

## LA PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES

**Raimundo José Elicer Coopman, Eduardo Andrés Carrasco Henríquez**

Universidad Austral de Chile, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

[raimundo.elicer@uach.cl](mailto:raimundo.elicer@uach.cl), [ecarrasc@gmail.com](mailto:ecarrasc@gmail.com)

**Palabras clave:** probabilidad condicional, toma de decisiones, monty hall.

**Key words:** conditional probability, decisions, monty hall.

**RESUMEN:** Este reporte se enmarca en el proceso de diseño, implementación y validación de una situación de enseñanza de la probabilidad condicional que recurre al juego de Monty Hall como escenario de toma de decisiones ante situaciones de incertidumbre. En particular, en el marco de la ingeniería didáctica, se exponen elementos del análisis preliminar. En lo cognitivo, los estudiantes recurren a razones no matemáticas para decidir. El análisis epistemológico se centra en el intercambio epistolar entre Pascal y Fermat sobre juegos de azar. Los elementos didácticos evidencian una prevalencia del cálculo de probabilidades, por sobre la toma de decisiones, en los textos escolares.

**ABSTRACT:** This report is framed with the process of design, implementation and validation of a teaching situation of conditional probability. It draws upon the game Monty Hall as scenery for decision-making in face of situations of uncertainty. In particular, under the didactic engineering framework, preliminary analysis elements are given. Cognitively, students use non mathematic elements to decide. Epistemologic analysis focuses on the exchange of correspondence about gamblings between Pascal and Fermat. The didactic elements show a prevalence of probabilistic calculations over decision making in textbooks.

## ■ INTRODUCCIÓN

Actualmente se reconoce la necesidad de un actuar en situaciones de incertidumbre, cada vez más incorporadas a distintos entornos laborales y de vida. Al decir de Morin: “lo nuevo brota sin cesar; nunca podemos predecir cómo se presentará, pero debemos contar con su llegada” (Morin, 1999, p.11), ante lo cual precisa que “importa (...) comprender la incertidumbre de lo real, saber que hay un posible aún invisible en lo real”. De este modo, el estudio de la probabilidad se constituye en una herramienta para enfrentar situaciones reales. Ignorar esta incertidumbre o intentar minimizarla nos puede llevar a tomar decisiones frágiles, que pueden generar un impacto negativo apenas el escenario cambie (Taleb, 2012).

Sin embargo, es un área del saber matemático que muestra, en Latinoamérica, bajos resultados. Más del 80% de los estudiantes no supera el segundo nivel de logro en el área de datos y azar (OECD, 2014), es decir, en el mejor de los casos entienden y usan conceptos de probabilidad básicos en situaciones como lanzamientos de dados o monedas, sin evidenciar la capacidad de realizar razonamientos en contextos simples. Esto supone la necesidad de innovar en situaciones de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes constituir a las nociones de la probabilidad en una herramienta matemática para su actividad.

En este contexto, a medida que se adquiere nueva información sobre la situación en que se requiere tomar decisiones en escenarios inciertos, la noción de probabilidad condicional permite incorporar cambios en los grados de creencia sobre los posibles resultados, mejorando la toma de decisiones basadas en predicciones. Esto amplía el rango de experimentos a considerar en el aula, dando oportunidades para una mayor comprensión y razonamiento sobre las nociones involucradas en la inferencia estadística, asociación entre variables, regresión y modelos lineales (Batanero y Díaz, 2007).

El objetivo general de esta investigación es constituir la probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. El presente reporte se enmarca en el diseño, implementación y validación de una situación de enseñanza de la probabilidad condicional que recurre al juego de Monty Hall como escenario de toma de decisiones. En particular, en el marco de la ingeniería didáctica, se exponen los elementos cognitivos, epistemológicos y didácticos del análisis preliminar.

