

RECORRIDOS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: EL GRUPO TAD¹

RESEARCH PATHS IN DIDACTICS OF MATHEMATICS: THE ATD GROUP

Bosch, M.

IQS School of Management, Universitat Ramon Llull

Resumen

El grupo TAD de investigación en la teoría antropológica de lo didáctico nace en 1990 cuando iniciamos nuestra cooperación con el equipo que dirige Yves Chevallard en la universidad de Marsella. En la actualidad, este grupo integra una veintena de investigadores españoles, portugueses y latinoamericanos cuyas aportaciones al desarrollo de la didáctica pueden agruparse en cinco grandes recorridos de investigación que se entrecruzan constantemente y que surgen de cuestiones vinculadas a los diferentes ámbitos institucionales de la práctica educativa. La reconstrucción que proponemos aquí prioriza los tipos de problemas abordados durante estos años, que son los que marcan los hitos de cada recorrido. Visto retrospectivamente, sorprende cuán ligados pueden aparecer los problemas internos al desarrollo de la propia teoría con aquellas cuestiones que acechan al investigador en su entorno docente y que aparecen como los principales motores de la investigación.

Abstract

The ATD group of research in the Anthropological Theory of the Didactic was born in 1990 when we started cooperating with the team led by Yves Chevallard in the university of Marseilles. Nowadays, this group integrates about 20 Spanish, Portuguese and Latin American researchers whose contributions to the development of didactics can be organised around five big constantly intertwined strands emerging from questions related to different institutional settings in the educational practice. The reconstruction here proposed gives priority to the type of problems approached during these years, which mark the milestone of each research course. In retrospective, it is remarkable to see such a strong relation between the problems internal to the development of the didactic theory itself and the questions that haunt the researcher in its teaching environment and that appear as the real driving force of research.

Palabras clave: *Teoría antropológica de lo didáctico, recorridos de estudio e investigación, proceso de algebrización, formación del profesorado, teoría de las situaciones didácticas.*

Key words: *Anthropological Theory of the Didactic, study and research course, algebraisation process, teachers' training, Theory of Didactic Situations.*

¹ XVI Simposio de la SEIEM. Seminario de investigación. Aportaciones a la Investigación desde la Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica. Baeza, 20-22 Septiembre 2012.

El grupo TAD

En los inicios de los años 90, cuando se crea el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), algunos de sus miembros estábamos empezando a colaborar con el investigador francés Yves Chevallard en lo que entonces se conocía como “enfoque antropológico en didáctica” y que más tarde daría lugar a la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD). En el momento de la creación del grupo de la SEIEM “Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica” en 1998, el equipo de investigadores que nos inscribíamos en el programa de investigación de la TAD contaba con ocho personas de distintas universidades españolas. Hoy día nuestro equipo agrupa a más de veinte investigadores de España, Portugal, Chile, México y Argentina, cuyas aportaciones se han desarrollado a lo largo de una decena de proyectos de investigación, dando lugar a la realización de 15 tesis doctorales (algunas todavía en curso) y a un gran número de publicaciones que presentamos al final de este trabajo. Se debe a este equipo la organización del primer Congreso Internacional sobre la TAD, en Baeza en 2005, un congreso que en abril del 2013 celebrará su cuarta edición y que agrupa casi un centenar de investigadores, principalmente de Europa y América Latina, que trabajan en la TAD o se interesan por sus desarrollos (Ruiz-Higueras, Estepa y García 2007, Bronner et al. 2010, Bosch et al. 2011).² El reconocimiento que supuso la concesión de la medalla Hans Freudenthal a Yves Chevallard en 2009 por la creación de lo que la *International Commission of Mathematics Instruction* calificó como “*a major program of research in mathematics education*” ha generado últimamente un impulso importante para la difusión internacional de nuestros trabajos, que siempre hemos llevado a cabo bajo el liderazgo científico de este gran investigador.

El objetivo de este artículo es presentar a grandes rasgos las aportaciones del grupo TAD a la investigación didáctica, proponiendo una reconstrucción de los distintos recorridos que hemos ido desarrollando durante estas dos últimas décadas. Es difícil recrear retrospectivamente una dinámica de la investigación colectiva marcada por múltiples circunstancias personales e institucionales que no siempre encajan dentro de lo que podríamos concebir como la “lógica propia a la investigación” (lógica que supone, en particular, una concepción previa de lo que es la investigación didáctica). Como toda narración, la que propondré requiere además una descontextualización, linearización, destemporalización y despersonalización relativas de esta dinámica, proceso que forma parte del trabajo de síntesis y evaluación de la producción científica y cuyos criterios no son siempre fáciles de explicitar.

Mi propuesta pretende complementar, desde un punto de vista alternativo, la que realizó recientemente Josep Gascón (2010). He elegido como eje estructurador cinco grandes recorridos de investigación caracterizados por las “grandes cuestiones” que podemos situar en su origen. Con ello intentaré exponer las contribuciones del grupo de forma comprensible, haciendo especial hincapié en los problemas que han dirigido las investigaciones y dejando en un segundo plano los desarrollos teóricos que las han acompañado, aunque en algunos casos estos hayan sido determinantes en la manera de plantear estos problemas y en la metodología seguida para abordarlos. En contra de una visión ingenua de la evolución científica, que tiende a considerar las herramientas teóricas como preexistentes a sus “aplicaciones prácticas”, veremos aquí que los trabajos

² La mayoría de publicaciones, materiales y proyectos de investigación producidos por el grupo TAD se encuentran en la web: www.atd-tad.org

de investigación que sirven de hilo a mi presentación, especialmente los que han dado origen a las diversas tesis doctorales, lejos de ser meras aplicaciones de una teoría didáctica establecida de antemano, constituyen verdaderas aportaciones al desarrollo del enfoque que propone la TAD.

Del álgebra elemental a la modelización funcional

El proceso de algebrización en la enseñanza secundaria

Ya desde sus inicios con el estudio de los procesos de transposición didáctica (Chevallard 1985), el desarrollo de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) ha estado estrechamente vinculado al problema de la enseñanza del álgebra elemental en secundaria. Este problema se formula y aborda siguiendo los principios que rigen el cuestionamiento básico del enfoque epistemológico en didáctica, es decir preguntándose sobre la naturaleza y el modo de existencia o funcionamiento de esta entidad llamada “álgebra” en las distintas instituciones sociales, especialmente en la escuela y en la llamada “matemática sabia”. Preguntarse qué es el álgebra elemental, qué actividades se asocian a este ámbito matemático y cuáles se podrían asociar, qué álgebra se enseña en la escuela y por qué, y también qué aspectos del álgebra quedan excluidos de la enseñanza, constituye, en cierto modo, un cuestionamiento anterior al problema docente de cómo enseñar el álgebra y cómo ayudar a los alumnos en sus dificultades de aprendizaje. Las diversas contribuciones de nuestro grupo al estudio de este problema han quedado recientemente recogidas en Gascón (2011) y Bosch (2012), así como en el primer número especial de la revista *Recherches en didactique des mathématiques* dedicado a la enseñanza del álgebra elemental (Chevallard y Bosch 2012; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch y Gascón 2012).

El inicio del recorrido que aquí presentaremos se remonta a mi trabajo de tesis *La dimensión ostensiva en la actividad matemática* (Bosch 1994), que propone una nueva conceptualización para estudiar el papel de los distintos sistemas de signos (lenguaje verbal oral y escrito, escrituras, simbolismos, grafismos, gestos, etc.) en la actividad matemática, a través de las nociones de objeto *ostensivo* y *no ostensivo* y de la consideración de la *valencia instrumental* de los ostensivos en el desarrollo de la actividad. El caso del álgebra elemental juega en este estudio un papel primordial, especialmente cuando se contrasta con la aritmética, que tradicionalmente antecede al álgebra en la organización curricular (Bosch y Chevallard 1999, Bosch 2001).

El análisis de las principales características del álgebra como saber enseñado, sus relaciones con la aritmética y su papel como herramienta de modelización se lleva a cabo partiendo especialmente del estudio de los procesos transpositivos sufridos por estos grandes ámbitos matemáticos desde la enseñanza clásica anterior a la matemática moderna hasta nuestros días. Los trabajos de Yves Chevallard (1985, 1989a, 1989b) abordaban esencialmente el caso del sistema educativo francés, aunque muchos de los fenómenos detectados tienen una universalidad mucho mayor. A pesar de haber ampliado una parte de este estudio a la aritmética y álgebra de la enseñanza clásica española (Bosch 1994), faltaba abordar el caso, sin duda más complejo, del estatuto y las relaciones entre estos ámbitos en la enseñanza actual, que se presentaba a primera vista como una amalgama de organizaciones matemáticas en diferentes “estados transpositivos”, donde las razones y proporciones y las reglas de tres tan características del universo clásico coexisten con temas más propios de la matemática “postmoderna”, como las “aplicaciones lineales” o las “funciones de proporcionalidad”. De este

problema surge el trabajo de tesis de Pilar Bolea (2003). Una de sus principales aportaciones fue el poner de manifiesto que el análisis didáctico de un ámbito de enseñanza como el álgebra elemental requiere por parte de la investigación didáctica la elaboración de un punto de vista propio sobre el contenido matemático considerado.

