

# DIAGRAMAS INTEGRADOS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES DE ESO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA

## INTEGRATED DIAGRAMS BUILT FOR ESO STUDENTS IN MULTIPLICATIVE COMPARISON PROBLEMS

González, F.M., Castro, E.

*Universidad de Granada*

### Resumen

*Analizamos las producciones de 89 estudiantes de primer curso de ESO, en resolución de dos problemas verbales de comparación multiplicativa con el fin de identificar y categorizar los diagramas que utilizan para representar el enunciado. Describimos con detalle los tipos de diagramas cuantitativos integrados producidos por los estudiantes. Encontramos que a) la gran mayoría de los estudiantes no utilizan toda la información contenida en el enunciado; b) gran parte de los estudiantes hacen diagramas alusivos a la temática o el contexto del enunciado sin relacionar los datos del mismo; c) la mayoría de los estudiantes no están familiarizados con el dibujo de diagramas que integren las relaciones existentes en el enunciado; d) hemos detectado cuatro tipos de diagramas integrados que han empleado los estudiantes para representar los problemas de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente.*

### Abstract

*We analyze the production of 89 students the first year of ESO, in resolution of two multiplicative comparison word problems in order to identify and categorize the diagrams used to represent the statement. We describe in detail the types of integrated quantitative diagrams produced by students. We found that a) the vast majority of students do not use any information contained in the statement, b) most of the students make diagrams alluding to the subject or context of the statement without relating the data on it, c) most students are not familiar with the drawing of diagrams that integrate existing relationships in the statement d) we have identified four types of diagrams that have used integrated students to represent the multiplicative comparison problems with inconsistent statement.*

**Palabras clave:** *Representaciones, diagramas, resolución de problemas, comparación multiplicativa.*

**Key words:** *Representations, diagrams, problems solving, multiplicative comparison.*

## Introducción

La importancia de las representaciones externas en el proceso de resolución de problemas ha sido ampliamente subrayada (Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001; Novick y Hurley, 2001), figurando como uno de los principales elementos a investigar la utilización de representaciones gráficas en la resolución de problemas. Los diagramas, gráficas, imágenes y otros tipos de representaciones externas se utilizan en muchas tareas cognitivas como la resolución de problemas, razonamiento y la toma de decisiones. Nuestro interés se centra en los diagramas como una forma de representación externa de relaciones numéricas.

Un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial (Diezmann y English, 2001). Los diagramas se consideran como representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes (Vekiri, 2002). En la resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que puede ser una herramienta útil en la solución del problema. (Diezmann y English, 2001).

El uso de diagramas ha sido identificado como una de las estrategias más efectivas que se han propuesto para mejorar la eficiencia en la solución de problemas matemáticos (Cheng, 2002; Pólya, 1986; Stern, Aprea y Ebner, 2003; Uesaka, Manalo y Ichikawa, 2007). Su importancia se ha resaltado en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Larkin y Simon, 1987; Novick, Hurley y Francis, 1999). Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones. González (2010) presenta un estudio sobre cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando diagramas lineales, después de ser instruidos para ello, en la que expresan ser capaces de hacer un razonamiento de las distintas fases de la resolución, llegando a comprender mejor todo el proceso. En esa misma línea, Martínez (2011) introduce la enseñanza de un diagrama lineal basado en el uso de segmentos de tal manera que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos de forma gráfica, mostrando la aceptación del mismo por parte de los estudiantes como forma de representación de cantidades.

Van Garderen (2007) expone algunos aspectos relativos a los estudios sobre diagramas en resolución de problemas. Introduce a los estudiantes dos tipos de diagramas: los diagramas lineales que generalmente son usados para ordenar linealmente un conjunto de elementos, y los diagramas parte todo, que los utiliza para agrupar los elementos de un conjunto en subconjuntos, en los que resalta la estructura partitiva y la estructura parte todo de la suma.

Por otro lado, varios estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la ESO, utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. En algunos problemas este tipo de estrategias son más eficaces de cara a obtener la solución correcta que las estrategias

de carácter simbólico y evitan que los estudiantes cometan errores persistentes en ellos.

Los diagramas también se han utilizado como facilitadores en el proceso de resolución. Pantziara, Gagatsis y Elia (2009) mostraron que la presencia de los diagramas no aumenta el rendimiento general de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios. Sugiriendo, como implicación de las conclusiones obtenidas, que los profesores pueden dar oportunidades a los estudiantes no sólo a utilizar diagramas, sino también para inventar o buscar su propia estrategia de solución, incluyendo la construcción activa y el uso de diagramas como herramientas en la solución de problemas.