## ■ MARCO TEÓRICO

### Probabilidad condicional y el problema de Monty Hall

Batanero y Díaz explican que “la deducción por Bayes en 1763 de su famoso teorema llevó a una conclusión inesperada: las probabilidades de las causas podrían revisarse en función de las consecuencias observadas y perderían su carácter objetivo. Una nueva visión de la probabilidad como grado de creencia personal, basada en el conocimiento previo y los nuevos datos, hace innecesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones. El teorema de Bayes, aplicado sucesivamente, permite formalizar el proceso de aprendizaje a partir de la experiencia y unificar la metodología de la inferencia” (Batanero y Díaz, 2007). Esta reflexión supone un aparente conflicto entre la probabilidad subjetiva del estudiante, que se encuentra en el estudio de la probabilidad condicional, entendida como una nueva definición del espacio muestral y de asignaciones de probabilidades según la información disponible.

Las paradojas toman un rol preponderante en este encuentro (Batanero, Contreras, Cañadas, y Gea, 2012), pues la aparente contradicción entre lo intuido y lo experimentado configuran un conflicto cognitivo que solo se puede resolver al analizar y posteriormente formalizar la situación. Un ejemplo es el juego de Monty Hall, en el cual, a partir de haber seleccionado una de tres puertas, el animador da la oportunidad de cambiarla después que ha descartado una de las que no tenían el premio. Este problema pone en jaque percepción de independencia de eventos y espacio muestral, la asignación inicial de probabilidades y la interpretación de convergencia (Batanero, Fernandes, y Contreras, 2009).

### Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica, como método de investigación y diseño contempla cuatro fases: (1) análisis preliminar, (2) análisis a priori, (3) aplicación y (4) fase de contraste y rediseño (Artigue, 1988, Ferrari, 2008). Este reporte se enmarca en la etapa de análisis preliminar, en la cual, y en un marco socio-epistemológico, se consideran: (a) la faceta cognitiva, que se propone establecer aspectos propios del conocer de los estudiantes respecto de la probabilidad; (b) la faceta didáctica, que aborda el discurso matemático escolar presente en Chile respecto de la probabilidad; y (c) la faceta histórico-epistemológica, que busca establecer una epistemología de la noción de probabilidad. El aspecto sociocultural, que se imbrica en los tres anteriores, responde a considerar que la construcción de saber matemático es un proceso sociocultural, normado por prácticas sociales específicas.

## ■ METODOLOGÍA DE TRABAJO

Se asume a la ingeniería didáctica para el análisis preliminar.

### Análisis cognitivo

El análisis cognitivo recurre a un estudio exploratorio inicial que busca mejorar la pregunta de investigación. A una población de estudiantes universitarios de ingeniería, sin formación en probabilidad o estadística de nivel superior, se aplica un cuestionario de preguntas abiertas, con el objeto de obtener producciones lingüísticas respecto de lo que enactan frente al juego de Monty Hall. Las preguntas y conjeturas son las siguientes.

1. Después de explicar el juego de Monty Hall, se pregunta: “si tú fueras el jugador, ¿te cambiarías de puerta cuando el animador te lo ofrece? Da una explicación de por qué.”

Se espera que el cambio de puerta no sea significativo para el estudiante, bajo la noción de que ambas puertas restantes tienen la misma probabilidad de ser ganadoras. En menor medida, se esperan menciones a la suerte o a experiencias previas en juegos de azar.

2. Se comenta el resultado de la simulación hecha muchas veces, con un jugador que nunca se cambia de puerta y otro que siempre se cambia. El primero gana una de cada tres veces, y el segundo gana dos de cada tres veces, aproximadamente. La pregunta es: “¿por qué crees que ocurre esto?”.

Se esperan expresiones de perplejidad y/o que pongan en duda el resultado de la simulación, o argumentaciones del tipo “cambiarse siempre da mayores probabilidades de ganar”, sin dar referencias a cantidades concretas. Las respuestas a estas preguntas se clasifican según su similitud en la argumentación.

### **Análisis didáctico**

El análisis didáctico se realiza sobre los textos de enseñanza entregados a la educación pública y particular subvencionada chilena, que cubre el 80% de su matrícula. En particular, se analizan las actividades propuestas en el Programa de Estudios (MINEDUC, 2004) y el Texto de Estudiante de tercer año de enseñanza media (Saiz y Blumenthal, 2014), con el objeto de detectar tareas que involucren toma de decisiones en el estudio de la probabilidad condicional.