Desde esta perspectiva, y tomando como ingredientes fundamentales los trabajos iniciales de Y. Chevallard en este ámbito, se elabora un *modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar* que presenta este contenido, no como una obra matemática acabada y relativamente autónoma (como podría serlo, por ejemplo, la teoría de las razones y proporciones, o la geometría con regla y compás), sino como un instrumento de modelización de obras matemáticas previamente construidas, lo que designamos como *proceso de algebrización* (Bolea, Bosch y Gascón 2001a, 2001b, 2004; Gascón 1994-95). El análisis de las organizaciones matemáticas estudiadas en la enseñanza secundaria española puso entonces en evidencia el carácter fragmentario de este proceso, marcado en particular por la restricción del álgebra a la resolución de ecuaciones de una variable y por la ausencia de un trabajo mínimamente funcional con fórmulas y parámetros. También evidenció la algebrización abrupta que sufre la matemática enseñada en el paso de la secundaria obligatoria al bachillerato y a la universidad, sin que se hayan proporcionado previamente a los estudiantes las herramientas necesarias para llevar a cabo este proceso modelizador.

Proporcionalidad y modelización funcional

Cuando se formula el problema de la enseñanza del álgebra en Secundaria en términos del proceso de algebrización, surge la necesidad de profundizar en las relaciones que plantea esta perspectiva con la visión, propia de la TAD, de la matemática como herramienta de modelización. Los trabajos iniciales de Y. Chevallard (1989b) habían aportado una primera conceptualización del proceso de modelización matemática, evidenciando en particular la ausencia, en la escuela, de una relación a los modelos matemáticos como herramientas productoras de conocimientos. En efecto, la epistemología escolar dominante tiende a presentar los contenidos matemáticos como entidades con interés por sí mismas, que se trata de conocer y aprender a utilizar, en lugar de verlas como herramientas concretas para expresar hipótesis sobre los sistemas considerados, que pueden convertirse, a su vez, en nuevos sistemas para ser modelizados. De ahí que las situaciones extramatemáticas que se plantean como sistemas para ser matematizados acaben funcionando más como “modelos de los modelos” que como sistemas en sí mismos: por ejemplo cuando se considera la relación entre precio y cantidad o entre distancia y tiempo como prototipo de relación de proporcionalidad, en lugar de ver que la linealidad es una forma particular de expresar esta relación, aunque sea de forma aproximada. Los estudios de los fenómenos transpositivos relativos a la noción de función (Ruiz-Higueras 1994, 2001) y a la de proporcionalidad de magnitudes (Bosch 1994 y Bolea, Bosch y Gascón 2001b) se inscribían en esta problemática sin abordarla de frente. El trabajo de tesis de Francisco Javier García (2005) la retomó, aportando avances fundamentales. En primer lugar, mostró de qué manera el modelo general sobre la actividad matemática que propone la TAD, y que incluye la consideración de la modelización intramatemática como proceso esencial de desarrollo de las matemáticas, permitía articular dos ámbitos que la mayoría de investigaciones de la corriente internacional sobre “Mathematical modelling and application” consideran totalmente disjuntos: la enseñanza y aprendizaje de “contenidos” y el de la “práctica de modelización”. En particular, se propuso una reconceptualización de la “modelización matemática” en términos de construcción de

praxeologías de complejidad creciente, integrando así la modelización de sistemas extra-matemáticos con la de sistemas intra-matemáticos. Asimismo, apoyándose en un modelo epistemológico de referencia sobre los modelos funcionales elementales, diseñó un proceso didáctico para la introducción de la relación de proporcionalidad como una relación más dentro de un conjunto de relaciones posibles entre dos magnitudes discretas como un intento de romper el aislamiento y la atomización del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria (García, Bosch, Gascón y Ruiz-Higueras 2006 y 2007; Bosch, García, Gascón y Ruiz-Higueras 2007). Finalmente, llevó a cabo un estudio experimental de dicho proceso con alumnos de segundo ciclo de la educación secundaria obligatoria (14-16 años) partiendo de la planificación de un plan de ahorro, dentro del paradigma incipiente de los “recorridos de estudio e investigación” sobre el que volveremos más adelante.

La introducción del álgebra elemental como herramienta de modelización

Al proponer una conceptualización del álgebra elemental como proceso de modelización de organizaciones matemáticas previamente construidas, surge el problema de determinar qué tipo de organizaciones pueden resultar más efectivas para introducir este proceso en la enseñanza secundaria. Esta nueva línea de avance se basó en la propuesta de Y. Chevallard de considerar una organización matemática en torno a los *programas de cálculo* que, en cierto sentido, recubre la mayor parte del trabajo aritmético realizado en primaria y contiene todas aquellas técnicas de resolución de problemas basadas en la realización sucesiva de operaciones aritméticas básicas (sumas, restas, productos y divisiones). Al trabajar con programas de cálculo, surge en seguida un gran número de cuestiones que no pueden resolverse en el ámbito de esta organización y permite motivar un trabajo de algebrización progresiva de estos programas que conduce rápidamente a la construcción de las distintas herramientas algebraicas, desde el cálculo ecuacional con una incógnita, a las ecuaciones e inecuaciones con parámetros, pasando por la manipulación de fórmulas y culminando en el trabajo con funciones de varias variables. La propuesta de un modelo epistemológico de referencia para este rico proceso de algebrización que recubre, y excede, el trabajo algebraico de la enseñanza secundaria, al tiempo que lo articula con la matemática de la enseñanza primaria y con la modelización funcional del bachillerato, es una de las principales aportaciones de la tesis de Noemí Ruiz-Munzón (2010). Siguiendo la vía abierta por el trabajo de F. J. García (2005) y la modelización funcional, esta investigación también se basa en el diseño, experimentación y desarrollo de distintos procesos didácticos con un doble objetivo. El primero es poner a prueba experimentalmente el modelo epistemológico de referencia propuesto y poderlo refinar localmente. El segundo consiste en estudiar las restricciones institucionales que pesan sobre estas propuestas y las necesidades tanto matemáticas como didácticas que su funcionamiento pone en evidencia. Entre las restricciones detectadas, algunas provienen de la *epistemología escolar dominante* en Secundaria, es decir en la manera cómo se interpreta este ámbito en los documentos curriculares, libros de texto y otros materiales didácticos, mientras que otras están más ligadas al contrato didáctico y pedagógico imperantes, es decir a la manera de interpretar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y de organizar en general la enseñanza de cualquier disciplina. Podemos citar al respecto el hecho que las cuestiones abordadas en clase sean siempre problemas “pequeños” que se pueden resolver en un corto espacio de tiempo, que las validaciones de las respuestas sean responsabilidad casi exclusiva del profesor y que raramente se

retomen conocimientos previamente construidos para desarrollarlos, modificarlos o incluso desmentirlos.

Tomando en cuenta estas restricciones, la implementación de un proceso de algebrización funcional y articulado en el currículum obligatorio puede convertirse en una propuesta “realista” siempre y cuando se cumplan unas condiciones y se colmen unas necesidades en infraestructuras matemáticas y didácticas que van más allá del voluntarismo de los profesores y de sus necesidades formativas (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón 2010, 2011; Bosch 2010). Este tipo de estudio corresponde a lo que en la TAD se considera el problema de la *ecología* escolar de los saberes y que se formula en términos de la *problemática posibilista* en didáctica: “¿Qué elementos del álgebra elemental tienen cabida hoy día en la escuela, cuáles están prácticamente ausentes y qué nuevas condiciones permitirían su existencia?” (Chevallard y Bosch 2012).

En relación con esta problemática, el caso de la enseñanza de los números negativos aparece como un ejemplo paradigmático de las restricciones transpositivas que pesan sobre los contenidos matemáticos enseñados en la escuela. Basándose en un análisis epistemológico iniciado en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, Eva Cid (2000, 2001, 2004) muestra cómo la vinculación de estos números al ámbito de la aritmética conduce a una estrategia de enseñanza basada en la utilización de modelos concretos para su construcción y en la anteposición de una problemática teoricista que da prioridad a la definición del concepto de número negativo y a su “significado”, frente a la problemática práctica que les dio origen históricamente como herramientas necesarias para el desarrollo del trabajo algebraico —en efecto los números negativos (también llamados “algebraicos”) tardaron muchos años en ser considerados como “números verdaderos” por los propios matemáticos... En una investigación reciente que toma como punto de partida el proceso de algebrización de los programas de cálculo aritmético (Cid y Bolea 2010; Cid y Ruiz-Munzón 2011), se propone una construcción alternativa a la escolar tradicional haciéndolos aparecer como una necesidad técnica del trabajo de manipulación de expresiones algebraicas. Las experimentaciones llevadas a cabo con alumnos de primer ciclo de la educación secundaria obligatoria (12-14 años) muestran que el modelo adoptado es una herramienta productiva desde el punto de vista del diseño de propuestas de enseñanza, permitiendo llevar a cabo en el aula una introducción funcional de los números enteros situándolos en un entorno algebraico. Dicha introducción simplifica enormemente el aprendizaje de sus reglas de manipulación y conduce al final del proceso a una construcción a posteriori del conjunto de los enteros, mucho más coherente desde el punto de vista matemático y que permite además superar los obstáculos didácticos producidos por su vinculación a los modelos concretos (Cid 2001).

