

ORIGEN Y APORTACIONES DE LA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA ¹

ORIGIN AND CONTRIBUTIONS OF THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH TO RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION

Godino, J.D.

Universidad de Granada

Resumen

El enfoque ontosemiótico de investigación en didáctica de la matemática (EOS) fue iniciado en la Universidad de Granada a principios de los noventa, como resultado de la interacción de investigadores de dicha universidad con los desarrollos teóricos de la didáctica de la matemática iniciados en Francia. Así mismo, la diversidad de teorías usadas para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llevó a la convicción de la necesidad y utilidad de tratar de clarificarlas, y compararlas. La estrategia de articulación de las teorías y el desarrollo de la aproximación ontosemiótica ha sido fruto del análisis racional de los fundamentos, cuestiones y métodos de diversos marcos teóricos existentes y de la aplicación de las herramientas teóricas que se fueron produciendo en trabajos experimentales. En esta ponencia se presenta una síntesis histórica del origen y desarrollo del EOS, sus principales aportaciones para la investigación en didáctica de las matemáticas, el estado actual a nivel internacional y algunas reflexiones sobre su potencial futuro.

Abstract

The onto-semiotic research approach to mathematics education (EOS) was started at the University of Granada in the early nineties, as a result of the interaction of researchers from this university with the French theories of mathematics education started in France. Likewise, the diversity of theories used to study the teaching and learning of mathematics processes led to the conviction of the necessity and usefulness of clarifying and comparing them. The networking of theories strategy and the development of the onto-semiotic approach resulted from the rational analysis of principles, issues and methods of various existing theoretical frameworks and from the application of the theoretical tools developed to experimental research. In this paper, a historical overview of the origin and development of EOS, its main contributions to research in mathematics education, its current international state and some reflections on its future potential development are presented.

Palabras clave: *Investigación didáctica, fundamentos teóricos, enfoque ontosemiótico, teorías didácticas, articulación de teorías*

¹ XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la Investigación desde la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. Baeza, 20-22 Septiembre 2012

Key words: *Didactic research, theoretical foundations, onto-semiotic approach, didactical theories, networking theories.*

Introducción

Desde hace 20 años la problemática de fundamentación teórica de la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha interesado a nuestro grupo de investigación (e.g., Godino, 1991) donde se han estudiado distintos enfoques y teorías propuestas en el área de conocimiento y disciplinas relacionadas. A principios de los años noventa se tuvo la oportunidad de conocer con detalle los trabajos publicados por Brousseau, Douady, Vergnaud, Chevallard, entre otros investigadores, en el marco de los cursos y seminarios de doctorado que impartieron en la Universidad de Granada. Así mismo, la impartición desde 1988 del curso “Teoría de la Educación Matemática” y la participación en los Seminarios de Investigación del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, permitieron situar las aportaciones de la *didáctica fundamental* en un contexto más amplio, en interacción con autores como H. Steiner, J. Kilpatrick, A. Bell, E. Fischbein, P. Ernest, entre otros.

Esta experiencia, y el contexto académico de la dirección de tesis doctorales, llevaron a la convicción de la necesidad y utilidad de clarificar, comparar y articular las principales teorías existentes, problemática de investigación que ha tomado recientemente un notable impulso a nivel internacional (Bikner-Ahsbah, et al., 2010). Fruto de este trabajo de fundamentación teórica es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), cuyo origen, motivación, aportaciones y perspectiva de futuro se presenta en esta ponencia.

Se comenzará describiendo en la sección 2 los problemas epistemológicos y didáctico-matemáticos que motivaron el EOS. En la sección 3 se resumen las etapas de desarrollo de esta línea de investigación y las principales nociones teóricas elaboradas. En la sección 4 se indican algunos resultados aportados sobre la comparación y articulación de marcos teóricos usados en didáctica de la matemática. Dado que uno de los objetivos de este seminario consiste en presentar las aportaciones de las líneas de investigación desarrolladas en el seno del Grupo DMDC de la SEIEM, en la sección 5 se describen las publicaciones en revistas indexadas con trabajos en los cuales se extienden y aplican las herramientas teóricas que componen el EOS, ofreciendo de este modo la proyección internacional de este marco teórico. Se concluye la ponencia indicando una previsión de nuevas ampliaciones y aplicaciones.

