LOS SIGNIFICADOS DE *FUNCIÓN* Y *FUNCIÓN DERIVADA* DESARROLLADOS POR LOS ESTUDIANTES AL ESTUDIAR LA VARIACIÓN EN EL CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA

Ramiro Ávila Godoy, Jesús Ávila Godoy, José María Bravo Tapia
Universidad de Sonora (México) Universidad Autónoma de Baja California (México)
ravilag@gauss.mat.uson.mx, jag_virgo@hotmail.com, jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Palabras clave: pensamiento variacional, contexto, significado, competencias

Key words: variational thinking, context, signification, competency

RESUMEN: Este es un reporte parcial de un proyecto diseñado para investigar el papel del contexto de la enseñanza en la formación y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos que construyen los estudiantes. En este proyecto específicamente se está investigando sobre los significados de los objetos matemáticos función y función derivada que adquieren los estudiantes de ingeniería al estudiar la variación en el contexto de los problemas de optimización y se desarrolla con alumnos de los cursos de Cálculo Diferencial de la carrera de ingeniería civil de una universidad del norte de la República Mexicana. En este trabajo se reporta el proceso de diseño de las actividades que se utilizaron en la investigación y un avance de los resultados obtenidos.

ABSTRACT: This is a partial report of a project designed to investigate the role of the context of teaching in the formation and development of the significations of mathematical objects that students construct. In this Project, we are specifically investigating the significations of the mathematical objects, function and derivative function acquired by engineering students, while studing the variation in the context of optimization problems and develops students courses Differential Calculus Career civil engineering from a university in northern Mexico. In this work the design process of the activities that were used in the research and progress of the results is reported.

INTRODUCCIÓN

La investigación que aquí se reporta se desarrolló asumiendo las premisas de dos marcos teóricos: el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS) de Juan D. Godino y la Teoría de la Enseñanza Problémica de M. Majmutov (TEP) con base en las cuales se diseñaron y desarrollaron una serie de actividades didácticas, organizadas en secuencias, cuyo propósito fundamental fue desarrollar competencia para utilizar los conceptos y los métodos matemáticos en la resolución de problemas de ingeniería, en particular problemas de optimización y en general problemas de variación.

Del EOS se asumieron las premisas relativas al carácter sistémico de los significados de los objetos matemáticos, estableciendo como punto de partida su naturaleza pragmática y, en consecuencia, su carácter contextual, es decir, se parte de que dichos significados son, esencialmente, los sistemas de prácticas que se utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problémicas, que estos sistemas de prácticas son discursivas y operativas; los elementos que los constituyen son los medios utilizados, tales como *el lenguaje*, constituido a su vez, por las diversas formas de representación de los objetos matemáticos (que en el caso de las funciones, son la numérica, la gráfica, la analítica, la verbal y otras), *los procedimientos, los conceptos, las propiedades, los argumentos* (utilizados para justificar las propiedades y los procesos que se desarrollan), *los medios tecnológicos*, (en este caso, el interés está centrado en el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, especialmente el uso de los simuladores digitales). De la TEP se asume que el aprendizaje es producto de la actividad de estudio que realiza el *sujeto estudiante* en un ambiente sociocultural determinado y que dicha actividad es de autotransformación, pues además de aprendizaje, produce desarrollo de las habilidades intelectuales y de las actitudes que hacen que el sujeto esté cada vez, en mejores condiciones para analizar y resolver situaciones problémicas de complejidad cada vez mayor.

EL MÉTODO UTILIZADO PARA LLEVAR A CABO LA INVESTIGACIÓN:

El proyecto diseñado para llevar a cabo la investigación consta de cuatro etapas; la primera corresponde al diseño de los materiales (problemarios) a utilizarse en el curso; la segunda a la implementación del mismo, la tercera a la toma de datos necesarios para evaluar los significados construidos por los estudiantes de los conceptos matemáticos *función* y *derivada* y la cuarta, al análisis de la información obtenida y a la formulación de conclusiones.