De la modelización algebraico-funcional al cálculo diferencial

La interpretación del álgebra escolar como un proceso de algebrización que afecta a la mayoría de organizaciones matemáticas enseñadas permite, no sólo proponer una introducción de este instrumento matemático que facilita el trabajo de modelización de situaciones matemáticas y extramatemáticas, sino también articular ámbitos que el currículum escolar actual presenta de manera atomizada y cuyas conexiones ausentes son fuente de dificultad para los alumnos. El caso que acabamos de comentar de los números enteros es un buen ejemplo de este fenómeno, como también lo es el de las relaciones —hoy día prácticamente inexistentes en la matemática enseñada— entre la geometría sintética y la analítica (Gascón 2002, 2003 y 2004), problema que aborda la tesis en curso de Bernat Ancochea. Como ya he comentado, el modelo epistemológico

de referencia que proponemos sobre el proceso de algebrización y que recubre el trabajo con expresiones algebraicas, se extiende hacia la consideración de los modelos funcionales como herramientas para superar las limitaciones del trabajo con fórmulas y la resolución de inecuaciones basados únicamente en las manipulaciones algebraicas. Esta extensión del modelo propone un proceso de generalización progresivo que parte de las funciones de una variable, pasa por las familias de funciones de una variable y culmina en las funciones de varias variables.

Ahora bien, también el trabajo con modelos funcionales se ve rápidamente limitado si uno prescinde de esa herramienta básica que es el cálculo diferencial. El trabajo actual de Catarina Lucas (2010) se centra en esta segunda ampliación del modelo epistemológico de referencia inicial, con el objetivo de poderlo contrastar experimentalmente mediante el diseño de recorridos de estudio e investigación para el bachillerato. Este modelo no puede obviar una gran dificultad que recorre —aunque se mantenga siempre oculta— el conjunto de las matemáticas enseñadas en Secundaria: lo podemos llamar el problema del estatuto de los números reales en la enseñanza o, más precisamente, el problema del conjunto numérico en el que se basa la matemática escolar y su relación con la problemática de la medida de magnitudes. Tomando como punto de partida el trabajo de tesis de Tomás Sierra (2006) que comentaremos más adelante, Mabel Licera (2008) propuso abordar este problema elaborando un modelo epistemológico de referencia para relacionar los números reales con la medida de magnitudes que sigue, en cierto sentido, la propuesta del matemático Henry Lebesgue (1931/1975). Dada la dificultad para abordar este problema en la enseñanza secundaria actual, M. Licera está actualmente elaborando una propuesta para la formación de profesores de secundaria, partiendo del postulado que algunos de los obstáculos con que se encuentran los alumnos no están necesariamente vinculados a la propia matemática en juego sino a la epistemología dominante en el sistema de enseñanza (Licera, Bastán, Bosch y Gascón 2011).

De los talleres de prácticas a los recorridos de estudio e investigación

La segunda gran línea de investigación que recoge una parte importante de las contribuciones de nuestro grupo se inscribe dentro del gran problema de la enseñanza universitaria de las matemáticas. Que surja este tema como una cuestión viva es cuando menos comprensible, dado que una parte importante de los investigadores del grupo son también profesores universitarios asignados a departamentos de matemáticas. Es sin embargo menos común que se decida abordar estas cuestiones desde el punto de vista de la investigación didáctica, con el esfuerzo de problematización que ello supone, así como de distanciamiento respecto de la propia problemática docente. En nuestro caso, además, este recorrido de investigación vino marcado por una importante evolución de la TAD al incorporar en primer lugar la noción de *praxeología* como modelo básico para describir la actividad matemática y, más en general, cualquier actividad humana (Chevallard, Bosch y Gascón 1997). Esta noción —unión de los términos griegos *logos* y *praxis*— sirve para referir a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento, asumiendo que toda práctica o “saber hacer” (toda *praxis*) aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (un *logos*). Sin querer entrar en mayor detalle, sólo señalaré que el bloque práctico de una praxeología se compone de *tipos de tareas* y de *técnicas* o maneras de realizar estas tareas y que el bloque teórico se declina también en dos componentes: la *tecnología* o discurso razonado sobre la técnica, que aparece como un primer nivel descriptivo y justificativo de la práctica y un segundo nivel de fundamentación que se designa simplemente por *teoría*.

A la noción de praxeología le siguió un modelo específico para los procesos de enseñanza y aprendizaje en términos de *momentos didácticos* o *dimensiones del proceso de estudio* (Chevallard 1999). La noción de momento está estrechamente relacionada con la de praxeología puesto que hace referencia a la dinámica de construcción de los distintos componentes praxeológicos a partir del estudio de una cuestión problemática. Esta primera descripción de los procesos didácticos se complementa posteriormente con las nociones solidarias de *actividades* y *recorridos de estudio e investigación* (Chevallard 2005, 2006 y 2007).

Los talleres de prácticas matemáticas

Durante el curso académico 1990/91, el departamento de matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona nos planteó un problema que podríamos considerar como un ejemplo claro de “asesoría didáctica”. Dado que la licenciatura de matemáticas formaba parte de una facultad de ciencias, al lado de otras licenciaturas como física, química, biología y geología, se abrió la posibilidad de organizar, también para los estudiantes de matemáticas, unos “laboratorios de prácticas” a semejanza de sus compañeros de ciencias experimentales. Se pasó así de un sistema bimodular de organización escolar que distinguía las “clases de teoría” (con marcado carácter expositivo) de las “clases de “problemas” (con un mayor componente práctico) a un sistema trimodular al añadirse los llamados “talleres de prácticas”. ¿Qué se podía proponer, desde la didáctica, como actividad a desarrollar en estas nuevas clases?

Abordamos este problema en colaboración con Y. Chevallard, quien estaba llevando a cabo en aquel momento los desarrollos de la TAD que acabamos de mencionar. El modelo de los momentos didácticos ponía de manifiesto la ausencia institucional —tanto en la universidad como en el resto de instituciones escolares— de dispositivos específicos para dar lugar y visibilidad al *momento del trabajo de la técnica*. Las experimentaciones realizadas con los estudiantes universitarios pronto pusieron en evidencia la potencia productiva y articuladora de este dispositivo, al ofrecer un espacio de trabajo muy rico para la generación de nuevas cuestiones teóricas y para la elaboración de instrumentos de prueba y de contraste, aspectos altamente valorados de la actividad matemática que raramente surgen de forma espontánea en el trabajo de los alumnos. Desde el punto de vista del desarrollo interno de la teoría didáctica, estas experimentaciones también mostraron la importancia del *trabajo de ingeniería matemática* necesario para elaborar el material que da sustento y permite gestionar estas sesiones de prácticas: estábamos, en cierta manera, elaborando modelos epistemológicos de referencia de los distintos contenidos matemáticos que los estudiantes debían trabajar, desde la clasificación de grupos finitos, la descomposición de matrices y la geometría lineal, hasta la convergencia de series, el estudio de integrales impropias o las funciones de variable compleja (Bosch y Gascón 1994, 2010).

La experimentación de los talleres de prácticas se inscribía en una organización universitaria de la enseñanza de las matemáticas que, como toda organización, propone unas condiciones e impone al mismo tiempo unas restricciones para llevar a cabo los procesos didácticos, restricciones que permanecen relativamente desconocidas. Al otorgar importancia y visibilidad al trabajo de la técnica, los talleres ya suponían una ruptura respecto al “conceptualismo” y al “teoricismo” imperantes en este nivel de estudios. Asumían sin embargo muchos rasgos del contrato didáctico que en ese momento nos resultaban totalmente transparentes, por ejemplo el hecho que fuera el profesor el responsable de elegir el tema y elaborar el material que se proponía a los alumnos, así como muchas de las pautas para dirigir el propio proceso. Aunque resultara

productivo a un nivel poco experimentado, el trabajo que se pedía realizar a los alumnos no dejaba de ser muy dirigido por parte del profesor, lo que ocultaba una gran parte de la funcionalidad de los conocimientos involucrados. Los nuevos desarrollos de la conceptualización de los procesos didácticos en términos de *recorridos de estudio e investigación*, así como las experimentaciones parciales de estos recorridos en el trabajo de F. J. García (2005) y su relación con la problemática de la modelización matemática impulsaron una evolución importante de esta línea de investigación.

Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática

El trabajo de tesis de Berta Barquero (2009) y el de Lidia Serrano en curso desarrollan esta línea en el caso de la enseñanza universitaria de las matemáticas para las ciencias experimentales y para las ciencias económicas y empresariales respectivamente. El punto de partida de ambos trabajos es la constatación de que las matemáticas no se introducen en la enseñanza universitaria como una herramienta de modelización sino como un conjunto de contenidos que los alumnos deben conocer para, posteriormente, aprender a “aplicar” en situaciones extramatemáticas de las ciencias experimentales o económicas y sociales. Sorprende, en efecto, la gran uniformidad que existe en los distintos programas de matemáticas de las distintas carreras de ciencias experimentales y económicas de las universidades españolas, todos organizados según la lógica de la construcción teórica de los conceptos (los números reales antes que los límites y estos antes que las derivadas, etc.) sin ninguna relación con la lógica de los problemas de los distintos ámbitos científicos que las matemáticas contribuyen a clarificar.

El método de estudio seguido en estas investigaciones combina por un lado la observación “naturalista” del sistema universitario actual (análisis de los programas, entrevistas y cuestionarios a alumnos y profesores, etc.) con lo que se puede considerar como una observación “intervencionista” para detectar el margen de actuación posible en este ámbito, lo que supone tomar en cuenta tanto las condiciones que se requieren para modificar el funcionamiento actual del sistema como las restricciones institucionales que dificultan el llevar a cabo estas modificaciones. Siguiendo con la línea de investigaciones anteriores del grupo (García 2005, Rodríguez 2005 y Sierra 2006), en ambos casos se propuso introducir en la asignatura de matemáticas un nuevo dispositivo denominado “Taller de modelización matemática” en el que los grupos de estudiantes, bajo la dirección del profesor, deben abordar una cuestión problemática relativa a algún ámbito científico o empresarial cuyo estudio se prolonga durante por lo menos 8 o 10 sesiones semanales a lo largo de un trimestre del curso y para cuya resolución se requieren las herramientas principales del programa. Este tipo de dispositivo responde a lo que la TAD designa como *recorridos de estudio e investigación* (REI) y se plantea como una herramienta de análisis didáctico para describir, crear y analizar procesos didácticos de distinta índole, desde los focalizados en el aprendizaje de un contenido concreto y bien delimitado, hasta aquellos más cercanos a la problemática del investigador, en los que se parte de una cuestión más o menos definida y no se sabe de antemano qué tipo de herramientas se necesitarán ni qué proceso es conveniente seguir para su resolución.

Las experimentaciones llevadas a cabo durante varios cursos académicos (cinco en el caso del trabajo de B. Barquero, seis en el caso de L. Serrano) ponen en evidencia que, bajo ciertas condiciones poco habituales pero viables, los REI se pueden integrar, al menos localmente, en la organización actual de la enseñanza de las matemáticas y permiten desarrollar actividades prolongadas de estudio e investigación que muestran la

funcionalidad de los contenidos matemáticos del programa, así como sus posibles articulaciones, haciendo que los alumnos desarrollen un trabajo de cuestionamiento, construcción y búsqueda de modelos, contraste empírico y validación de soluciones muy propio de la actividad de modelización matemática y que raramente puede existir en los dispositivos de enseñanza habituales. Al mismo tiempo, se observa de qué manera los nuevos talleres introducidos son capaces de influir a medio y largo plazo sobre el resto de dispositivos de enseñanza —las clases de “teoría” y de “problemas”—, haciendo que las cuestiones planteadas motiven la introducción de los contenidos y, en algunos casos, interfieran en el orden de exposición de los mismos.

Al modificar el funcionamiento habitual del sistema de enseñanza, las experimentaciones también sacan a relucir lo que se podría considerar en primera instancia como “dificultades” por parte de los estudiantes y profesores (o, mejor, por parte del sistema de enseñanza) para adaptarse al nuevo tipo de actividad, pero cuyo análisis detallado muestra como verdaderas *restricciones institucionales* que actúan en distintos niveles. Algunas de estas restricciones provienen de los contratos pedagógicos y didácticos dominantes en la enseñanza universitaria, según los cuales se espera del profesor que presente a los estudiantes unos contenidos predeterminados previamente “validados” por la comunidad científica y que estos se limiten a asumirlos y a aprender a manejarlos. Otras provienen de la epistemología dominante en las instituciones universitarias sobre el papel de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias, que hemos designado como “aplicacionismo” (Barquero, Bosch y Gascón 2011). Y aún otras, más generales, provienen de una concepción de la construcción y transmisión del conocimiento que Y. Chevallard designa como *el paradigma de la visita de las obras* en oposición al *paradigma del cuestionamiento del mundo*.

En el caso de las matemáticas para las ciencias experimentales como para las ciencias económicas y empresariales, se pone de manifiesto que la implementación de nuevos dispositivos didácticos para organizar la enseñanza en torno a actividades de investigación y estudio de cuestiones problemáticas requiere la elaboración, desde la didáctica, de modelos epistemológicos de referencia para los distintos ámbitos matemáticos en que pueden inscribirse las cuestiones abordadas. Si la implementación de los REI requiere la creación de dispositivos didácticos ad hoc para facilitar ciertos gestos del estudio habitualmente ausentes en la enseñanza tradicional, también se necesitan nuevas maneras de organizar los contenidos matemáticos —nuevas *infraestructuras matemáticas*— que permitan dar sustento a estos procesos didácticos. Las investigaciones de B. Barquero y L. Serrano proponen algunos de estos desarrollos, mostrando por ejemplo que se puede estructurar el contenido de un curso estándar de matemáticas para las ciencias experimentales alrededor de tres grandes recorridos de estudio sobre los modelos de poblaciones (Barquero 2009; Barquero, Bosch y Gascón 2010 y 2011) o sobre problemas de previsión empresarial (Serrano, Bosch y Gascón 2010). Desde un punto de vista más local, C. Fonseca analiza las nuevas condiciones que se requieren en distintos entornos universitarios para la implementación y gestión de los recorridos (Fonseca, Casas, Bosch y Gascón 2009; Fonseca, Bosch y Gascón 2010; Fonseca 2011; Fonseca, Casas y Insua 2011; Fonseca, Pereira y Casas 2011).

El paso de la enseñanza secundaria a la universidad

Los fenómenos didácticos que se destacan en esta línea de investigación tienen una generalidad que va sin duda más allá de la enseñanza universitaria de las

matemáticas. Su extensión al caso de otras disciplinas y, sobre todo, a otros niveles de enseñanza como la secundaria o primaria son algunas de las nuevas cuestiones que quedan pendientes de exploración. Nuestras investigaciones sobre la enseñanza de la modelización algebraica y funcional en secundaria han aportado contribuciones valiosas al respecto, pero sólo hemos realizado hasta el momento experimentaciones a pequeña escala, muy propicias para el análisis clínico de este nuevo tipo de procesos, pero insuficientes para dar cuenta de la *ecología didáctica* de los REI, es decir de sus condiciones de posibilidad y evolución en los actuales sistemas de enseñanza. El proyecto actual de nuestro grupo se propone abordar de frente esta gran problemática considerando de algunos ámbitos matemáticos prototípicos de los distintos niveles de enseñanza —la construcción de conocimientos numéricos en la educación infantil, la numeración y los problemas aritméticos en primaria, la modelización algebraico funcional en secundaria, el cálculo diferencial y los números reales en el bachillerato—, haciendo especial incidencia en la formación inicial y continua del profesorado. A nivel internacional, la participación de F. J. García en los proyectos europeos COMPASS (www.compass-project.eu) y PRIMAS (www.primas-project.eu) centrados en la difusión a gran escala de la modelización matemática y de metodologías para una enseñanza de las matemáticas y las ciencias por investigación (*inquiry-based learning*) permitirá ampliar la base empírica de estudio del problema, así como analizar las intervenciones basadas en otros enfoques teóricos, en estrecha articulación con la TAD.

He mencionado una función importante de los REI: permitir que los contenidos matemáticos curriculares se introduzcan en los procesos didácticos de manera funcional, es decir para aportar respuesta a cuestiones que se plantean y no como entidades a las que se les supondría un valor por sí mismas y cuya utilidad aparece siempre postergada a una supuesta necesidad futura, que a veces no acaba nunca por llegar. Otra función importante que he destacado menos es su capacidad para articular distintos contenidos y poder así elaborar respuestas apropiadas a las cuestiones que se estudian. Este potencial articulador de los REI responde también, parcialmente, a otro gran problema de investigación que formuló Cecilio Fonseca en su tesis doctoral (Fonseca 2004) en términos de las discontinuidades matemáticas y didácticas que encuentran los estudiantes de secundaria cuando ingresan en la universidad y que permiten explicar un gran número de las dificultades que plantea la transición entre estas dos etapas educativas.