Tras la revisión de investigaciones previas observamos que muchas de ellas han centrado su interés en el uso de los diagramas como ayuda durante el proceso de resolución de problemas de matemáticas. Sin embargo, ningún estudio hasta la fecha, del cual somos conscientes en esta revisión, ha tratado sobre la interpretación que le dan los estudiantes a los distintos diagramas que se les presentan y las estrategias que utilizan para su construcción. Tratamos esta idea con problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987). Estos problemas describen relaciones estáticas entre cantidades que se enuncian empleando términos como: *veces más que*, *veces menos que*, *veces tanto como*. En los problemas de comparación multiplicativa intervienen tres cantidades: el *referente*, el *comparado* y el *escalar*. Cualquiera de las tres cantidades puede ser la incógnita del problema, en el caso de que el referente sea la cantidad desconocida se dice que el enunciado del problema es inconsistente, si lo es el comparado, se denomina enunciado consistente (Castro, 1994; Lewis y Mayer, 1987).

### *Objetivo*

El objetivo general de nuestro estudio es analizar el papel que juegan los diagramas en resolución de problemas matemáticos. Este objetivo general lo contextualizamos en los problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987), dado que se ha demostrado que son problemas difíciles para los estudiantes de final de primaria (Castro, 1995) en los que los resolutores suelen cometer errores persistentes.

Dentro de este objetivo general, en este trabajo nos planteamos analizar los procesos de pensamiento de los resolutores ligados al empleo de diagramas cuando se les enfrenta a la resolución de problemas de comparación multiplicativa. Para intentar conseguir este objetivo hemos planteado a los estudiantes tareas de traducción de una representación verbal a gráfica y viceversa.

En este informe nos centramos en las siguientes preguntas: a) ¿Qué competencia muestran los estudiantes al representar un problema verbal mediante un diagrama? b) ¿Qué tipos de diagramas construyen? c) ¿Qué variantes de diagramas integrados utilizan los resolutores?

### **Método**

#### *Participantes*

En este estudio han participado un total de 89 estudiantes de primer curso de educación secundaria obligatoria de dos institutos públicos de la ciudad de Granada, con edades comprendidas entre 12 y 14 años. Los alumnos no recibieron instrucción

específica previa sobre la construcción de diagramas, ni sobre la resolución de problemas de comparación.

### *Instrumento*

Para dar respuesta a las cuestiones planteadas, hemos diseñado un cuestionario que consta de 6 problemas para aplicarlo a estudiantes de primer curso de secundaria obligatoria. En este informe vamos a analizar sólo los problemas 1 y 2 y sus apartados a y b, correspondientes al paso de la representación verbal a la simbólica y de verbal a la gráfica, observando cómo los estudiantes traducen simbólica y gráficamente a partir de un enunciado verbal. En la tabla 1 se muestran los problemas verbales presentados a los estudiantes.

Tabla 1. Problemas planteados a los estudiantes

<i>Tarea</i>	<i>Enunciado</i>	<i>Preguntas</i>
1	En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.
2	Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Los problemas 1 y 2 son problemas de comparación multiplicativa con referente desconocido también se denominan problemas con enunciado inconsistente. En el primer apartado se les pide que resuelvan el problema y, en el segundo, que dibujen un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema. No se les dio indicaciones sobre cómo debía ser el diagrama.

Los problemas fueron aplicados y resueltos de forma individual en una prueba de lápiz y papel durante la hora normal de las clases de matemáticas. La aplicación de la prueba la realizó la investigadora y se contó además con la presencia del profesor del grupo correspondiente.

### **Resultados**

Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas producidas por los sujetos a las tareas propuestas, analizando conjuntamente las respuestas de los estudiantes en los dos apartados correspondientes de los problemas 1 y 2, es decir, el apartado 1a lo hemos analizado junto con el apartado 2a, y el apartado 1b junto con el 2b. De esta manera pretendemos categorizar las producciones desde el punto de vista simbólico y gráfico. Lo que queremos analizar en las producciones obtenidas de la aplicación de la prueba es: a) el paso de la representación verbal del problema dada por su enunciado verbal a la representación simbólica, y b) el paso del enunciado verbal a una representación gráfica. En este informe exponemos sólo los resultados obtenidos correspondientes al segundo punto que corresponde a la traducción de lo verbal a lo gráfico.