Las tres primeras etapas ya se desarrollaron y la cuarta y última aún se está llevando a cabo; aunque en este reporte se presentan algunos de los resultados obtenidos y el análisis que de ellos se ha hecho.

El diseño de los materiales del curso

Dada nuestra concepción pragmática de la naturaleza de los objetos matemáticos, las actividades diseñadas consideran, entre los propósitos específicos, lograr que los estudiantes:

- Detecten las variables intervinientes en los procesos de cambio, objeto de estudio.
- Establezcan relaciones de dependencia entre ellas.

- Sean cada vez más competentes para utilizar las diversas representaciones semióticas (numérica, gráfica, analítica y verbal) al analizar, interpretar y comunicar diversas formas de variación, en particular, las que se presentan en los problemas de ingeniería y, en general en la ciencia.

Las *actividades* diseñadas se organizaron en *secuencias didácticas* que están constituidas por tres momentos denominados de *Inicio*, de *Desarrollo* y de *Cierre*; las secuencias, a su vez, conforman *bloques* destinados al estudio de un tipo específico de problemas, que forman parte de los denominados *Problemas de Optimización*. El diseño de las actividades que forman las secuencias, se llevó a cabo utilizando una metodología que tiene las siguientes cuatro etapas:

- Elección de la situación problémica que será objeto de estudio a través de la secuencia.
- Determinación de los propósitos del estudio (generales y específicos)
- Determinación de las competencias cuyo desarrollo se promoverá
- Formulación y organización de las interrogantes y tareas (problémicas) que servirán para provocar y conducir el proceso de estudio.

Para ilustrar este proceso se presentan a continuación, cuatro actividades, correspondientes, las dos primeras, al *Momento Inicial* y las otras dos, al *Momento de Desarrollo* de la *Secuencia* 1 del Bloque destinado al estudio del proceso de resolución de problemas de minimización; proceso que constituye una parte fundamental de lo que se está investigando en este proyecto:

- Situación problémica elegida: La fabricación de una lata (envase) en forma de cilindro circular recto cuya capacidad sea un litro.
- Propósito General de la secuencia: Determinar las dimensiones de la lata que se pretende fabricar, que minimicen la cantidad de material que se requiere para ello.

Propósitos específicos:

Que los estudiantes logren:

- Identificar las variables intervinientes
- Establecer las relaciones entre las variables
- Realizar un análisis cualitativo de la variación de alguna de las variables identificadas con respecto a la(s) otra(s)
- Analizar la variación representada en:
  - Una tabla
  - Una gráfica
  - Una expresión analítica

Competencias cuyo desarrollo se pretende promover

Disciplinares: Leer, analizar e interpretar información proporcionada en una tabla, en una gráfica o en una expresión analítica. Representar tabular, gráfica y analíticamente la variación de una magnitud con respecto a otra. Caracterizar el tipo de variación

Genéricas: Trabajar en equipo. Interpretar información recibida por medio del lenguaje natural o del lenguaje matemático. Comunicar información utilizando el lenguaje natural y el lenguaje matemático

Interrogantes y tareas (problémicas) de la Secuencia Didáctica diseñadas para provocar y conducir el proceso de estudio.

Los Problemas de Minimización

Secuencia No. 1.

Las actividades que se proponen a continuación debes realizarlas de manera independiente como tarea extraclase. Durante la clase, en la primera media hora, trabajarán en equipo, analizando, tanto los resultados obtenidos, como las estrategias que hayan utilizado, para mejorar la comprensión del problema planteado y para señalar lo que todavía no hayan comprendido, que podrán exponer en la segunda media hora destinada al trabajo grupal, en la que podrán escuchar la opinión de los otros equipos sobre lo realizado por ustedes y las sugerencias relacionadas con sus dificultades y sus dudas; lo mismo que la opinión y las sugerencias del profesor.