A partir de un cuestionario pasado a varios centenares de estudiantes de primer curso universitario de distintas carreras de ciencias y distintas universidades españolas, completado con un análisis de los libros de texto más utilizados en el bachillerato español, C. Fonseca muestra en qué sentido las organizaciones matemáticas que se estudian en secundaria se pueden considerar “incompletas”, definiendo un conjunto de indicadores definidos a priori y que permiten definir la noción clave de *organización matemática local relativamente completa*. Se ve así que, en general, las praxeologías matemáticas que se ponen a disposición de los alumnos tienden a privilegiar una única técnica para resolver cada tipo de problemas, sin plantearse nunca el problema de decidir qué técnica se debe utilizar ni con qué criterio. Además, las técnicas matemáticas que se utilizan son muy dependientes de la nomenclatura básica utilizada (las incógnitas siempre se designan por x , las funciones $f(x)$, etc.), el dominio de una técnica de resolución casi nunca va asociado con la posibilidad de utilizar la técnica inversa, no se plantean nunca problemas abiertos que requieren un mínimo trabajo de modelización, ni se plantean cuestiones teóricas sobre el ámbito de validez de las técnicas utilizadas, su justificación o su fiabilidad. La gran concordancia entre los

errores de los alumnos y las propuestas de los libros de texto muestra la dimensión institucional de este fenómeno, al tiempo que explica tanto su extensión y robustez como la imposibilidad de abordarlo incidiendo únicamente en los actores del sistema (profesores y alumnos).

Al llegar a la universidad, el “aislamiento” de las organizaciones matemáticas de secundaria no se toma como un punto de partida para realizar construcciones más amplias y “completas”, sino que se trabaja principalmente con los componentes teóricos de dichas organizaciones, dejando al estudiante gran parte de la responsabilidad de la reconstrucción de los componentes prácticos, es decir de su “completación”. El análisis de este tipo de “discontinuidades matemáticas”, que sólo he mencionado brevemente aquí, se completa con un estudio sobre las discontinuidades que aparecen entre los contratos pedagógicos y didácticos de ambas instituciones de enseñanza (Bosch, Fonseca y Gascón 2004; Fonseca, Bosch y Gascón 2010).

En España, a finales de los años 90, un gran número de universidades de ciencias propusieron una serie de “cursos cero” de matemáticas como posible remedio a las dificultades que planteaba la transición del bachillerato a la universidad. En la investigación de Lidia Serrano (2007) sobre la enseñanza de las matemáticas en economía y ciencias empresariales se analiza esta respuesta institucional espontánea, mostrando en qué sentido la remediación propuesta puede llegar a acentuar la atomización de los contenidos matemáticos, agravando así en lugar de atenuar las discontinuidades observadas. Para la investigación en didáctica, es evidente que las soluciones propuestas basadas en un diagnóstico poco elaborado del problema didáctico que se pretende resolver difícilmente pueden tener la efectividad deseada, más aún cuando lo que está en juego es más un intento de imposición de una estrategia didáctica considerada adecuada por parte de la universidad a unos estudiantes que se supone insuficientemente preparados. La línea de trabajo que propugna la investigación de L. Serrano se centra más en explorar las condiciones de posibilidad de un cambio didácticamente fundamentado, tanto en la enseñanza universitaria como en los anteriores niveles educativos (Serrano, Bosch y Gascón 2007).

La formación del profesorado y las relaciones TSD-TAD

Al lado de los problemas que plantea la enseñanza universitaria de las matemáticas y que, como hemos visto, motivan uno de los principales recorridos del grupo, el otro gran ámbito de cuestionamiento ligado a nuestra práctica docente es el de la formación del profesorado. Cuando se constituyó el SIIDM, uno de los vínculos principales, al lado del desarrollo de la investigación en didáctica tal como la preconizaba Guy Brousseau, era el de la utilización de los materiales y resultados fruto de esta investigación en la formación de maestros. Se contaba en efecto con un gran número de experiencias de clase basadas en ingenierías didácticas experimentadas en la escuela Jules Michelet de Burdeos y, sobre todo, se contaba con unos análisis epistemológicos y metodológicos que las convertían en un material muy rico para la formación.

La presencia en el grupo de investigadores que, por decirlo de una manera un poco coloquial, “por la mañana enseñaban la TSD y por la tarde investigaban en la TAD”, nos condujo a plantearnos un proyecto de trabajo que se proponía ahondar en las relaciones entre estos dos enfoques analizando, desde la TAD, las propuestas de ingeniería didáctica elaboradas por la TSD. Nuestra hipótesis inicial, que se fue reforzando a medida que avanzábamos en los análisis, es que las herramientas de la

TAD pueden resultar muy útiles para explicitar los modelos epistemológicos de referencia que la TSD formula en términos de situaciones matemáticas (o de secuencias de juegos contra un medio en evolución). El principio modelizador de la TSD para redefinir los conocimientos matemáticos desde la propia didáctica, con el objetivo de mejorar nuestra comprensión y control de los fenómenos didácticos consiste en asociar a cada “conocimiento” una situación fundamental capaz de generarlo a partir de los distintos valores que se pueden dar a sus variables. Esta proximidad entre el tipo de modelo epistemológico propuesto y las situaciones de enseñanza, que es parte de la potencia modelizadora de la TSD en cuanto le permite prescindir de la descripción sabia del conocimiento y, por lo tanto, emanciparse de ella, es a su vez una debilidad en la difusión y comprensión de esta teoría. Los modelos epistemológicos que se construyen aparecen en realidad como propuestas para la enseñanza, meras innovaciones que se trataría de adaptar a cada sistema educativo y cuyas ventajas habría que determinar.

A raíz de un trabajo colectivo en el marco del SIIDM sobre el análisis del artículo de Guy y Nadine Brousseau “El peso del recipiente” (Brousseau y Brousseau, 1991-92) desde distintas perspectivas (BAHUYAMA 2000, 2005), nos propusimos describir la secuencia de situaciones didácticas propuestas por G. y N. Brousseau elaborando un modelo epistemológico de referencia formulado en términos propios a la TAD. Este modelo se concreta en una secuencia de praxeologías matemáticas que parten de la comparación de magnitudes a partir de la manipulación de objetos y acaban con una organización matemática isomorfa al conjunto de los números reales. La tesis doctoral de Tomás Sierra prosiguió en esta vía añadiendo al caso de la medida de magnitudes el de la numeración. Me gustaría destacar dos aportaciones importantes de este estudio. En primer lugar, los modelos epistemológicos de referencia que en todos los casos se podían expresar en términos de secuencias de praxeologías matemáticas permitían analizar y diseñar procesos didácticos para distintos “niveles educativos”, desde la educación infantil y el primer ciclo de primaria, hasta la secundaria obligatoria y la formación de maestros. El modelo construido debía, obviamente, adaptarse a cada ámbito institucional, desarrollando más o menos algunos de sus elementos, manteniéndose relativamente invariante en su núcleo, aportando así nuevos elementos para la comprensión del fenómeno de la relatividad institucional del conocimiento matemático (Sierra 2006). En segundo lugar, en coherencia con el principio modelizador de la TSD, los modelos epistemológicos propuestos en términos de secuencias de praxeologías matemáticas, al integrar una dinámica propia de la actividad matemática, acaban siendo difícilmente separables de los procesos didácticos a los que daban lugar. En otras palabras, es prácticamente imposible proponer un modelo epistemológico sin proponer, al mismo tiempo y de forma inseparable, un modelo didáctico sobre la emergencia y evolución de este conocimiento. Lo didáctico y lo matemático aparecían así intrínsecamente entrelazados y la dinámica entre praxeologías nos permitía dar cuenta de ello.

Los esfuerzos de difusión a la comunidad de los maestros e investigadores de los trabajos realizados en el marco de la TSD, así como su interpretación y desarrollo en términos de la TAD, han sido permanentes entre los miembros del grupo cuya docencia se centra principalmente en la formación de maestros de educación infantil y primaria (García y Ruiz-Higueras 2010, 2011; Ruiz-Higueras 2001b, 2004, 2008, 2011a, 2011b, 2011c; Ruiz-Higueras y García 2010; Sierra 2011; Sierra, Bosch y Gascón 2011; Bosch, Gascón y Sierra 2009; Gascón y Sierra 2009). Las investigaciones llevadas a cabo han permitido ampliar considerablemente el ámbito matemático de muchas hipótesis y resultados obtenidos en experimentaciones con estudiantes de educación secundaria y

universitaria. En particular, los procesos didácticos basados en la actividad de modelización matemática y estructurados en recorridos de estudio e investigación se han revelado como un instrumento de análisis, diseño y desarrollo de actividades de enseñanza para la educación infantil, así como para la formación del profesorado de este nivel educativo. Una riqueza muy importante de nuestro grupo, que me gustaría destacar aquí, es que la diversidad de sus miembros nos abre la posibilidad de enfocar una misma problemática didáctica hacia distintos entornos institucionales y niveles educativos, aspecto clave para el estudio de los fenómenos relacionados con la *ecología* de los REI, es decir el análisis de las condiciones de posibilidad de determinadas formas de estudio y de las restricciones que pesan sobre su desarrollo. Esta riqueza queda plasmada tanto en los resultados que hemos ido obteniendo como en nuestra contribución al propio desarrollo de la TAD.