En el apartado **b** de los problemas 1 y 2 se les pide a los estudiantes que dibujen un diagrama a partir de un problema enunciado verbalmente. Se trata pues, de que realicen una traducción desde una representación verbal de un problema de comparación multiplicativa a una representación gráfica. Para analizar las producciones de los sujetos en respuesta a esta traducción entre la representación verbal y la gráfica,

hemos establecido unos criterios previos en función de los cuales categorizar las respuestas. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido: a) Si en la respuesta aparece un dibujo o no; b) grado de integración del problema, es decir, si se reflejan las relaciones entre las cantidades. De acuerdo con estos criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

- Sin dibujo
  - Respuestas en blanco. En este apartado están las respuestas en las que los sujetos no hacen ninguna anotación.
  - Reformulación verbal del problema en forma más resumida, sintética o telegráfica.
  - En forma de operador.
- Con dibujo
  - Dibujo cualitativo: Si el dibujo representa sólo el contexto o los sujetos mencionados.
  - Dibujo cuantitativo: Si en el dibujo realizado aparece algún aspecto cuantitativo y, dentro de este nivel si:
    - Representan sólo las cantidades que se comparan o,
    - Representan la relación entre las cantidades.

A continuación describimos las categorías establecidas anteriormente según las producciones de los estudiantes de este estudio y mostramos ejemplos de cada una de ellas, excepto las categorías sin dibujo.

#### *Descripción de las categorías*

C<sub>1</sub>: sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.

C<sub>2</sub>: sin dibujo/ reformulación del enunciado; el estudiante no dibuja, hace anotaciones, reescribe el enunciado en forma sintética, telegráfica, resumida.

C<sub>3</sub>: sin dibujo/ en forma de operador.

C<sub>4</sub>: dibujo cualitativo; se observan dibujos de personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

- Ejemplo C<sub>4</sub>: El estudiante E-02 en la tarea 1b hace un dibujo cualitativo, en este caso el estudiante hace dibujo alusivo a la temática del enunciado verbal del problema (un autobús y un tren), sin relacionar las cantidades.

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema



Figura1. Diagrama cualitativo

C<sub>5</sub>: dibujo cuantitativo; los diagramas más elaborados son los que hemos denominado cuantitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja las dos cantidades que intervienen en el esquema de comparación (referente y comparado) y también la

relación multiplicativa que existe entre ellos. Estos dibujos cuantitativos reflejan una representación coherente de la estructura del problema. Según las fases en resolución de problemas verbales (Castro, 1994) los resolutores han realizado un proceso de traducción, y de integración del problema, por ello, los denominamos diagramas integrados. En la tabla 2 mostramos las frecuencias de las producciones de los estudiantes sin dibujo y con dibujo: diagramas cualitativos y cuantitativos.

Tabla 2. Frecuencias de cada categoría

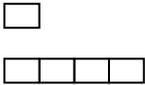
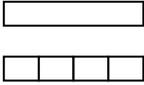
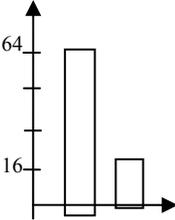
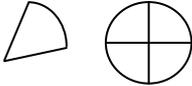
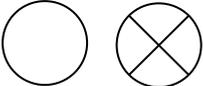
Categoría	Descripción	Frecuencia		Total	Porcentaje
		1b	2b		
C <sub>1</sub>	sin dibujo	23	33	56	31,5 %
C <sub>2</sub>	con dibujo/diagramas cualitativos	36	39	75	42,1 %
C <sub>3</sub>	con dibujo/diagramas cuantitativos	30	17	47	26,4 %

Según los resultados presentes en esta tabla, observamos que los dibujos cuantitativos son utilizados con menor frecuencia que los cualitativos, incluso tienen menor frecuencia que las producciones sin dibujo.

#### *Tipos de diagramas integrados*

Hemos analizado más en profundidad los diagramas integrados producidos por los estudiantes para detectar el modelo teórico al que se ajustan los dibujos producidos por los estudiantes y también hemos analizado la estrategia empleada en su construcción. Hemos utilizado el rectángulo y el círculo como figuras básicas (véase tabla 3) en representaciones que tienen alguna de ellas aspecto de diagramas estadísticos, de barra y circulares y en otros casos los asociamos con cantidades fraccionarias (la parte y el todo). La tabla 3 recoge los distintos modelos teóricos que sintetizan los diagramas dibujados por los alumnos de primero de la ESO en respuesta a una comparación multiplicativa.