Etapa de Inicio.

Actividad 1. El problema de la fabricación de una lata en forma de cilindro circular recto.

Supón que se te encomienda elaborar un proyecto para la fabricación de latas que tengan la forma de un cilindro circular recto y capacidad de un litro (o sea, **1000 cm^3**) con la condición de que la cantidad de material que se utilice sea la mínima. Para cumplir la encomienda es necesario que analices lo que se te pide que hagas, tratando de entender qué sabes al respecto y cómo, a partir de lo que sabes, puedes decidir qué hacer. Para iniciar este proceso de entendimiento de la situación, se te sugiere que contestes las siguientes preguntas y veas si al contestarlas, tienes más claro cómo cumplir con lo que se te ha encargado.

- ¿De qué valores depende la capacidad de la lata?
- Si la altura de la lata permanece constante ¿Qué sucede con su capacidad si se aumenta el área de su base?
- Y si el área de la base de la lata se conserva constante ¿Qué pasa con su capacidad al variar su altura?
- Dado que en el caso de la lata que se pretende fabricar, lo que se quiere que permanezca constante es su capacidad ¿Cómo están relacionadas el área de la base y la altura?
- Si se tiene una lata cuya capacidad es un litro y se quiere aumentar el área de la base al doble, ¿Qué tendría que hacerse para que la capacidad no cambiara?
- Y si fuera la altura la que se quisiera aumentar, sin cambiar la capacidad de la lata ¿Qué tendría que hacerse?

Actividad 2. ¿Sabes cómo se calcula el volumen del cilindro recto? (Si no sabes, necesitas investigar). De acuerdo con la fórmula que se utiliza para calcular dicho volumen, determina ¿De que valores depende dicho volumen?

- En el problema que estás queriendo resolver, el valor del volumen de la lata de aceite debe valer 1000 cm^3. Si sustituyes este valor en la fórmula del volumen V obtienes una nueva expresión (fórmula) que permite calcular la altura *h* del cilindro ¿Cuál es esa nueva expresión?

- En esta nueva expresión ¿De quién depende el valor de la altura *h*?
- Si quisieras construir una lata cuya base tuviera un radio $r = 5\ cm$ ¿Qué altura debería tener?
- Y si quisieras que la altura fuera $h = 15\ cm$ ¿Cuánto deberá medir el radio de la base
- ¿Cómo debe cortarse la lámina para construir la lata?

Etapa de Desarrollo

Actividad 3

- Si se considera que el grueso, tanto del fondo como de los lados y de la tapa de la lata, es uniforme. ¿De quién depende la cantidad de material empleado en la fabricación de la lata?
- Escribe la expresión analítica que indica cómo puede calcularse el área del rectángulo que sirve de cara lateral del cilindro en función del radio y de la altura.
- Escribe también la expresión analítica que puede utilizarse para calcular el área de la tapa y del fondo de la lata en función del radio.
- Con base en los resultados de los incisos 2) y 3), escribe ahora una expresión analítica que indique cómo calcular el área de la superficie total del cilindro.
- La expresión analítica que has obtenido en el inciso anterior, permite calcular el área de la superficie de la lata en función del radio y de la altura. Utilizando la expresión analítica obtenida en el inciso 2) de la actividad anterior, escribe una expresión analítica que permita calcular el área de la superficie de la lata de nuestro problema (esto es, la superficie de la lata que tiene un volumen de 1000 cm^3) de manera que dicha área sólo dependa del radio de la base.
- ¿Cuál consideras que es el menor valor que puede tomar el radio *r* de la base de la lata? ¿Y el mayor?
- Escribe una desigualdad que exprese el intervalo de valores que puede tomar *r*.
- Dado que el volumen de la lata que se quiere construir es fijo, ¿Qué pasa con la altura de dicha lata a medida que tomamos un radio cada vez más pequeño? ¿y qué pasa con la altura a medida que el radio es cada vez más grande?