Problemas epistemológicos y didáctico-matemáticos que motivaron el EOS

Las cuestiones que motivaron nuestras reflexiones iniciales sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de las matemáticas corresponden a la epistemología de las matemáticas y a la epistemología de la didáctica de la matemática. A continuación se describen someramente los supuestos de algunas de las teorías que sirvieron inicialmente de base al EOS.

El enfoque de la Didáctica Fundamental de las Matemáticas (DFM) (Gascón, 1998) se caracteriza por problematizar la propia matemática, al considerarla como punto de entrada para la indagación didáctico-matemática, mientras que las dimensiones cognitivas e instruccionales se consideran derivadas o dependientes de la anterior. La epistemología matemática debe ser, por tanto, un objeto prioritario de reflexión y

análisis para la DFM, aunque los supuestos epistemológicos sobre las matemáticas de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 1978), punto de partida de la DFM, son en gran medida implícitos y escasamente elaborados. En la TSD se asume el postulado de que para cada objeto matemático existe una situación matemática (o una colección de situaciones) cuya resolución ha dado origen y sentido a dicho objeto, y que, por tanto, el aprendizaje escolar de dicho objeto debe partir de tales situaciones, o de adaptaciones apropiadas de las mismas. De manera implícita se está asumiendo que los objetos matemáticos (cuya naturaleza no se explicita) son, emergentes de las prácticas matemáticas, siendo éste uno de los postulados esenciales de las aproximaciones antropológicas (Wittgenstein) y pragmatistas (Peirce) en filosofía de las matemáticas.

En la última década del siglo pasado comienza a gestarse la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD), como una evolución y extensión de la noción de transposición didáctica (Chevallard, 1985), en la que se comienza a adoptar de manera explícita una epistemología matemática sobre bases antropológicas. Nociones básicas de la TAD en esta fase constitutiva son las de práctica matemática, praxema, objeto matemático, relación institucional y personal al objeto. En una fase posterior se introducen las nociones de técnica, tecnología y teoría, que junto a la de tarea configuran la noción central de *praxeología*. Se elabora de este modo una epistemología matemática explícita y más detallada sobre la que fundamentar el estudio de los fenómenos didáctico-matemáticos.

La Dialéctica Instrumento - Objeto y el Juego de Marcos (DIO-JM) (Douady, 1986) es una propuesta teórica que también incluye una posición epistemológica sobre las matemáticas de naturaleza antropológica. Para Douady los conceptos matemáticos tienen una doble dimensión: por un lado, posibilitan la acción (instrumento); por otro lado, son conceptualizados como entidades reutilizables en otros procesos similares (no se vinculan necesariamente a una situación determinada) y que pueden formar parte de un discurso más general (objeto). De esta forma, la distinción instrumento – objeto descrita por Douady se puede interpretar en términos de subsistema de prácticas operatorias y discursivas, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas de mutua interdependencia. Además, la noción de *marco* supone el reconocimiento de una relatividad de las prácticas matemáticas respecto de los “contextos de uso” internos a la propia matemática. El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución, su eficacia relativa e incluso al planteamiento de nuevos problemas.

Dentro del programa cognitivo en didáctica de la matemática destaca la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990), que también incluye algunas herramientas de naturaleza epistémica. La primera descripción que hace Vergnaud de un campo conceptual es la de “conjunto de situaciones”. Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

Los problemas epistemológico y cognitivo en didáctica de la matemática

Es en este contexto de reflexión epistemológica sobre las matemáticas, ofrecido por la TSD, la TAD, DIO-JM, TCC, en el que se planteó el problema central que da

origen al EOS, al considerar que no hay una respuesta suficientemente clara, satisfactoria y compartida en las teorías de referencia citadas. Dicho problema se puede formular en los siguientes términos:

PE (problema epistemológico): ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media, ...) en un contexto o marco institucional determinado?

Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:

PC (problema cognitivo): ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Una primera respuesta a estas cuestiones *onto-semióticas* fue presentada en el congreso celebrado en París en 1993, *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (Godino y Batanero, 1993), trabajo posteriormente ampliado y publicado en *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Godino y Batanero, 1994). Partiendo de la noción de objeto propuesta por Chevallard (1991, p. 8) se consideró necesario hacer un esfuerzo por clarificar las nociones introducidas hasta ese momento por la TAD, hacerlas operativas y poner de manifiesto las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente, como son, por ejemplo, las de concepción y significado.

Vemos, por tanto, que en la problemática inicial abordada por el EOS hay una cuestión epistemológica de base (precisar y explicitar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas), y un problema cognitivo (caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo), que se abordan simultáneamente y en relación dialéctica. Posteriormente se abordará la elaboración de una ontología matemática explícita (tipos de objetos y procesos matemáticos) que permita describir en términos operativos el significado del objeto matemático, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

El par <*sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos*> (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2012) se consideran nociones claves para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en didáctica de la matemática. Estas herramientas teóricas permiten reformular el problema epistémico (conocimiento institucional, socio-cultural) y cognitivo (conocimiento personal) de la didáctica de la matemática en los siguientes términos:

- ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objeto y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado institucional de referencia)
- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (Significado personal)
- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto).

El problema del diseño instruccional

Una vez obtenidas herramientas teóricas para analizar las dimensiones epistemológica y cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las

matemáticas, el EOS debía abordar cuestiones centrales para el diseño instruccional, que se pueden formular en los siguientes términos:

PIM (Problema de la instrucción matemática significativa): ¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?

PN (Problema normativo): ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?

Estas cuestiones instruccionales de nuevo se estudiaron partiendo de las teorías disponibles, en particular, la TSD, en la que la secuencia de situaciones adidácticas y didácticas (institucionalización), junto con la noción de contrato didáctico, se pueden interpretar como el esbozo de una teoría de la instrucción matemática significativa. Pero el "constructivismo y positivismo excesivos" que asume la TSD nos ha llevado a elaborar herramientas más flexibles de análisis de los procesos instruccionales (Godino, Contreras y Font, 2006), como se describe en la sección 3.

El problema de la comprensión, comparación y articulación de teorías

La existencia de diversas teorías para abordar los problemas didáctico-matemáticos puede ser un factor positivo, dada la complejidad de tales problemas. No obstante, si cada teoría aborda un aspecto parcial de los mismos, con lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados dispares y contradictorios, que pueden dificultar el progreso de la disciplina. Parece necesario tratar de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes, respetando el principio fundamental de la parsimonia metodológica. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

PEDM (Problema de epistemología de la didáctica de la matemática): Dadas las teorías T_1, T_2, \dots, T_n , focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i ?

Este es otro de los problemas centrales que dio origen al EOS: el intento de comprender, comparar, coordinar e integrar la TSD, TCC, DIO-JM, TAD, entre otras usadas en didáctica de la matemática, como, por ejemplo, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1996).

Etapas de desarrollo del EOS y principales nociones teóricas

Las herramientas que componen el EOS se han construido en tres etapas, en cada una de las cuales hemos ido refinando progresivamente el objeto de indagación. Estas herramientas se describen a continuación sucintamente, junto con los problemas abordados en cada una de ellas.

En los primeros trabajos, publicados en el periodo 1993 - 98 (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998) se desarrollaron y precisaron progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización) relacionándolas con las nociones de conocimiento y comprensión. Desde supuestos pragmáticos/ antropológicos, estas ideas trataron de centrar el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos

institucionalizados, pero sin perder de vista el sujeto individual hacia el que se dirige el esfuerzo educativo. Como se indica en Godino y Batanero (1994) este punto de partida trató de precisar la noción de práctica matemática y de objeto introducidas por Chevallard (1991; 1992) al tiempo que se aspiró a conectarlas con ideas centrales de la teoría de situaciones (Brousseau, 1986) y la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990).

En esta primera fase se propuso como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo (dimensiones institucional y personal del conocimiento matemático) “los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas”. Puesto que en los procesos comunicativos que tienen lugar en la educación matemática, no sólo hay que interpretar las entidades conceptuales, sino también las situaciones problemáticas y los propios medios expresivos y argumentativos, ello supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos de prácticas, así como su estructura.