Tabla 3. Modelos teóricos que recogen los diagramas integrados producidos por los estudiantes

Representación	Diagrama - D1	Diagrama - D2	Diagrama - D3	Diagrama - D4
Lineal				
Circular				

Describimos a continuación de manera sintética los tipos de diagramas integrados encontrados en las respuestas de los participantes.

D1: El punto de partida que han utilizado los resolutores para hacer este modelo es el referente. En este diagrama aparecen dos dibujos, el primero representa el referente como punto de partida y a partir del cual surge el segundo dibujo representando el comparado observándose en él una partición que refleja el escalár.

- Ejemplo D1: en la tarea 1b el estudiante E-73 utiliza una representación lineal y en la tarea 2b el estudiante E-70 utiliza una representación circular, las cuales hemos denominado anteriormente del tipo D1.

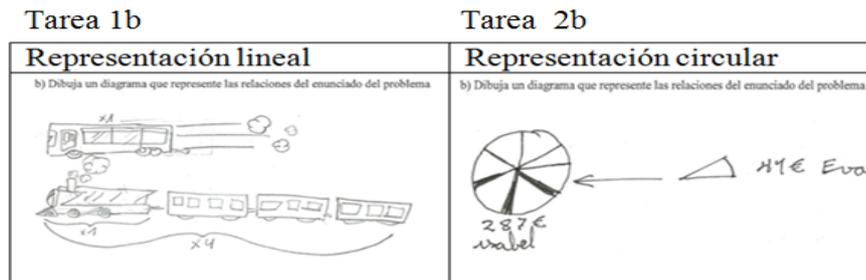


Figura 2. Diagrama D1

D2: este modelo de diagrama lo han construido los estudiantes tomando como punto de partida el comparado, que se representa y, a su vez, en otro dibujo paralelo, se hace una representación que equivale al dibujo del comparado, pero empleando el referente tantas veces como indica el escalár.

- Ejemplo D2: el estudiante E-62 en la tarea 1b hace una representación lineal, y el estudiante E-48 utiliza una representación circular, las cuales hemos denominado diagramas del tipo D2.

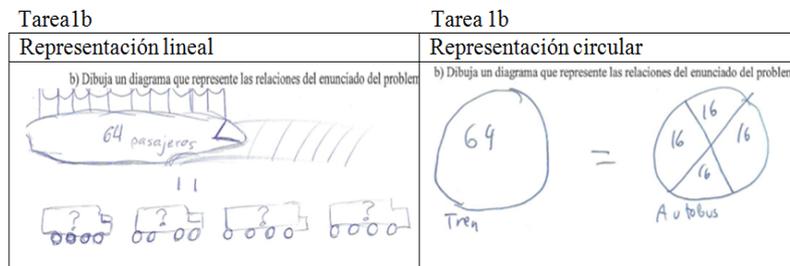


Figura 3. Diagrama D2

D3: en este tipo de diagrama producido por los participantes del estudio resalta la ayuda de un instrumento externo auxiliar de medida (en este caso un eje similar al eje de coordenadas cartesianas) que sirve para establecer las medidas de los dibujos verticales tanto del referente como el comparado.

- Ejemplo D3: el estudiante E-43 en la tarea 1b utiliza una representación lineal y el estudiante E-65 utiliza una representación circular.

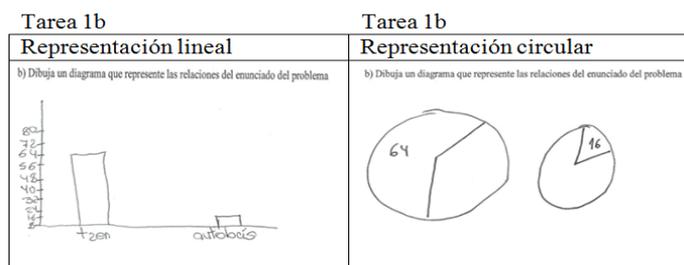


Figura 4. Diagrama D3

D4: en este diagrama los estudiantes representan el referente y el comparado en una única figura como partes de un todo, bien en una relación parte-todo o parte-parte.