Actividad 4

- Abre los archivos lata.ggb y lata1.ggb y observa lo que sucede con la altura de la lata al ir cambiando el tamaño del radio. Cuando lo hayas hecho, describe verbalmente cómo varía la altura en función del radio.
- En el archivo lata1.ggb puede observarse la gráfica que muestra la variación del área de la superficie total de la lata con respecto al radio de la base. Con base en dicha gráfica:
- Describe la variación observada

- Basándote en la gráfica del área que acabas de observar, reformula el problema que se quiere resolver, es decir formúlalo como un problema referido a la gráfica.

Estas actividades se han mostrado con el propósito de ilustrar el proceso de diseño; a la vez que con la intención de mostrar la manera en que, las preguntas y las tareas propuestas están orientadas al logro de los objetivos señalados en el apartado correspondiente, lo mismo que a la promoción de las competencias también señaladas.

En total se diseñaron cincuenta actividades que se organizaron en seis secuencias didácticas que conformaron tres bloques, el primero dedicado al proceso de resolución de problemas de maximización, el segundo al proceso de resolución de problemas de minimización y el tercero al proceso de sistematización e institucionalización de lo aprendido en los dos primeros. Los tres bloques, más una sección de problemas complementarios, cuyo propósito es que los estudiantes tengan la oportunidad de consolidar y profundizar su dominio de los métodos de resolución de problemas, en particular los de optimización. Todas estas actividades se presentan en un folleto titulado Problemas de Optimización que empieza con una presentación, en la que se exponen los propósitos del trabajo, se explica la estructura del mismo y las dinámicas que se habrán de desarrollar. La presentación termina con un exhorto al trabajo con responsabilidad y constancia.

Las dinámicas de trabajo, en las que había una primera etapa de trabajo individual independiente, una segunda de trabajo en equipo y una tercera de trabajo a nivel de todo el grupo, en la que el profesor era el conductor, eran parte esencial de la estrategia a través de la cual se promovía el desarrollo de las competencias, tanto disciplinares como genéricas, con especial énfasis en: la competencia comunicativa, en la de trabajo en equipo, en la de gestión del conocimiento, en la del trabajo cooperativo, entre otras.

Los materiales diseñados para recabar información

Para recabar información sobre los avances logrados, además de la observación permanente del desarrollo de las actividades en el salón de clases, se acordó la elaboración de un portafolio de evidencias de cada alumno, que contuviera un reporte de las actividades del curso realizadas por él durante la semana y una reflexión titulada *¿Qué aprendí esta semana en el curso de Cálculo*? y contuviera también lo realizado por los estudiantes al tratar de resolver un problemario diseñado exprofeso con ese propósito. Dicho problemario está constituido por tres secciones, cada una de las cuales se aplicó a los estudiantes inmediatamente después de haber terminado de desarrollar las actividades didácticas de cada uno de los tres bloques de problemas que constituyeron el material de estudio del curso.

Los siguientes problemas corresponden a la primera sección del Bloque 2 del Problemario y se presentan aquí para ilustrar el material diseñado para recabar información sobre los avances de los estudiantes:

Problema 1

Determina, en cada caso, lo que se te indica y argumenta cómo llegaste a la respuesta.

a) Las cantidades que percibes que varían al estarse llenando con agua un recipiente esférico.
b) ¿De qué variables depende la presión que ejerce un gas contenido en un recipiente?
c) De dos esferas de igual volumen ¿Cuál pesa más?