En una segunda etapa, a partir de 1998, se vio necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005). Esta necesidad surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Por este motivo nos sentimos interesados en continuar con la elaboración de una ontología y una semiótica suficientemente ricas para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus “producciones”. Se llegó a la conclusión de que era preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. En consecuencia, en este periodo se intentó progresar en el desarrollo de una ontología y una semiótica específicas que estudiaran los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Estas cuestiones son centrales en otras disciplinas (como la semiótica, la epistemología y la psicología), aunque no se puede hablar de una solución clara para las mismas, pues las respuestas dadas son diversas, incompatibles o difíciles de compaginar, como se puede ver, por ejemplo, en los dilemas planteados por las aproximaciones propuestas por Peirce (1931-1958), Saussure (1915) y Wittgenstein (1973). El interés por el uso de nociones semióticas en educación matemática es también creciente como se muestra en Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger y Cifarelli (2003), el número monográfico de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006) y en Radford, Schubring y Seeger (2008). El EOS trata de dar una respuesta particular desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, ampliando las investigaciones realizadas hasta la fecha sobre los significados institucionales y personales y completando también la idea de función semiótica y la ontología matemática asociada introducidas en Godino y Recio (1998).

En una tercera etapa el interés se puso en los modelos teóricos propuestos en el seno de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006). En particular, se partió de algunas limitaciones de la Teoría de Situaciones derivadas de supuestos constructivistas que le sirven de base; de modo más específico del papel crítico que se atribuye a las situaciones adidácticas en dicha teoría. Se consideró necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados que permitiesen describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas. Las nociones de patrón de interacción, negociación de significados, norma sociomatemática, aportadas por el

interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000) se consideraron herramientas útiles para abordar esta problemática.

Como consecuencia, se propuso distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y afectiva (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas). El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporcionó criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y se adoptó la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las *configuraciones y trayectorias didácticas*.

En síntesis, el conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas:

(1) *Sistema de prácticas* (operativas, discursivas y normativas), que asume una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

(2) *Configuración de objetos y procesos matemáticos*, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

(3) *Configuración didáctica*, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

(4) *Dimensión normativa*, sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.

(5) *Idoneidad didáctica*, como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Comparación y articulación de marcos teóricos

Como se ha indicado, el EOS se plantea desde sus inicios como problemática de reflexión e investigación la comparación y articulación de marcos teóricos. Se conciben las teorías como instrumentos que permiten definir los problemas de investigación y la estrategia metodológica para caracterizar los fenómenos didácticos, permitiendo analizar las diversas facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este sistema teórico no puede elaborarse con la simple agregación de elementos de distintos enfoques disponibles, sino que será necesario elaborar otros nuevos más eficaces, enriqueciendo algunas nociones ya elaboradas, evitando redundancias y conservando una consistencia global. Se debe aspirar a incluir en el mismo las nociones teóricas y metodológicas “necesarias y suficientes” para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Como se analiza en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006), el EOS se propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal – institucional. La descripción y explicación de la dialéctica personal – institucional precisa realizar análisis microdidácticos, tanto de los comportamientos de los sujetos agentes como de la ecología de los significados, en los procesos de estudio matemáticos. La finalidad del trabajo citado coincide en gran medida con el de Legrand (1996), el contraste de modelos teóricos en didáctica de la matemática, pero centra la atención en nociones más primitivas, que, en cierta medida, están en la base de la noción de *situación fundamental*: conocimiento, sentido, concepción, saber. Por este motivo los autores analizan el uso de estas nociones en los modelos teóricos en discusión, mostrando sus limitaciones y la forma en que la ontología matemática explícita que se propone en el EOS y la noción de función semiótica pueden ayudar a compararlos y progresar hacia su articulación coherente.

También en Godino et al. (2006) se sostiene la tesis de que el EOS puede ayudar a comparar los marcos teóricos descritos anteriormente y a superar algunas de sus limitaciones para el análisis de la cognición matemática. Esta expectativa se basa en la generalidad con la que se define en el EOS las nociones de problema matemático, práctica matemática, institución, objeto matemático, función semiótica y las dualidades cognitivas (persona – institución; unitario – sistémico; ostensivo – no ostensivo; extensivo – intensivo; expresión – contenido). Dichas nociones permiten establecer conexiones coherentes entre los programas epistemológicos y cognitivos sobre unas bases que se describen como ontosemióticas.

