esquema:



De igual forma, la propuesta de formulación e implementación de un currículo en didáctica de las matemáticas, para la formación de

docentes y para el desarrollo de competencias matemáticas en la escuela, se expresa en el siguiente esquema:



En conclusión, nos enfrentamos, hoy más que nunca, ante el reto de romper con el mito social y la tradición cultural de las matemáticas como una “ciencia invisible” (Recio, 2007) en sociedad. Hay, en la actualidad, un momento histórico en el que el Ministerio de Educación Nacional, comunidades de educadores, de investigadores y otros sectores de la sociedad enfatizan en la formación y el desarrollo de las competencias como un criterio de calidad de la educación. Esto es asumir que la educación se asemeja más a encender un fuego que a llenar un cubo vacío; que es tan importante el *saber qué*, los contenidos, como el *querer saber*, *saber qué hacer* con ellos, y el *saber cómo*, *cuándo* y *por qué* hacerlo; que debe recuperarse el uso social de las ciencias; promoverse el uso funcional del conocimiento, como herramienta útil en situaciones propias del entorno científico, cotidiano, social y cultural de los estudiantes; reconocer la naturaleza del conocimiento como creación humana, producto de la actividad humana situada histórica, geográfica, política, económica y culturalmente, lo que tiene implicaciones en la formación integral de la ciudadanía, para el pleno y libre ejercicio de los derechos y deberes democráticos.

Referencias biblio y cibergráficas

Artigue, M., 2004, Problemas y desafíos en educación matemática: ¿qué nos ofrece hoy la didáctica de las matemáticas para afrontarlos? *Revista Educación Matemática*, México, Santillana, año/vol. 16, núm. 3, dic., pp.5-28.

Blauberg, I., P. Kopnin e I. Pantin, s. f., *Diccionario filosófico marxista*, s. d.

Cantoral, R. et ál., 2005, *Desarrollo del pensamiento matemático*, México, Trillas.

D’Amore, B., 2005, *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, México, Reverté S. A.

_, 2006, *Didáctica de la matemática*, Bogotá, Magisterio.

D’Amore, B., J. Godino y M. Fandiño, 2008, *Competencias y matemática*, Bogotá, Magisterio.

Duval, R., 1999, *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Cali, Universidad del Valle, Peter Lang S. A.

Fandiño, M. I., 2006, *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*, Bogotá, Magisterio.

Fortoul, O. M., 2006, “Las finalidades de la educación primaria según los estudiantes del último año de la licenciatura en educación primaria en México”, *Revista del Centro de Investigación. Universidad de la Salle*, Mexico, año/vol. 7, núm. 026, jul.-dic., pp. 5-10.

García, R. L. et ál., 1996, *Autoperfeccionamiento docente y creatividad*, Ciudad de la Habana, Pueblo y Educación.

_, 2009, “Formación y desarrollo de competencias matemáticas a partir de la investigación en didáctica de las matemáticas”, Florencia, Caquetá: Universidad de la Amazonía, Facultad de Ciencias de la Educación, Programa Maestría en Ciencias de la Educación con énfasis en Didáctica de las Matemáticas, Proyecto de investigación en desarrollo. Grupo de Investigación: “Desarrollo institucional integrado”.

Gascón, J., 1998, “Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica”, *Revista Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, núm. 52, pp. 7-33.

Godino, J. y Batanero, C., 1995, “Theoretical and methodological contents for the preparation of researchers in Mathematics Education”, en: O. Björkqvist et ál., eds, *Proceedings of Nordic Symposium, Preparation of Researchers in Mathematics Education*, Suecia, University of Umea, pp. 57-71.

_, 1996, “Relaciones dialécticas entre teoría, desarrollo y práctica en educación matemática: un meta-análisis de tres investigaciones”, en: Malara, N., ed., *An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, [s. d.], Universidad de Módena, pp. 13-22.

Godino, J. et ál., 2004, “Didáctica de las matemáticas para maestros”, Granada, Universidad de

Granada, *Aula Virtual. Redes profesionales*, [en línea], disponible en: <http://www.redes-cepalcala.org/inspector/DOCUMENTOS%20Y%20LIBROS/MATEMATICAS/DIDACTICA%20DE%20LAS%20MATEMATICAS%20PARA%20MAESTROS.pdf>

Ministerio de Educación Nacional —MEN—, 1998, *Lineamientos curriculares en matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*, Bogotá, Cooperativa Editorial Magisterio.

Moreno, A. L. y Waldegg, G., 1992, "Constructivismo y educación matemática. El papel de la epistemología en la práctica educativa", *Revista Educación Matemática*, vol. 4, núm. 2, agosto, pp. 7-15.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), 2006. *Programa para la evaluación integral de los alumnos. PISA 2006. Marco para la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España, Santillana Educación S. L.

Petrovski, A., 1980, *Psicología evolutiva y pedagógica*, Moscú, Progreso.

_, 1986, *Psicología general*, Moscú, Progreso.

Recio, T., 2007, "La ciencia invisible", *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, Barcelona, año XIII, núm. 46, pp. 9-24.

Smirnov, A. et ál., 1961, *Psicología*, La Habana, Imprenta Nacional de Cuba.

Tapiero, E. et ál., 2007, *Ciencias de la educación, referentes para un debate teórico*, Florencia, Universidad de la Amazonía.

Tobón, S., 2006, *Formación basada en competencias*, Bogotá, ECOE.

Vanegas, Y. y P. Escobar, 2007, "Hacia un currículo basado en competencias: el caso de Colombia", *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, año XIII, núm. 46, monografía sobre competencias y uso social de las matemáticas.

Vergnaud, G., 1990, "La teoría de campos conceptuales", *Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores "Juan E. Pivel Devoto"*, [en línea], disponible en: http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf, consulta: 12 de agosto de 2006.

Vigotsky, L. S., 1982, *Pensamiento y lenguaje*, La Habana, Pueblo y Educación.

Referencia

García Quiroga, Bernardo, Arnulfo Coronado y Leonardo Montealegre Quintana, "Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas", *Revista Educación y Pedagogía*, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011, pp. 159-175.

Original recibido: octubre 2009

Aceptado: marzo 2010

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.