Problema 2

La fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ expresa la relación entre el volumen de un cono, el radio de su base y su altura. Con base en esta información, describe:

a) ¿Cómo es la variación del volumen con respecto a la altura, si la base permanece constante?

b) Y si la altura es la que permanece constante ¿Cómo es la variación del volumen con respecto al área de la base?

c) Y con respecto al radio, ¿Cómo varía el volumen, si la altura permanece constante?

d) Si se quiere que el volumen de un cono no cambie al duplicar el radio de su base, ¿Qué debe sucederle a la altura?

e) Y si la altura se cuadruplica, ¿Qué hay que hacer para que el volumen no cambie?

f) ¿Cómo están relacionados el radio y la altura de un cono si se quiere que su volumen no cambie?

g) En los primeros tres incisos se te pidió que describieras la variación del volumen del cono, con respecto a la altura, en el a); con respecto al área de la base, en el b) y con respecto al radio de la base, en el c); y en el inciso f) se te pidió que establecieras la relación entre el radio y la altura del cono cuando el volumen permanece constante. Representa gráficamente cada una de las cuatro relaciones que has descrito.

Problema 3

a) ¿Qué forma geométrica tiene la cara lateral de un cono? Dibújala

b) Si se quiere fabricar un recipiente cónico cuya capacidad sea un litro y que su altura mida el doble de lo que mida el radio de su base, ¿Cuánto deberá medir el radio y cuánto el área del material la cara lateral?

c) ¿Para qué valor del radio la cantidad de material necesaria para fabricar un cono cuya capacidad sea un litro, es mínima?

Los problemas de cada una de las secciones del problemario se propusieron a los estudiantes para que intentaran resolverlos, primero de manera individual para lo cual se les asignó un tiempo de una hora, al agotarse el tiempo asignado, lo realizado por cada estudiante se recogió, luego se organizaron equipos de cuatro estudiantes y se les pidió que comentaran lo que cada uno había hecho en cada uno de los problemas y a partir de este intercambio, escribieran y reportaran la versión que hubiera resultado del trabajo en equipo. En este segundo intento también se asignó un tiempo de una hora y se recogió el producto de esta segunda etapa de trabajo. Finalmente, se les propuso que se llevaran los problemas para que, como tarea extraclase y de nueva cuenta en equipo; revisaran la versión que habían entregado y, si lo consideraban necesario, la modificaran y escribieran una nueva versión de la resolución de algunos de los problemas o de todos. Esta nueva versión la entregaban al día siguiente y después de ello se desarrollaba una sesión en la que cada equipo exponía al resto del grupo lo que había hecho, lo que consideraba haber logrado y lo que sabía que le faltaba. Con esta sesión de debate grupal se concluía la etapa de recopilación de información sobre el desempeño de los estudiantes.

LOS RESULTADOS DEL DESARROLLO DE LAS ACCIONES DEL PROYECTO:

En correspondencia con las premisas teóricas en las que está basado el diseño de este proyecto, en particular con las premisas en las que se declara el carácter pragmático y contextual de los significados de los objetos matemáticos, esto es, en las que se establece que los significados que tiene un sujeto de tales objetos, son esencialmente los sistemas de prácticas operativas y discursivas que pone en juego al, analizar, interpretar y resolver problemas; el análisis del trabajo realizado por los estudiantes, estuvo orientado a identificar las prácticas utilizadas por ellos para lograr lo pretendido en cada una de las etapas del proceso de resolución de los problemas, es decir, primero se analizó la etapa de comprensión del problema, luego la del diseño de la estrategia que utilizaron para resolverlo, después la del desarrollo o implementación de dicha estrategia y, finalmente, la etapa de análisis de los resultados obtenidos y su correspondencia con los requerimientos.

A través de este análisis, a partir de la identificación de los sistemas de prácticas utilizados por los estudiantes, se hizo una valoración del nivel de desarrollo de algunas competencias genéricas y disciplinares, tales como: trabajar en equipo, comunicarse (interpretando y emitiendo información) por medio del lenguaje matemático (numérico, analítico, gráfico y verbal), entre otras.