Los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se pueden describir de manera global, con la noción de “sistemas de prácticas personales”, que queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en este sistema de prácticas se distinguen entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de *praxeología* (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente faceta institucional. También se puede incorporar la dualidad *instrumento-objeto* que propone Douady para los conceptos matemáticos.

Como respuesta a la pregunta “qué significa el objeto función”, por ejemplo, para un sujeto (o una institución) se proponen los modos de “hacer y de decir” ante un tipo

de problemas que ponen en juego, el “objeto función”. Esta modelización semiótico-pragmatista del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales (intensionales) constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

Las nociones de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas en el EOS, pues el significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica. Por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo – intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

La noción de representación y registro semiótico usadas por Duval y otros autores hacen alusión según el EOS, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos.

El uso que se hace en Teoría de Situaciones Didácticas del término *sentido* queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge, y “le da su sentido” (podemos describirlo como “significado situacional”). Según el EOS esta correspondencia es, crucial, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido bien en términos cognitivos o bien en términos epistémicos.

El EOS considera que la didáctica de la matemática debe identificar, no solo los fenómenos relativos a la ecología de los saberes matemáticos (objetivo principal de la TAD), o los correspondientes al diseño e implementación de ingenierías didácticas (objetivo principal de la TSD) sino también los relativos al aprendizaje de los alumnos. En última instancia los esfuerzos de los profesores e investigadores convergen en el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, esto es, se apropien de los conocimientos matemáticos que les permitan desenvolverse en la sociedad y, en algunos casos, contribuyan al desarrollo de nuevos conocimientos. El abordaje de cuestiones como, ¿por qué los alumnos tienen dificultades en resolver este tipo de tareas?, ¿es idónea esta tarea, este discurso matemático, para estos alumnos en unas circunstancias dadas?, etc., supone un nivel “microscópico” de análisis de fenómenos cognitivos y didácticos y requiere usar nociones teóricas y metodológicas específicas.

Los esquemas, conceptos y teoremas en actos, que proponen la TCC y la RRS (Registros de Representación Semiótica) se orientan en esa dirección. Ahora bien, ¿son suficientes estas nociones para este aspecto del trabajo didáctico? Consideramos que la “configuración cognitiva” que propone el EOS, con su desglose en entidades situacionales, lingüísticas, procedimentales, conceptuales, proposicionales y argumentativas permite un análisis más fino del aprendizaje matemático de los estudiantes. La noción de configuración, en su versión epistémica, permite también hacer análisis microscópicos de los objetos matemáticos, caracterizar su complejidad

ontosemiótica y aportar explicaciones de los aprendizajes en términos de dicha complejidad.

El EOS permite estudiar los hechos y fenómenos a nivel microscópico, incluso fenómenos que puede calificarse de singulares. ¿Qué ocurre aquí y ahora? ¿Por qué ocurre? ¿Qué aprende, o deja de aprender, este alumno en estas circunstancias? Aportar respuestas a estas cuestiones puede ser un primer paso para generar hipótesis referidas a otros alumnos y circunstancias. Para hacer este tipo de análisis el EOS introduce las dualidades cognitivas: unitaria – sistémica; ostensiva – no ostensiva; extensiva – intensiva; expresión – contenido (función semiótica). Un ejemplo de estos análisis más puntuales en el marco del EOS se puede encontrar en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005). Estos autores utilizan conjuntamente las dualidades extensivo – intensivo y expresión - contenido para explicar, en el caso de la función derivada, las dificultades de los alumnos relacionadas con la complejidad semiótica inherente al uso de elementos genéricos. Por otra parte, los sistema de prácticas, instituciones, marcos y contextos de uso, ecología de significados son nociones apropiadas para realizar análisis de tipo macroscópico (curricular, instruccional). La noción de conflicto semiótico, cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa, es también útil para la realización tanto de análisis de nivel macro como de nivel microdidáctico en la producción y comunicación matemática.