Actualmente, los esfuerzos del grupo se centran en desarrollar un nuevo dispositivo de formación que denominamos *recorridos de estudio e investigación de formación del profesorado* (REI-FP) como respuesta al problema de la formación del profesorado tal como lo formula la TAD (Cirade 2006, Bosch y Gascón 2009). Partiendo del principio que una de las principales restricciones que pesan sobre la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización es la epistemología dominante en la escuela, que se concreta en la rígida organización curricular de la matemática escolar, los REI-FP intentan superar estas restricciones tomando como punto de partida la vivencia por parte de los profesores en formación de recorridos de estudio e investigación adaptados al nivel educativo considerado (infantil, primaria o secundaria según el caso). Esta experiencia sirve entonces de medio empírico para iniciar a los profesores al análisis de los procesos didácticos y poder llegar, eventualmente, al diseño y experimentación de nuevos recorridos (Ruiz-Olarría y Sierra 2011).

Análisis de las organizaciones didácticas y del papel del profesor

Los tres recorridos que hemos presentado previamente tienen su origen en el propio sistema educativo que nos proponemos analizar. En todos ellos hemos visto que, en un momento u otro, jugaba un papel fundamental la reconstrucción que se realiza desde la investigación didáctica de los contenidos matemáticos que están en juego, así como de la manera de concebir lo que es la actividad matemática y su dinámica. Sólo mediante la construcción de lo que hemos llamado modelos epistemológicos de referencia puede el investigador abordar su objeto de estudio sin “contaminarse” de la visión de este objeto que le proponen las instituciones observadas. La explicitación de estos modelos permite además su contraste experimental y su discusión y puesta a prueba según las reglas del debate científico.

Este gesto de emancipación, que resulta metodológicamente crucial para la investigación en la TAD, se puede extender desde la propia actividad matemática a la actividad didáctica de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este caso, podemos hablar de *modelos didácticos de referencia*, cuya elaboración requiere de herramientas teóricas apropiadas. Son estas herramientas las que proporcionarán entonces los elementos necesarios para describir la práctica docente, así como la práctica “discente” (del alumno), englobándolas en un modelo general de la *actividad de estudio y de ayuda al estudio*.

Partiendo del modelo general de actividad matemática formulado en términos de *praxeologías*, y con el objetivo de integrar en él la dinámica de la (re)construcción de

praxeologías matemáticas previamente establecidas, Y. Chevallard (1999) propuso un primer modelo de análisis de las organizaciones didácticas compuesto por seis *momentos* o dimensiones del estudio. Este modelo fue en un principio lo que guio las investigaciones que llevábamos a cabo mediante el diseño y experimentaciones de procesos didácticos. En la tesis doctoral de Lorena Espinoza (1998), se utilizó de forma sistemática para la descripción y análisis de las organizaciones didácticas establecidas por dos profesores de bachillerato en la enseñanza de la noción de límite de función. La propuesta de un modelo epistemológico de referencia en torno a esta noción permitió mostrar las contradicciones que encierra su enseñanza en este nivel educativo al proponerse de hecho una organización matemática “bicéfala” en la que la dimensión teórica respondía a la problemática de la fundamentación de la noción de límite, mientras que su componente práctico se limitaba a una mera álgebra del cálculo límites. Pero, independientemente de esta gran restricción matemática presente en el currículo de bachillerato, el análisis clínico realizado en términos de los momentos del estudio permitió distinguir diferencias importantes en las organizaciones didácticas implementadas (Bosch, Espinoza y Gascón 2003; Barbé, Bosch, Espinoza y Gascón 2005). Este tipo de análisis dio lugar a una propuesta de clasificación de las organizaciones didácticas espontáneas en términos de grandes “prototipos” determinados cada uno por dos momentos dominantes (Gascón 2001; Bosch y Gascón 2004 y 2005). F. J. García y L. Ruiz-Higueras (2011) han propuesto recientemente una metodología de análisis de las praxeologías didácticas del profesor (su *praxis* y su *logos*) que combina el modelo de los momentos del estudio con una caracterización de la praxis didáctica del profesor en términos de técnicas *meso*, *topo* y *crono-genéticas*, partiendo de los trabajos de Gérard Sensevy et al. (2000, 2005).

El modelo de los momentos didácticos se subsumiría posteriormente en un modelo más general, el del “esquema herbartiano” (Chevallard 2008) que está en la base de los recorridos de estudio e investigación y que constituye el *modelo didáctico de referencia* que usa actualmente la TAD. Este esquema pretende describir cualquier proceso en la que un grupo de personas, los “estudiantes”, bajo la dirección de un “director de estudio”, consideran una cuestión problemática y deciden hacer algo para elaborar una respuesta propia a dicha cuestión. El esquema herbartiano incluye los episodios en los que el director pone a disposición del grupo de estudiantes herramientas teórico-prácticas para la elaboración de la respuesta, así como la consideración y crítica de respuestas previas a la cuestión, episodios que se enmarcarían dentro de la concepción corriente de la enseñanza. Pero también incluye la consideración de “medios experimentales” para contrastar la validez de las respuestas parciales aportadas, así como la inclusión de nuevas cuestiones o subcuestiones generadas por la dinámica del proceso de estudio. Las investigaciones científicas, policiales, periodísticas o judiciales también se pueden subsumir en dicho esquema, así como las actividades de aprendizaje basadas en la investigación, que aparecen aquí conectadas con el propio aprendizaje de “contenidos” preexistentes a la problemática del estudio.

Así como el modelo de los momentos parte siempre de una organización matemática como objetivo del proceso de enseñanza, en el esquema herbartiano que sirve de modelo de los REI es siempre una cuestión problemática la que origina el estudio, sin que se pueda determinar totalmente de antemano cuáles serán las herramientas nocionales y técnicas que se necesitarán ni las subcuestiones que surgirán a medida que avance el proceso de estudio. En Bosch y Gascón (2010) se presenta una síntesis de las relaciones entre estos distintos modelos y las nociones asociadas de

actividades de estudio e investigación (AEI) y recorridos de estudio e investigación (REI).

Interacción con otros enfoques en didáctica

Reformulación de problemas del enfoque cognitivo en términos de la TAD

A diferencia de lo que ocurre en las disciplinas científicas más maduras, en la investigación didáctica conviven actualmente muchos enfoques que se distinguen, no sólo por el tipo de problemas que abordan y las herramientas elaboradas para ello, sino, además, por algunas de las asunciones básicas que fundamentan el trabajo de investigación. En esta situación, el debate en la comunidad investigadora es a la vez permanente y necesario, pero no siempre fructífero, en particular cuando se parte de enfoques muy distantes que tienden a priorizar variables muy diferentes del universo didáctico que se toma como objeto de estudio. Incluso la propia delimitación del objeto de estudio es fuente de disconformidad. Un hecho que caracteriza a la TAD frente a otros enfoques es, en primer lugar, el gran número de precauciones que toma para evitar dar por sentado asunciones propias de las instituciones sociales que participan en los procesos didácticos. Y lo es también por adoptar un punto de vista institucional muy amplio, que permite tomar en consideración condiciones y restricciones de naturaleza variada que se postulan como fuertemente explicativas de los fenómenos didácticos.

He optado por incluir en un último recorrido aquellas investigaciones relacionadas con otros marcos teóricos, ya sea porque parten de “cuestiones exógenas”, es decir formuladas fuera de la TAD, ya sea porque se proponen abordar directamente el propio problema de la interacción entre enfoques diversos. En relación al primer tipo mencionado, la tesis doctoral de Luisa Ruiz-Higueras (1994) es el primer trabajo del grupo que reformula, en términos de la TAD, una problemática propia de los primeros desarrollos del paradigma cognitivo de la didáctica, en este caso, la del estudio de las concepciones de los alumnos y sus efectos en los aprendizajes. El contenido matemático abordado es el de las funciones de una variable. En la investigación de L. Ruiz-Higueras se muestra en qué sentido las “concepciones” de los alumnos corresponden a características propias del saber enseñado que se pueden interpretar a la luz de los procesos transpositivos. El problema cognitivo de las concepciones se convierte así en el problema institucional de caracterizar el saber matemático que se quiere enseñar y explicar sus peculiaridades a partir del análisis de los fenómenos de transposición didáctica asociados.