- Ejemplo D4: el estudiante E-11 en la tarea 2b utiliza una representación lineal con interpretación parte-todo, y el estudiante E-66 en la tarea 1b hace un dibujo en formato de área, utiliza una representación circular con interpretación parte-parte.

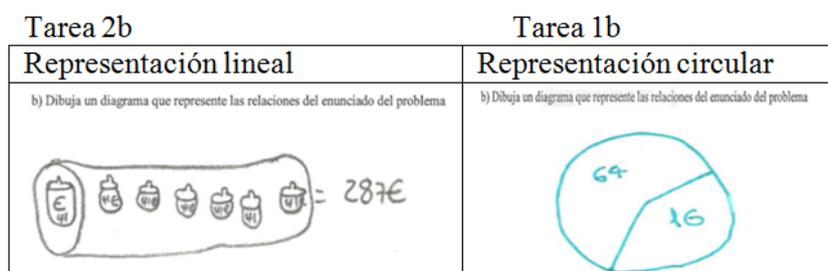


Figura 5. Diagrama D4

En la tabla 4 mostramos las frecuencias de los tipos de diagramas integrados en las tareas 1b y 2b.

Tabla 4. Frecuencia de los tipos de diagramas integrados

Representación	Tarea	Tipos de diagramas integrados			
		D1	D2	D3	D4
lineal	1b	13	3	10	0
	2b	5	2	8	1
circular	1b	0	1	1	2
	2b	1	0	0	0
Total		19	6	19	3

Según los resultados obtenidos en esta tabla observamos que la representación lineal es más utilizada por los estudiantes que la circular y los diagramas que hemos denominado D1 y D3 tienen mayor frecuencia que D2 y D4.

## Conclusiones

En respuesta a las preguntas que nos hemos planteado y según los resultados obtenidos en este informe hemos encontrado:

La mayoría de los estudiantes no utilizan toda la información contenida en el enunciado del problema. Aproximadamente un 42% de los estudiantes intenta hacer el diagrama, pero el dibujo que hacen no integra las relaciones existentes en los datos del enunciado. En general muestran una baja competencia en el dibujo de diagramas. La gran mayoría, un 73% aproximadamente, no hacen diagramas integrados lo que nos lleva a pensar la poca familiaridad que tienen con el dibujo de los mismos.

En los diagramas integrados que los estudiantes construyen utilizan representaciones lineales y circulares. En algunos casos utilizan gráficos estadísticos para tratar de representar el enunciado del problema, lo que nos lleva a suponer que utilizan sus conocimientos previos sobre dibujo de gráficos, pero la mayoría utiliza los lineales.

Tanto en los diagramas de carácter lineal como circular, hemos encontrado cuatro variantes de diagramas integrados que surgen a partir de estrategias que utilizan los estudiantes para dibujar estos diagramas. Una de ellas es partir del referente, dibujarlo, y en función de él dibujar el comparado en forma paralela, una segunda es partir del comparado y a partir de él dibujar el referente sobre un comparado dibujado en paralelo, una tercera, dibujar el referente y el comparado auxiliándose de una escala paralela numerada, y por último dibujar el referente y el comparado en una única figura.

---

Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

## Referencias

- Booth, R., y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169–190.
- Castro, E. (1995). Errores en la comprensión de problemas verbales de comparación multiplicativa. En M. Iglesias (Ed.), *Actas de las VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (pp. 147-165). Sevilla: SAEM-THALES.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2. (pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC CSMEE.
- Cheng, P. C. H. (2002). Electrifying diagrams for learning: principles for complex representational systems. *Cognitive Science*, 26(6), 685-736.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9(4), 343–363.
- Diezmann, C. M., y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA: NCTM.

- González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.
- Larkin, J., y Simon, H. A. (1987). Why a diagram (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, 11, 65-99.
- Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79(4), 363-371.
- Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Novick, L., y Hurley, M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: that is the question. *Cognitive Psychology*, 42(2), 158–216.
- Novick, L. R., Hurley, S. M., y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition*, 27(2), 288–308.
- Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, 72 (1), 39-60.
- Pólya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Stern, E., Aprea, C., y Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, 13(2), 191–203.
- Uesaka, Y., Manalo, E., y Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, 17(3), 322-335.
- Vekiri, I., (2002). What is the value of Graphical Displays in Learning? *Educational Psychology Review*, 14(3), 261-312.
- Van Garderen, D. (2007). Teaching Students with LD to Use Diagrams to solve Mathematical Word Problems. *Journal of Learning Disabilities*, 40(6), 540-553.