Perspectiva internacional del EOS. Aportaciones en revistas indexadas

Una manera de conocer los resultados de los trabajos realizados por una comunidad científica y valorar su contribución a un área de conocimiento es mostrando las publicaciones en revistas de alta difusión internacional. En un Anexo hemos incluido el listado de las publicaciones en revistas indexadas en las que se han presentado desarrollos y aplicaciones del EOS. En la Tabla 1 incluimos un resumen cuantitativo de dichas publicaciones, indicando las bases de datos en las que se incluyen las revistas correspondientes.

Otros trabajos con un potencial alto de difusión internacional son los capítulos de libros publicados en inglés por las editoriales Kluwer (Godino y Batanero, 1998), Springer (Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011) y Sense Publishing (Font, Godino y Contreras, 2008).

Asimismo, se vienen presentando regularmente trabajos en los principales congresos internacionales del área, tales como PME, ICME, CERME, otros latinoamericanos como RELME y CIBEM, o en los simposios de SEIEM. En Contreras, Ordóñez y Batanero (2005) se incluyen las comunicaciones y ponencias presentadas en un congreso celebrado en la Universidad de Jaén sobre aplicaciones y desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas (expresión con la se designaba en dicha fecha al EOS).

Conviene resaltar que una parte importante de los trabajos publicados, en sus primeras versiones, han sido presentados y discutidos en el seno del Grupo de Trabajo DMDC de la SEIEM, o en el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM) constituido en 1991 y que sirvió de punto de partida del Grupo DMDC (estos trabajos están disponibles en internet en, <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm>). Las tesis doctorales apoyadas en este marco teórico, así como cursos y conferencias en universidades españolas y extranjeras son otro indicador de las aportaciones de este enfoque teórico.

Tabla 1. *Artículos publicados en revistas indexadas*

<i>Revistas indexadas</i>	<i>Bases de datos</i>	<i>Nº de artículos</i>
Educational Studies in Mathematics	ISI, ERIH, SCOPUS	9
Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME)	ISI, ERIH, SCOPUS	12
Revista de Educación (Madrid)	ISI, ERIH, SCOPUS	1
Enseñanza de las Ciencias	ISI, ERIH	6
Infancia y Aprendizaje	ISI, SCOPUS	1
Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)	ISI, SCOPUS	4
International Statistical Review	ISI, SCOPUS	1
ZDM. The International Journal on Mathematics Education	ERIH, SCOPUS	1
Journal of Statistics Education	ERIH, SCOPUS	1
For the Learning of Mathematics	ERIH	3
Recherches en Didactique des Mathematiques	ERIH	6
Statistics Education Research Journal	ERIH	1
International Electronic Journal of Mathematics Education	SCOPUS	1
Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática	LATINDEX	7
Educação Matematica Pesquisa	LATINDEX	3
Educación Matemática	LATINDEX	7
Números	LATINDEX	1
Praxis Educativa	LATINDEX	1
Paradigma	LATINDEX	4
Acta Scientiae	LATINDEX	1
Publicaciones	LATINDEX	1
TOTAL		72

Previsión de nuevos desarrollos

Una característica principal del EOS es su aspiración a construir un marco teórico integrador para la investigación en didáctica de la matemática. Mediante una estrategia de clarificación racional de las herramientas teóricas aportadas por diversas teorías se viene construyendo un sistema de nociones que consideramos “necesarias y suficientes” para abordar las diversas facetas y niveles de análisis de los problemas didáctico-matemáticos. Este objetivo, por supuesto, no lo damos por finalizado, sino que constituye un proyecto de investigación abierto a nuevos complementos y aplicaciones. Indicamos a continuación algunas ideas sobre las que pretendemos avanzar.