### **Análisis histórico-epistemológico**

El análisis histórico-epistemológico recurre a la selección de autores y sus obras significativas en el desarrollo de la probabilidad. Para el análisis de la obra de cada autor se hace a partir de la construcción de una crónica del autor, de su contexto sociocultural y de su obra. Sobre ellos se sistematizan las prácticas que dan necesidad y sentido a la noción de probabilidad, en el contexto de toma de decisiones y apuestas, particularmente para juegos diacrónicos.

Adicionalmente, se estudian los distintos significados que ha tenido la probabilidad, que repercuten en el discurso matemático escolar. Paralelamente, se analizan elementos sistematizados por la teoría de elección y toma de decisiones.

## **■ RESULTADOS**

### **Elementos del análisis preliminar**

En los análisis realizados se identifica la noción de lo probable como algo que puede ocurrir y en la decisión del juego cualquier alternativa es probable de ocurrir (Elicer y Carrasco, 2014). Los estudiantes recurren a razones no matemáticas para tomar su decisión. La tabla 1 resume las categorías que se establecieron y etiquetaron en base a las respuestas dadas al cuestionario. Las columnas siguientes representan qué noción de probabilidad tienen los estudiantes, qué argumentaciones ofrecen y en qué basan su decisión.

Quienes recurren a la probabilidad como variable de decisión, consideran únicamente la probabilidad condicional (dado que quedan dos puertas, cada una tiene igual probabilidad de ser la ganadora), o bien, notan que la probabilidad de ganar cambiándose es mayor, pues la probabilidad de la puerta descartada se transfiere a otra.

Las variables no matemáticas son esencialmente la supuesta mala intención del animador del juego, y el valor intrínseco que dan a mantenerse firmes en su primera decisión. Una variable inesperada, dada por el contexto campesino del que provienen algunos estudiantes, es el hecho de que las cabras estén silenciosas. Según ellos, esto solo puede ocurrir si están juntas, en puertas contiguas.

**Tabla 1.** Categorías dadas por la respuesta a la pregunta 1, en que argumentan por qué cambiarse o no cambiarse de puerta en el juego de Monty Hall. Elaboración propia.

Categoría	Probabilidad	Argumentación	Decisión
Cabras	No está presente	Cabras debe estar juntas	Cabras en puertas contiguas
50/50	Condicional	Dos puertas equiprobables	Contexto o personalidad
Proba. es un líquido	Propiedad que llena	Probabilidad se traspasa	Mayor probabilidad
Porfía	No está presente	Mantenerse es un valor	Sensación experiencial
Animador	No está presente	Conveniencia	Intención del animador

Después de mostrado el resultado de repetidas simulaciones, las producciones lingüísticas arrojan que el grupo se divide. Un grupo asume que el cambio de puerta otorga mayor probabilidad de éxito y busca una explicación. Otros siguen pensando que no hay una ventaja, y que el que ganó con mayor frecuencia fue simplemente por “suerte”.

En la tabla 2 se resumen estas nuevas categorías. Quienes asumen que hay una ventaja en cambiarse de puerta recurren a tres explicaciones: la probabilidad de éxito se transfiere de una puerta a otra, el cambio es un valor en sí mismo o la probabilidad de ganar cambiándose es la probabilidad de no acertar en el primer intento. Esta última explicación se vale del uso correcto de la probabilidad condicional y la probabilidad total.

**Tabla 2.** Categorías dadas por las respuestas a la pregunta 2, en que buscan una explicación a los resultados de la simulación. Elaboración propia.