En este reporte sólo presentamos una pequeña muestra de la forma en que se analiza el desempeño de los estudiantes, tanto en el trabajo individual como en el trabajo en equipo y grupal, al tratar de resolver la serie de problemas diseñados exprofeso, lo mismo que al comunicar, oralmente o por escrito, las acciones realizadas en el proceso. También se ilustra la interpretación que se hace de dicho desempeño para valorar el desarrollo de competencias.

Los propósitos específicos que orientaron el análisis de lo realizado por los estudiantes en esta etapa, fueron identificar las prácticas utilizadas y determinar en qué medida lograban:

a) Detectar las variables intervinientes en los procesos de cambio, objeto de estudio.

b) Establecer relaciones de dependencia entre ellas.

c) Desarrollar competencias para utilizar:

- Las diversas representaciones semióticas (numérica, gráfica, analítica y verbal) al analizar, interpretar y comunicar las diversas formas de variación.
- La derivada para maximizar o minimizar el valor de una cierta variable; así como para analizar, interpretar y cuantificar la rapidez con que está variando.

1. En la etapa de trabajo individual.

Se observó que todos los participantes estuvieron intentando resolver cada uno de los problemas aunque ninguno de ellos logró resolverlos todos. Este hecho nos permitió formular dos conjeturas:

- Tal vez el tiempo asignado fue insuficiente.
- Parece que todos los estudiantes, consideran estar preparados para tratar de resolver los problemas.

a) En relación con el Problema 1.

Todos mostraron haber entendido lo que se les pidió.

Las respuestas dadas a lo solicitado en el inciso a), es decir, donde se pide que señalen *las magnitudes que perciben que están variando a medida que se llena el recipiente* indican que han logrado desarrollar competencia para percibir las variables que hemos denominado *visuales* (porque se perciben por medio de la vista), tales como el volumen del agua que está entrando al recipiente, que es la que se percibe más fácilmente, aunque muchos de ellos se refieren al volumen diciendo que *lo que* está cambiando es *"*la cantidad de agua*"*; otras variables visuales que perciben son "el área de la superficie superior del agua" , "el área que se moja", lo que "falta por llenarse" la "profundidad del agua", por el contrario, las magnitudes cuya variación no se percibe visualmente, sino por medio de una inferencia, (como es el caso de *la rapidez con que aumenta la profundidad*), la mayoría de los estudiantes aún no logró percibirlas..

b) El análisis de las respuestas a lo solicitado en los incisos b) y c), se hizo con el propósito de valorar en qué medida pueden los estudiantes establecer relaciones de dependencia entre variables. En el caso de las variables de las que depende la presión que ejerce el gas contenido en un recipiente, prácticamente todos los estudiantes pudieron determinar que depende "Del tamaño del recipiente" y "De la cantidad de gas", que, como puede verse, al volumen lo denominaron "tamaño" y con la palabra "cantidad" se refieren a la "masa". La variable que pasó inadvertida a varios de los estudiantes fue la temperatura. La valoración del desempeño del grupo indica que la gran mayoría de los estudiantes logra establecer relaciones de dependencia entre variables..

c) En relación con el Problema 2.

Las respuestas a las preguntas de los incisos a), b) y c) muestran que todos los estudiantes perciben que el volumen del recipiente crece al crecer cualquiera de las tres variables señaladas; pero apenas un poco más de la mitad establece que la variación del volumen con respecto a la altura o al área de la base, es directamente proporcional y que la variación del volumen es directamente proporcional al cuadrado del radio, sólo logró establecerlo aproximadamente el 40% de los estudiantes. Todos los que establecieron la proporcionalidad en forma cuantitativa justificaron su respuesta con el argumento de que el cociente entre las dos cantidades era una constante y al decirlo, la mayoría escribió la expresión analítica correspondiente. Es decir, escribieron, $\frac{V}{h} = \frac{1}{3}\pi r^2$ argumentando que $\frac{1}{3}\pi r^2$era una constante porque se había dicho que el área de la base era constante; en el inciso b) escribieron $\frac{V}{\pi r^2} = \frac{1}{3}h$ y en el inciso c) escribieron $\frac{V}{r^2} = \frac{1}{3}\pi h$.