El trabajo de tesis doctoral de Lorena Espinoza (1998) también partía de un problema propio del paradigma cognitivo: el del “pensamiento del profesor” sobre el tema de los límites de funciones y su influencia sobre la enseñanza. Como ya he comentado anteriormente, este problema se formuló en términos de la descripción de las organizaciones didácticas activadas por los profesores en la impartición de este tema. La dinámica de dichas organizaciones se estructuró siguiendo el modelo de los momentos del estudio y tomando en consideración el discurso teórico que explicita el profesor como elemento descriptor y justificador de su práctica docente. Además, esta descripción se fundamenta en un modelo epistemológico de referencia del contenido matemático en juego, modelo que toma en consideración los procesos transpositivos, siguiendo una metodología de análisis similar a la de L. Ruiz-Higueras.

Cuando el modelo de los momentos didácticos se amplió para integrarse en el de los recorridos de estudio e investigación, la tesis doctoral de Esther Rodríguez (2005)

abordó desde esta perspectiva otro problema paradigmático del enfoque cognitivo: el de las funciones de la metacognición en la capacidad de los alumnos para resolver problemas. La experimentación de un REI sobre la comparación de tarifas telefónicas mostró que un gran número de elementos de la actividad que se atribuyen a los procesos metacognitivos (por ejemplo la planificación del proceso a seguir, el control de estos procesos o la evaluación de resultados a corto y largo plazo) corresponden en realidad a aspectos de la actividad matemática que el contrato didáctico tradicional asigna en exclusiva al profesor y que, al ser una actividad “didáctica”, no se consideran como genuinamente matemáticos. Se ve así hasta qué punto muchas investigaciones del enfoque cognitivo asumen de forma acrítica la concepción escolar de las matemáticas y la separación cultural entre lo matemático y lo didáctico o, más en general, la interpretación común de “lo cognitivo” y de lo está “más allá de lo cognitivo” (Rodríguez, Bosch y Gascón 2007, 2008).

Diálogo entre teorías y praxeologías de investigación

Nuestra aportación al problema de las relaciones entre la TAD y los demás enfoques en didáctica no se ha limitado a la reformulación de problemas “exógenos” como los que acabamos de presentar. Desde 2005, hemos participado en el grupo europeo *Networking theories in mathematics education* liderado por Angelika Bikner-Ahsbabs (Bikner-Ahsbabs et al. 2010; Prediger, Arzarello, Bosch y Lenfant 2008) centrado en estudiar el problema general de las relaciones entre teorías didácticas. En el marco de la TAD, la reflexión sobre la actividad de investigación se hace en términos de *praxeologías*, en consonancia con el postulado general mencionado anteriormente por el que toda actividad humana se puede describir en estos términos. El hecho de hablar de *teorías* cuando nos referimos a distintos marcos o enfoques de investigación resulta entonces de una sinécdoque muy común en el campo del conocimiento: la de designar toda una actividad —aquí las *praxeologías de investigación*— por su componente teórico, considerado normalmente en nuestra cultura como el emblema y principal vía de acceso a las praxeologías relacionadas con el saber.

Cuando se aborda el problema de las interacciones entre teorías restableciendo todo el *espesor praxeológico* del trabajo de investigación, se pueden identificar algunas grandes “modalidades de diálogo” según el nivel de la praxeología en el que nos situamos (Artigue, Bosch y Gascón 2011a, 2011b). Hemos realizado este tipo de trabajo de cooperación con investigadores de la TSD (Artigue, Bosch, Lenfant y Gascón 2010), diálogo que tiene características muy especiales debido a la gran proximidad entre ambas praxeologías, en especial al nivel de los fundamentos teóricos y tecnológicos de la investigación didáctica. Más allá del enfoque epistemológico en didáctica, hemos llevado a cabo diálogos con teorías más “lejanas”, que se sitúan dentro del enfoque cognitivo, como es el caso de la teoría APOS (Trigueros, Bosch y Gascón 2011) y dentro del enfoque semiótico (Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena 2008). Al poder distinguir distintos niveles praxeológicos en el diálogo, estos trabajos han permitido identificar las principales estrategias adoptadas en el trabajo de *networking*, así como algunas ausencias significativas.

Al margen del propio contenido de las investigaciones realizadas en interacción con otros enfoques didácticos, una contribución importante de nuestro grupo ha sido la difusión internacional de la TAD como praxeología de investigación, tanto en América Latina como en los países europeos de lengua no francesa. Cabe destacar al respecto la participación de algunos miembros del grupo en proyectos financiados por la Unión Europea, como son el proyecto LEMA sobre la enseñanza de la modelización y la

formación del profesorado, el proyecto COMPASS sobre la interdisciplinariedad y el proyecto PRIMAS ya citado. Es de hecho en el trabajo regular de investigación y desarrollo educativo a medio y largo plazo donde tiene lugar la interacción real entre praxeologías de investigación y donde se pueden difundir y debatir las metodologías y resultados obtenidos en el marco de la TAD (García y Wake 2010; García, Mass y Wake 2010; Grigoras, García y Halverscheid 2011).

Fuera de recorrido: el desarrollo teórico de la TAD

Los recorridos de investigación que hemos presentado muestran las aportaciones de nuestro grupo en la formulación y tratamiento de problemas didácticos que surgen de cuestiones ligadas a distintos ámbitos educativos, desde la educación infantil hasta la enseñanza universitaria y la formación del profesorado. Como ocurre con la mayoría de problemas didácticos, los aportes de la investigación no se limitan a proponer respuestas parciales a estas cuestiones, sino que ofrecen nuevas conceptualizaciones del universo didáctico que en algunos casos exceden, incluso, el mundo de la enseñanza para adentrarse en la consideración de fenómenos más generales, tanto epistemológicos como sociales.

Por lo tanto, si retomamos la idea de interpretar la TAD como una praxeología de investigación, podemos decir que nuestra descripción de los aportes del grupo se ha centrado en el *bloque práctico*, es decir, en los tipos de problemas que hemos formulado, en la manera de abordarlos y en las respuestas parciales obtenidas. Han quedado implícitas las contribuciones que se sitúan en el *bloque teórico* de la praxeología de investigación y que, como ya hemos comentado anteriormente, siempre están íntimamente ligadas a las anteriores. El avance de la investigación es siempre solidariamente un avance teórico y práctico. No querríamos acabar esta reseña sin mencionar, aunque sea brevemente, algunos de los principios teóricos y metodológicos que forman parte de las asunciones básicas de la TAD y que nuestras investigaciones han contribuido a desarrollar.

El primer aporte hace referencia a la noción de *modelo epistemológico de referencia* expresado en términos de praxeologías. Constituye una de las herramientas metodológicas clave para construir un punto de vista propio a la didáctica sobre los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La construcción de estos modelos como alternativa a la visión de la matemática que proponen tanto la escuela como la institución “sabia” de los investigadores, requiere una delimitación del ámbito empírico de investigación que excede el ámbito de la enseñanza, para poder tomar en consideración el conjunto de instituciones que intervienen en los procesos transpositivos. Así, la investigación en la TAD no sólo considera como objeto de estudio las actividades de los alumnos, o la de los alumnos y profesores en el aula, sino que se interesa por un universo empírico mucho más amplio, que va desde la multitud de documentos relacionados con los contenidos de enseñanza y la propia producción de las praxeologías matemáticas, tanto en el presente como en el pasado, hasta las prácticas y discursos que surgen en distintos ámbitos de la sociedad y que afectan, de manera muchas veces insospechada, la manera en que estas praxeologías se difunden (o dejan de difundirse) en la escuela. La mayoría de nuestras investigaciones han contribuido a ejemplificar la importancia y la fecundidad de esta ampliación de la *unidad de análisis* de los procesos didácticos, elaborando a menudo herramientas metodológicas ad hoc para el estudio.

En relación con la noción de *recorrido de estudio e investigación* que, como hemos visto, funciona como un modelo didáctico de referencia ampliando y generalizando la noción de modelo epistemológico de referencia, cabe mencionar que las investigaciones del grupo han sido pioneras en el diseño, experimentación y análisis de distintos REI en el ámbito de la enseñanza secundaria y en la formación del profesorado, permitiendo así progresar en el conocimiento de las dinámicas que rigen este tipo de procesos de estudio.