Categoría	Probabilidad	Argumentación	Decisión
Proba. es un líquido	Propiedad que llena	Probabilidad se traspasa	Mayor probabilidad
Cambio es bueno	Dinámica	Cambio como receta de éxito	Mayor probabilidad
Proba. condicional	Total	Elegir cabra inicialmente	Mayor probabilidad
Azar y suerte	No existe	Suerte como factor	No existe

En la faceta didáctica, el programa de estudios chileno no abarca la toma de decisiones, ni la predicción con ventaja en sus actividades. Se descansa en el pensamiento inferencial que puede ser estudiado en estadística durante el próximo año de estudio, o bien en estudios superiores. Esto se ve reflejado, por ejemplo, en la siguiente indicación:

En este ejemplo la experiencia aleatoria es elegir a una persona al azar y se estima la probabilidad de que ella satisfaga una determinada condición recurriendo a la frecuencia relativa.

Recoger información, organizarla e interpretarla es de vital importancia para la toma de decisiones en diversos y múltiples ámbitos. Muchas decisiones no se sustentan en información censal sino muestral, tema que será estudiado en Cuarto Año Medio. (MINEDUC, 2004, p.107).

En consecuencia, las tareas no consisten en tomar decisiones utilizando los conceptos estudiados. A lo sumo se pide al estudiante calcular probabilidades de que se tome una u otra decisión, siendo el experimento una extracción al azar, basado en información estadística pasada. Esto se puede verificar en la siguiente actividad:

Los resultados en una encuesta de mi curso, en relación con la utilización de los fondos de nuestra tesorería, arrojaron que de los 40 alumnos, hay 26 que prefieren ir a paseo y el resto quiere un regalo. De los que quieren ir a paseo, 12 prefieren ir a la piscina y el resto a otro lugar. Si se escogiera, al azar, una persona dentro del curso, ¿cuál sería la probabilidad de que no quisiera ir a la piscina si desea ir a paseo? (Saiz y Blumenthal, 2014, p.334).

Adicionalmente, se corre el peligro de confundir cómo se toma una decisión ante incertidumbre.

La actividad expuesta en la figura 1 (Saiz y Blumenthal, 2014, p.333) da a entender que el sujeto no toma una decisión, sino que escogerá al azar o ciegamente. La probabilidad condicional solo influirá en el posible resultado de esta decisión.

Figura 1. Actividad de probabilidad condicional. Fuente: Saiz, O., y Blumenthal, V. (2014)

- 3 Nancy está planeando sus vacaciones. Se ha puesto a pensar en los lugares a los que viajó anteriormente y ha hecho el siguiente esquema:



Si el comportamiento de Nancy se vuelve a repetir, según sus estadísticas, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a un lugar que no sea playa, dado que ya ha decidido ir al norte?

En el análisis histórico-epistemológico, Pascal y Fermat (Pascal, 1983), por su parte, abordan sus trabajos iniciales de probabilidad en torno a la necesidad de generar un reparto equitativo al suspender un juego de azar. No realizan cálculos de probabilidades, sino que, considerando experimentos con resultados equiprobables de varias etapas, determinan, en cada escenario, cuál es el valor de la jugada. Posteriormente y en contraste, surge la idea de hacer injusto el juego, en el sentido de apostar con ventaja.

Algo similar ocurre con el intercambio de cartas entre los hermanos Huygens (Basulto, Camuñez, Ortega, y Pérez, 2015), en que buscaban asignar un valor a la vida de una persona, según el tiempo que se espera que siga con vida una persona. Esto, con el propósito de realizar un reparto adecuado en el sistema de pensiones que emergía en la economía europea. A partir de las primeras tabulaciones de mortalidad publicadas en Inglaterra, resignifican el espacio muestral desde aquel usado por Pascal y Fermat, es decir, todos los posibles resultados del juego, por los casos estadísticos reconocidos. Se avanza de este modo hacia una probabilidad a posteriori.

En ambos casos la práctica consiste en asesorar a otro a tomar decisiones premeditadas. Estos son propósitos diferentes al planteado en el escenario del juego de Monty Hall, en el cual no se pide una decisión a priori, sino una *in situ*.

Muchos de los significados particulares de la probabilidad en el discurso matemático escolar son analizados y sintetizados en Batanero (2005). Estos se pueden clasificar en: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático. En el juego de Monty Hall salen a relucir principalmente los significados intuitivo y subjetivo, contrastado por el sentido clásico en el análisis a priori, y el frecuencial dado por la realización repetida del juego.

Desde la arista de la toma de decisiones, se puede mostrar que toda elección de preferencias racional se puede asociar a un problema de maximización de una función de utilidades personal (Levin y Milgrom, 2004). Es por esto que, un buen apoyo a la reflexión acerca de la toma de decisiones es analizar las variables que influyen y determinan esta función, ya sean estáticas o dinámicas, objetivas o subjetivas.

### **Implicancias para la secuencia**

La etapa siguiente de esta investigación corresponde al análisis a priori, es decir, al diseño de una secuencia didáctica que promueva las prácticas y nociones de probabilidad condicional que se han estudiado en este análisis preliminar. Se establecerán conjeturas acerca de la devolución de los estudiantes ante las actividades.

De acuerdo al análisis histórico-epistemológico, se propone comenzar por realizar actividades en que se evalúe si acaso un juego de azar es considerado justo. Luego se debe avanzar en la construcción de estrategias que hagan un juego injusto, a favor, es decir, a la apuesta con ventaja. En cada caso, se debe distinguir entre vivir la decisión y asesorar a otro para que la tome.

Debido a la falta de experiencia en situaciones de toma de decisiones, se aconseja comenzar planteando juegos más sencillos, idealmente de una única etapa de decisión. El problema de Monty Hall puede incluirse en una segunda fase.

Muchas de las conjeturas a priori se pueden extraer del análisis cognitivo, en que prevalecen variables socioemocionales en la decisión de la jugada. En el marco de la teoría de elección, se debe anticipar la confluencia de estas variables en la función de utilidad de los individuos y

proceder a constantificarlas, de modo de que el planteamiento matemático sea preponderante. Adicionalmente, se prevén concepciones erróneas acerca de la independencia de sucesos, definición del espacio muestral, asignación de probabilidades iniciales e interpretación de la convergencia de una variable aleatoria (Batanero et al., 2009).

Finalmente, se vuelve relevante poder avanzar en una resignificación a priori del espacio muestral, que se concreta en la consideración de todos los casos posibles, como en juegos de dados y naipes, a un espacio muestral estadístico definido a posteriori, como en el análisis de simulaciones del juego Monty Hall.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Basulto, J., Camuñez, J., Ortega, F., y Pérez, M. (2015) La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana. En *Historia de la probabilidad y la estadística (II)*, pp. 57-69. Delta Publicaciones, . España.
- Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), pp. 247-263. México D.F., México. CLAME.
- Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.
- Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, G., y Gea, M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas: un ejemplo de probabilidad. *Novedades Educativas*, 261, 78-84.
- Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicancias didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 62, 11-18.
- Elicer, R., y Carrasco, E. (2014). Juegos de azar diacrónicos: un espacio para el encuentro entre las creencias subjetivas y las probabilidades condicionales. En M. Parraguez, H. Rivas, C. Vásquez, N. Pincheira, H. Solar, F. Rojas y E. Chandía (Eds.). *Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, 18, 86. Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.
- Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Levin, J. y Milgrom, P. (2004). *Introduction to choice theory* [Documento PDF]. Recuperado el 26 de marzo de 2016 de <http://goo.gl/s9Dz6x>
- MINEDUC (2004). *Matemática, Programa de Estudio, Tercer Año Medio, Formación General*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación, Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.
- Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. París: UNESCO.

- OECD. (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014)*. PISA: OECD Publishing.
- Pascal, B. (1983). Cartas de Pascal a Fermat. En C. R. de Dampierre (Trad.), *Blaise Pascal: obras escogidas*. Madrid: Ediciones Alfaguara.
- Saiz, O., y Blumenthal, V. (2014). *Matemática 3° medio: texto del estudiante*. Santiago: Ediciones Cal y Canto.
- Taleb, N. (2012). *Antifragile: Things that gain from disorder (Vol. 3)*. New York: Random House Incorporated.