Estas respuestas nos llevaron a valorar un buen desarrollo de la competencia para utilizar el lenguaje matemático (analítico y natural) para determinar el tipo de variación de una variable con respecto a otra cuando ésta es directamente proporcional

Las respuestas a las preguntas de los incisos d) y e) puso de manifiesto que la variación inversamente proporcional entre una cantidad y el cuadrado de otra resulta menos comprensible, pues sólo un 25%, aproximadamente, pudo contestar correctamente y quienes lo hicieron argumentaron que la altura y el cuadrado del radio eran inversamente proporcionales porque su producto era una constante, que a su vez fue la respuesta a la pregunta del inciso f).

Las gráficas trazadas por los estudiantes que respondieron en el inciso a), que el volumen era directamente proporcional a la altura y que en el inciso b) respondieron que el volumen es directamente proporcional al área de la base, indican que ellos saben que la variación directamente proporcional se representa gráficamente por medio de una recta de pendiente positiva, aunque no parece que tengan claro qué representa dicha pendiente, pues ninguno de ellos hizo algún comentario al respecto. La representación gráfica de la relación entre el volumen y el radio la hicieron incorrectamente, aproximadamente la mitad de los que habían establecido la proporcionalidad directa entre el volumen y el cuadrado del radio; uno de ellos graficó el volumen contra el cuadrado del radio, es decir en un eje puso V y en el otro puso r^2 y lo graficó correctamente por medio de una recta.

Estas respuestas ponen de manifiesto que la mayoría de los estudiantes representan gráficamente la relación directamente proporcional de manera correcta, si ambas variables son lineales, pero no cuando la proporcionalidad es entre una variable y el cuadrado de otra; además parecen no reconocer que la pendiente de la recta representa la constante de proporcionalidad. Esto nos permite valorar que la competencia para utilizar la representación gráfica de la variación directamente proporcional tiene un bajo nivel de desarrollo en un número significativo de estudiantes y, en consecuencia, nos permite planear nuevas actividades para mejorar su desarrollo. .

d) En relación con el Problema 3.

Este problema resultó difícil para la mayoría de los estudiantes, ya que no lograron dibujar correctamente la cara lateral; algunos parecen no haber entendido bien la pregunta pues lo que dibujaron fue un cono; otros dibujaron un triángulo y sólo unos cuantos, aproximadamente un 15%, dibujaron un sector circular.

De lo solicitado en el inciso b) un poco menos de la mitad logró determinar las dimensiones del radio y de la altura para que el volumen del cono sea un litro; aunque sin tener claras las unidades en que estaban midiendo el radio y la altura pues al resolver escribieron $h = 2r$ y la sustituyeron en la fórmula del volumen obteniendo una fórmula para calcular el volumen en función del radio que resultó ser $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, luego sustituyeron V por 1 obteniendo $\frac{2}{3}\pi r^3 = 1$ y despejaron r obteniendo $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$, lo cual les permitió obtener un valor aproximado de r; sin embargo en ningún momento parecen haber sabido en qué unidades resultó medido el radio al sustituir V por 1; que en el problema se establece que el volumen es un litro; por otra parte tampoco pudieron establecer la relación entre el valor de r y el valor del área de la cara lateral, es decir no pudieron encontrar una fórmula que les permitiera calcular el área de la cara lateral del cono; ni siquiera quienes dibujaron un sector circular.

Una consecuencia de no poder establecer una expresión analítica que permita calcular el área de la sección transversal en función del radio, es no poder calcular el valor de éste para minimizar el área de la cara lateral del cono con capacidad de un litro.