Quiero destacar finalmente nuestro aporte a la *problemática ecológica* en didáctica, es decir al estudio de las condiciones que facilitan y de las restricciones que dificultan la difusión de las praxeologías matemáticas en las instituciones sociales. Esta es la problemática principal que dirige las experimentaciones llevadas a cabo con la implementación de distintos REI en instituciones educativas diferentes, aparte de constituir un contraste experimental tanto para los modelos que los fundamentan como para las propias propuestas didácticas. Su objetivo es, en efecto, explorar los tipos de necesidades que suscitan y los *niveles* en los que surgen estas necesidades (pudiendo ser matemáticas, didácticas, pedagógicas, escolares o sociales), así como los principales impedimentos que frenan su desarrollo. Sólo conociendo bien el “espacio de posibilidades” que ofrecen los sistemas educativos actuales y, sobre todo, las fuentes de las principales “resistencias”, podremos introducir cambios controlados en un sistema de enseñanza al que le cuesta evolucionar. En la actualidad, la ecología escolar de las matemáticas está profundamente marcada por el paradigma de lo que Y. Chevallard designó como “la visita de las obras” (Chevallard 2005), aunque recientemente son más las corrientes y presiones sociales que proponen hacerla evolucionar hacia un modelo más adecuado con el paradigma del “cuestionamiento del mundo” en el que tiene una función preponderante la actividad de estudio e investigación. Profundizar en el análisis de la ecología escolar de los REI, sus posibilidades de evolución y, en particular, explorar las posibles funciones que pueden desempeñar en la formación del profesorado es uno de los grandes retos que nuestro grupo se propone abordar a corto y medio plazo.

Referencias

- Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011a). La TAD face au problème de l'interaction entre cadre théoriques en didactique des mathématiques. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011b). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME7* (pp. 2381-2390). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.
- Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. y Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1535-1544). Lyon, Francia: INRP.
- Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. y Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches, *ZDM – Mathematics Education*, 40, 179 -188.
- BAHUIJAMA (Bolea, P, Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L., Sierra, T. A.) (2000) Análisis didáctico del artículo "El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en le marco de la teoría antropológica. *Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm>

- BAHUIJAMA (Bolea, P.; Bosch, M.; García, J.; Gascón, J.; Ruiz Higuera, L.; Sierra, T. A.) (2005) Analyse de « La mesure en CM1 » d'après la TAD. En M. H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (Eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp. 153-166). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage
- Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 235-244). Lleida: Edicions de la Universitat de Lleida.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352.
- Bikner-Ahsbals, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., y Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En M. M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of PME 34*, Vol. 1 (pp. 145-175).
- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Zaragoza: Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001a). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática*, 13(3), 22-63.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001b). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bosch, M. (2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Coords.), [Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática](#) (pp. 15-28). Huelva: Universidad de Huelva.
- Bosch, M. (2010). L'écologie des parcours d'étude et de recherche au secondaire. En G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire, J. Traglova (Eds.), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques: quels effets des ressources?* (pp. 19-23). Lyon, Francia: Éditions de l'INRP
- Bosch, M. (2012). Doing research within the Anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. *12th International Congress on Mathematical Education, Seoul (Korea), 8-15 July 2012*.
- Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Coords.), *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122), Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.
- Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la Formación del Profesorado de Secundaria. En M. L. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

- Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los “talleres de prácticas matemáticas” a los “recorridos de estudio e investigación”. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). [El profesor como director de procesos de estudio](#): análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23(1), 79-135.
- Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2007). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.
- Bosch, M., Gascón, J. y Sierra T. A. (2009). Análisis de los manuales escolares para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139 - 150). Santander: SEIEM.
- Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. y Larguier, M. (Eds.). *Un panorama de la TAD*. CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. y Ladage, C. (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991-92). Le poids d'un récipient. Étude des problèmes du mesurage en CM. *Grand N*, 50, 65-87.
- Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 45-75.
- Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 25, 5-38.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux y P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP n° 168* (pp. 239-263). Paris: APMEP.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.
- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence: la dialectique des média et des milieux. En G. Gueudet y Y. Matheron (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007* (pp. 344-366). Paris: IREM de Paris7, ARDM.
- Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín del 10º Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*.
- Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas 2* (pp.529-542). Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.
- Cid, E. (2004). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. En E. Palacián, E. Cid, J. Gascón, C. Batanero y C. Azcárate (Eds.), *Aspectos Didácticos de Matemáticas, 9* (pp. 35-80). Zaragoza: I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.
- Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, Francia: Université de Montpellier
- Cid, E. y Ruiz Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM* (Tesis doctoral). Université de Provence, Francia.
- Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos del estudio* (Tesis doctoral), Universitat Autònoma de Barcelona.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.
- Fonseca, C. (2011) Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(3), 547-580.
- Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática, 22*(2), 5-35.
- Fonseca, C., Casas, J. M. y Insua, A. (2011). El matemático como un profesional en los recorridos de estudio e investigación. *Revista Arbor, 187*, 279-284.
- Fonseca, C., Casas, J. M., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.; González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII. Comunicaciones de los grupos de investigación* Santander: SEIEM.
- Fonseca, C., Pereira, A. y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los recorridos de estudio e investigación. *Educación Matemática, 23*(1), 97-121.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén.
- García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2010). Exploring the use of theoretical frameworks for modelling-oriented instructional design. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2166-2175). Lyon, Francia: Service des Publications, Institut National de Recherche Pédagogique.
- García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2011). Modifying teachers' practices: the case of a European Training Course on Modelling and Applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 569-578). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

- García, F. J. y Wake, G. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. *Investigación en Educación Matemática*, 14, 315-326.
- García, F. J., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz Higuera, L. (2007). Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los Planes de ahorro. En L. Ruiz-Higuera, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 439-40). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226-246.
- García, F. J., Maass, K., y Wake, G. (2010). Theory Meets Practice: Working Pragmatically within Different Cultures and Traditions. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). New York: Springer.
- Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *RELIME*, 4(2), 129-159.
- Gascón, J. (2002). Geometría *sintética* en la E.S.O. y *analítica* en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2003). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 44, 25-34.
- Gascón, J. (2004). Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Parte II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 45, 41-52.
- Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 9-35.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *RELIME*, 14 (2), 203-231.
- Gascón, J. y Sierra, T. A. (2002). Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. En M. Peñalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.) *Aportaciones de la Didáctica de las Matemáticas a Diferentes Perfiles Profesionales* (pp. 213-227). Alicante: Universidad de Alicante.
- Grigoras, R., García, F. J. y Halverscheid, S. (2011). Examining mathematising activities in modeling tasks with a hidden mathematical character. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 85-96). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Lebesgue, H. (1931/1975). *La mesure des grandeurs*. París: Blanchard.
- Licera, R. M. (2008). *La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza media. Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina).
- Licera, R. M., Bastán, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. Análisis epistemológico y didáctico. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 695-718). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

- Prediguer, S., Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A. (2008). Comparing, combining, coordinating – networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM – Mathematics Education*, 40(2), 163-164.
- Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.
- Rodríguez, E., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Los recorridos de estudio e investigación en la reformulación didáctica del problema de la metacognición. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 481-506). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Rodríguez, E., Bosch, M. y Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM Mathematics Education*, 40, 287-301.
- Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Ruiz-Higueras, L. (2001) La didactificación de un objeto matemático: el caso de la noción de función. En R. Cantoral (Ed.) *El futuro del Cálculo Infinitesimal* (pp. 265-295). México, DF: Editorial Iberoamericana.
- Ruiz-Higueras, L. (2001) La invisibilidad institucional de los objetos matemáticos. Su incidencia en el aprendizaje de los alumnos. En Chamorro, C. (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 229-263). Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Ruiz-Higueras, L. (2004) Construcción de los decimales. De las fracciones a la notación decimal. En Chamorro, C. (Ed.) *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 189-250). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Ruiz-Higueras, L. (2008) Modelización matemática en la Escuela Primaria: La reconquista escolar de dominios de realidad. En R. Pérez (Ed.) *Competencia Matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87-120). Madrid: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.
- Ruiz-Higueras, L. (2011a). Aprendizaje y Matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 1-38). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. (2011b). La actividad lógica en la Escuela Infantil. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 101-140). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. (2011c). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 181-219). Madrid: Pearson Educación.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2010). La competencia de modelización matemática. Sistemas y modelos en el ámbito escolar. *Multiarea revista de didáctica*, 5, 239-296.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *RELIME*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.
- Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrique-fonctionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).

- Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T.A. (2011). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 465-483). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- Sensevy, G., Mercier, A. y Schubauer-Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la Course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20, 263-304.
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F. y Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 153-181.
- Serrano, L. (2007). *La modelització matemàtica en els estudis de Ciències Econòmiques i Socials: disseny d'organitzacions didàctiques per a l'articulació curricular entre l'ESO, el Batxillerat i la Universitat. Memòria de investigació* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universitat Ramon Llull (Barcelona).
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). Diseño de organizaciones didácticas para la articulación del bachillerato con el primer ciclo universitario. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 757-766). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Cómo hacer una previsión de ventas. Propuesta de un recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 835-857). Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.
- Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.
- Sierra, T. A. (2011). La formación matemático-didáctica en el Grado de Maestro de Educación Infantil. Análisis y propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En *Seminario sobre La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y el máster de secundaria*. Castro Urdiales: SEIEM.
- Sierra, T.A., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». *Revista de Educación*, 357, 231-256.
- Trigueros, M., Bosch, M., Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.