1. Clarificar y explicitar de manera más sistemática los presupuestos ontológicos, semióticos, psicológicos, sociológicos y pedagógicos que sirven de base al EOS. De manera particular dichos supuestos se deben apoyar de manera sólida en los supuestos filosóficos sobre las matemáticas de Wittgenstein, en el pragmatismo y la semiótica de Peirce, la psicología social de Vygotsky, la fenomenología de Husserl, entre otras.
2. Comparar y coordinar los actuales desarrollos del EOS con otros modelos teóricos usados en educación matemática, con la finalidad de refinar y completar las herramientas elaboradas. En particular se espera que un estudio más detallado de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1995; 1996), y las teorías lingüísticas de Austin (1970) y Searle (1980) mejoren el elemento *lenguaje*,

incluido como un componente primario de las configuraciones epistémicas y cognitivas. Así mismo, la fenomenología didáctica (Freudenthal 1983), la etnomatemática (D'Ambrosio, 1985) y la socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003), podrían ser integradas de manera consistente y productiva desde la perspectiva del EOS. Por otro lado, en un trabajo reciente (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2012) se ha abordado la comparación y articulación del EOS con la Teoría de la Génesis Instrumental (Rabardel, 1995), en este caso mediante la aplicación de las respectivas herramientas al análisis de un episodio instruccional. Esta línea de trabajo se ha mostrado productiva y se prevé aplicar a otros marcos teóricos.

3. La idoneidad didáctica, sus facetas, componentes e indicadores pueden ser el punto de partida para desarrollar una teoría de la instrucción matemática significativa (Godino, 2011). Ello requiere comparar y coordinar dichas nociones con las teorías instruccionales aportadas desde la Didáctica general.
4. Las herramientas de análisis epistémico elaboradas están sirviendo para clarificar la naturaleza de distintos objetos matemáticos y estadísticos, el álgebra elemental, la visualización, entre otros. Las ideas de configuración cognitiva y conflicto semiótico están permitiendo comprender mejor los aprendizajes de los estudiantes sobre diversos temas específicos (promedios, gráficos estadísticos, cálculo infinitesimal, números decimales, proporcionalidad etc.). Las herramientas para el análisis instruccional (configuración y trayectoria didáctica) también están siendo aplicadas en algunas investigaciones (Pochulu y Font, 2011; Assis, Frade y Godino, 2012) para analizar el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje sobre temas específicos. En resumen, la aplicación del EOS para producir nuevos conocimientos didácticos es sin duda el objetivo final de la construcción y puesta a punto de tales herramientas, por lo que deberá ser potenciada en el futuro.

Aunque las herramientas teóricas EOS han surgido en el ámbito académico de la investigación didáctica, orientadas a clarificar la naturaleza de dicha investigación y facilitar la producción de nuevas comprensiones y conocimientos, pueden ser adaptadas para su uso por parte de los propios profesores de matemáticas. Esto supone un campo de investigación en formación de profesores, ya que es necesario realizar adaptaciones de tales artefactos conceptuales a fin de convertirlos en instrumentos de reflexión y análisis de la propia práctica docente. En Godino (2009; 2011) se presentan ideas en esta dirección.

Información complementaria sobre los trabajos desarrollados en el marco del EOS, con acceso a las publicaciones respectivas, está disponible en las páginas webs de J. D Godino, C. Batanero y V. Font:

<http://www.ugr.es/local/jgodino>; <http://www.ugr.es/local/batanero>;
<http://webs.ono.com/vicencfont/>

Reconocimientos

El origen y desarrollo del EOS está estrechamente apoyado en el trabajo realizado por otros investigadores, en particular C. Batanero, V. Font, A. Contreras, M. R. Wilhelmi, U. Malaspina, M. Pochulu, entre otros, a quienes expreso mi sincero reconocimiento.

Referencias

- Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. y Cifarelli, V. C. (Eds.). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas.
- Assis, A., Frade, C. y Godino, J. D. (2012). Influencia de los tipos de interacciones didácticas en la progresión del aprendizaje matemático: análisis de una actividad exploratorio-investigativa sobre patrones. *BOLEMA* (en revisión)
- Austin, J. L. (1970). *Palabras y acciones*. Buenos Aires: Paidós. (Obra original publicada en inglés: *How to do things with words*, Oxford: Clarendon Press, 1962)
- Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, Y., Arzarello, F., Radford, R., Artigue, M. y Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En Pinto, M. M. F. y Kawasaki, T. F. (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 145-175. Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1). 27-40
- Castro, C. de (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 11, 59 - 77
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage
- Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.
- Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Contreras, A., Ordóñez, L. y Batanero, C. (2005). *Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151-186.

- D'Ambrosio. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5, 44-8
- Drijvers, P., Godino, J. D. Godino, Font, V. y Trouche, L. (2012). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics* (aceptado).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0
- Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, historicity, and culture* (pp. 157-173). Rotterdam: Sense Publishing.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-33.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: A. Gutierrez (Ed.), *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Síntesis, 1991
- Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1993). La notion du signifié dans la didactique des Mathématiques. En M. Artigue y cols (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 218-224). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En: A. Sierpiska (Ed). *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.
- Godino, J. D. y Llinares, S. (2000), El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1) 70-92
- Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R. y Wilhelmi, M.R. (2011). Models for statistical pedagogical knowledge. En, C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 271-282). Berlin: Springer.
- Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, 1.8. University of Stellenbosch, South Africa.
- Legrand, M. (1996). La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (2), 221-280.
- Peirce, C. S. 1931-1958. *Collected Papers*, vols. 1-8. C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), 361-394.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand-Collin.
- Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sáenz-Ludlow, A. y Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics* 61 (1-2), 1-10.
- Saussure, F. (1915). *Curso de lingüística general*. Madrid: Alianza, 1991
- Searle, J. (1980). *Actos de Habla. Ensayo de filosofía del lenguaje* (3a. edición). Madrid: Ed. Cátedra. (Original publicado en 1969).
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10(2,3), 133-170.
- Wittgenstein, L. (1973). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Anexo

Artículos publicados en revistas indexadas con desarrollos y aplicaciones basadas en el EOS

- Alsina, A. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 7-32 .
- Arrieche, M. (2006). Papel de la teoría de conjuntos en la construcción de los números naturales. *Paradigma*, 27, (1), 349-363.
- Assis, A., Godino, J.D. y Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa- RELIME*. (Aceptado).
- Batanero, C. (2002) Discussion: The role of models in understanding and improving statistical literacy. *International Statistical Review*, 70 (1), 37-40.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1).
- Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 73-88.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18
- Contreras, A. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 - 3, 277 - 310.
- Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa- RELIME*, 9(1), 65-84
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151 - 186.
- Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26(42B), 667-690.
- Contreras, A., Luque, L. y Ordoñez, L. (2004). Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática*, 16(1), 59-88.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Mathématiques*, 25(2), 151-186.

- Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 367-384.
- D'Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 10(2).
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVIII, N° 2, 49-7.
- De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 59 - 77.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2012). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9416-8.
- Fernández, T., Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, 26 (42) (en prensa)
- Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.
- Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19,2, 95-128.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN*, 26, 9-25.
- Font, V. y Acevedo, J.I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 405-418.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.
- Font, V. y Peraire, R. (2001) Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación matemática*, 13(2), 55-67.
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de ciencias Económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345.

- Font, V., Bolite, J. y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 131–152.
- Font, V., Godino, J. D., Planas, N., y Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, 30(1), 15-19.
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Font, V. y Godino, J. D. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2-7.
- Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Um enfoque ontoemiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae*, 10(2), 7-37.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 3-36.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, Nº 2, 221-252.
- Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias* (aceptado).
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, nº especial, 131-155.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-49.

- Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 117-150.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19, 34-46.
- Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Números*, nº 64.
- Godino, J.D. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa* (aceptado).
- Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23, (3), 5-37.
- Gusmao, T. C., Font, V. y Cajaraville, J. A. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso Nerea. *Educação Matemática Pesquisa*. 11(1), 8-43.
- Konic, P., Godino, J. D. y Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*, 74 (Julio, 2010), 57-74.
- Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365-399.
- Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107-130.
- Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the ontosemiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 139- 160.
- Ortiz, J. J. y Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática*, 23(2), 91-109.

- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pochulu, M. (2010) Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(3), 307-336.
- Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), 361-394.
- Ramos, A. B y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME*, 11(2), 233-265.
- Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma*, XXVII (1), 237-264.
- Recio, A.M. y Godino, J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.
- Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletim de Educação Matemática - Bolema*, 26, 42B, 559-588.
- Roa, R., Batanero, M.C. y Godino, J.D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, 15(2)
- Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción de la derivada. *Educación Matemática*, (en prensa)
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77 - 120.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (2), 72-90.