2. En la etapa de trabajo en equipo, en el aula.

En esta segunda etapa, de trabajo en equipo, se observa una mejoría en lo relacionado con los problemas 1 y 2, ahora todos los equipos muestran una mejor comprensión de las relaciones entre las variables presentes en cada uno de los problemas; sin embargo sigue habiendo problemas para interpretar correctamente la relación inversamente proporcional entre el cuadrado del radio de la base del cono y su altura; lo cual se manifiesta al no poder graficar correctamente la relación entre esas dos variables.

En relación al problema 3 no se manifiesta mejoría; sigue sin poder establecerse una relación entre el valor del radio del cono y el área de la cara lateral razón por la cual no se logra determinar el valor del radio que minimiza el área de la cara lateral del cono

De nueva cuenta se observa la posibilidad de que el tiempo no haya sido suficiente para entender y resolver totalmente los tres problemas.

3. En la etapa de trabajo en equipo, fuera del aula, como tarea.

El producto entregado por todos los equipos después de trabajar los problemas fuera de la hora de clase, muestra un avance significativo. El problema 3 que no lograron interpretarlo correctamente en las dos primeras horas de trabajo llevadas a cabo en el aula, finalmente, aproximadamente la mitad de los equipos, logró resolverlo, al establecer la relación entre el radio de la base del cono y el radio del sector circular que constituye la cara lateral y a partir de ella lograron obtener la expresión analítica de la función que permite calcular el área de la cara lateral del cono en función del radio de la base cuando $h = 2r$, la cual resultó ser $A = \sqrt{5}\pi r^2$ y como el valor de r ya había sido calculado, habiendo obtenido $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ pudieron calcular el valor del área de material que se requiere para construir el cono con capacidad de un litro en el que la altura mide el doble de lo que mide el radio de la base; sin tener necesidad de aplicar el criterio de minimización utilizando la función derivarla.

El significativo avance mostrado por los estudiantes en esta tercera etapa del trabajo, tanto en el reporte escrito como con su participación en la sesión de debate grupal, nos permite valorar de manera más confiable el nivel de desarrollo de cada uno de los elementos (conocimientos, habilidades, actitudes y valores) que constituyen las competencias que se ponen en juego al tratar de resolver problemas; a la vez que nos permite detectar los diversos aspectos cuyo desarrollo se percibe más limitado y a partir de tal valoración, poder planear nuevas actividades que ayuden a mejorarlo.

EL DESARROLLO DE ALGUNAS COMPETENCIAS GENÉRICAS.

El desarrollo de la competencia para trabajar en equipo, no sólo se refleja en el avance en la comprensión y resolución de los problemas, sino fue observado durante el tiempo que trabajaron en equipo en el salón de clase

El desarrollo de la competencia para interpretar información recibida por medio del lenguaje natural o del lenguaje matemático, lo mismo que para comunicarla, también se refleja en la calidad de los reportes escritos que presentaron, al igual que en su participación en la sesión de debate desarrollada en el aula sobre la resolución de los problemas propuestos. de el de la competencia información.

COMENTARIO FINAL.

En este reporte se ha pretendido mostrar la relación existente entre los significados que los estudiantes construyen sobre los objetos matemáticos *función y derivada* y el contexto de la enseñanza, específicamente al promover su estudio en el contexto de resolución de problemas de ingeniería. El espacio disponible para publicar este reporte, sólo permitió ilustrar con unos pocos ejemplos lo observado. Quedará pendiente la presentación de las conclusiones finales del proyecto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, R. (1998). *El papel de las representaciones (numérica, gráfica, analítica y verbal) en el origen y desarrollo de los conceptos de función y función derivada* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Morelos. México

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Ímaz, C.; Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* Trillas. México.

Font, V. (1999).*Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis de Doctorado no publicada. Universitat de Barcelona. España

Font, V. (2007). *Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas.* La gaceta de la RSME, volumen 10.2

Font, V.; Godino, J.; D´Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. (Consultado el 12-01-2011 de http://www.ugr.es/loc)

Majmutov, M. I. (1983) *La enseñanza problémica*. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba.