

TUTORIAL DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES EN WEB

Rubén Darío Santiago Acosta, Ma. de Lourdes Quezada Batalla

Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México. (México)

ruben.dario@itesm.mx, lquezada@itesm.mx

Palabras clave: tutorial, aprendizaje adaptativo, cálculo multivariable

Key words: tutorial, learning adaptive, multivariable calculus

RESUMEN

En este trabajo se presenta un sistema de apoyo para el aprendizaje de conceptos y algoritmos del cálculo de varias variables. El sistema está basado en la Web y se construyó en el estándar HTML5 para asegurar su portabilidad. En su construcción se utilizaron los paquetes LaTeX y Mathematica. Se construyeron pequeños programas modulares que, a su vez, permiten elaborar tutoriales, prácticas y tareas. Se utilizan las herramientas de Google-Drive como base de un sistema semi-automatizado de evaluación en línea que permite al profesor realizar análisis estadísticos sobre los resultados de los estudiantes. Las unidades didácticas construidas contienen apartados dedicados a: teoría y ejemplos, ejercicios resueltos en línea, prácticas de autoevaluación, tareas y actividades de evaluación en línea. Al final, se presentan conclusiones sobre un primer estudio del impacto educativo en los estudiantes.

ABSTRACT

In this work, is showed a system that supports students in learning concepts and algorithms dealing with calculus of several variables. The system is web based and built by using an HTML5 standard programming language. This makes the application extremely portable. The Mathematica and LaTeX programs are used to build small programs. Tutorials, homework and other activities were built with these programs. The tools from Google-Drive are used to make an online evaluation of the students. The teacher receives the answers so he can analyze them by using statistical tools. Each learning object has several sections with theory, examples, online exercises, self-evaluation activities, homework and online evaluation activities. Finally, several results about the student's progress are showed.

■ Introducción

Las actuales generaciones de estudiantes se caracterizan por sus habilidades para estudiar y aprender a toda hora y en cualquier lugar. La evolución de la tecnología les permite interactuar con diferentes niveles de información por medio de una gran cantidad de dispositivos móviles a su alcance. En contraste, las nuevas tendencias educativas pretenden desarrollar y potenciar habilidades intelectuales de alto nivel y competencias profesionales en los estudiantes, incorporando técnicas didácticas que incorporan la tecnología como la clase invertida, las mecánicas de juego, los aprendizajes móvil e híbrido. Es común que los docentes usen herramientas tecnológicas como: foros de discusión, redes sociales de aprendizaje, videos, pizarrones interactivos y actividades obtenidas de los cursos masivos en línea que están a disposición de cualquier persona en el mundo. Diversos estudios señalan que los dispositivos móviles, los materiales multimedia y las actividades en línea son los medios de aprendizaje más utilizados por los estudiantes y los más explorados en la educación (Johnson, Adams y Cummings, 2012).

En años recientes, se han construido diversos materiales didácticos (programas, asistentes educativos, libros electrónicos, tutoriales de apoyo) con el objetivo específico de provocar una mejora en el aprendizaje de la matemática. Las experiencias muestran que dichos materiales deben diseñarse ex profeso para un fin y poblaciones determinadas ya que en caso contrario se reduce su éxito (Rojas y Muñoz, 2007). Artigue (2007) menciona que “las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas”. Es decir, aun cuando la tecnología pretende que los estudiantes aprendan más y mejor es necesario no descuidar los problemas que el estudiante tiene con los objetos matemáticos de aprendizaje. Por ejemplo, los tutoriales evolucionaron convirtiéndose en adaptativos de forma que ahora son capaces de reconocer las necesidades de los estudiantes y de proveerles de retroalimentación sobre sus errores. De la misma forma que ocurre en las interacciones existentes entre profesor y alumno, donde el primero da sugerencias al segundo considerando sus conocimientos, fortalezas y debilidades. En el caso de los tutoriales es necesario simular de alguna forma estas interacciones procurando que los alumnos mejoren sus habilidades cognitivas.

Un buen sistema de apoyo al aprendizaje es un software que interactúa con los alumnos para que aprendan algún tema, o bien, un sistema que toma en cuenta el dominio del profesor, el entendimiento del estudiante, los tipos de enseñanza, las características del aprendizaje y el medio de comunicación. Un estudio de Fontalvo et al. (2007) muestra que los estilos de aprendizaje son un factor determinante para construir ambientes virtuales exitosos. Algunos tutoriales recientes incluyen los estilos de aprendizaje entre sus herramientas adaptativas (Akbulut y Cardak, 2012), para su construcción consideran un modelo de diseño de sistemas tutoriales inteligentes (Sánchez, Lorenzo y Pérez, 2012). Una posibilidad para construir tutoriales adaptativos es el software GenTutor elaborado en el paquete Mathematica, que permite escribir preguntas de diferentes tipos y formatos (Santiago y Quezada, 2013).

Por otra parte, en un trabajo experimental, desarrollado hace algunos años en el Campus Estado de México (CEM) del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) se obtuvieron excelentes resultados en el aprendizaje de los estudiantes. En dicho trabajo, los alumnos trabajaban individual o colaborativamente resolviendo ejercicios generados mediante computadora en un ambiente de aprendizaje presencial. Los ejercicios se seleccionaban aleatoriamente de un banco de reactivos

clasificados según la taxonomía de Blomm. Este banco demostró ser un material particularmente útil para desarrollar competencias básicas ya que fue estructurado para conformar una ruta de adquisición de habilidades y documentación de desempeño (Delgado, 1996). Sin embargo, el formato presencial de las actividades requería mucho tiempo de los docentes y fue abandonado. En la actualidad, tenemos la posibilidad de brindar a los estudiantes un recurso móvil de acompañamiento de su aprendizaje que utilice los sistemas de evaluación automatizada. El recurso puede ser estructurado ya sea en forma de tutorial adaptativo o como un sistema entrenador con sugerencias y explicaciones detalladas, Un recurso de este tipo provee a los estudiantes de un medio automatizado para mejorar sus resultados académicos, y brinda a los profesores una descripción de desempeño y evolución de sus estudiantes.

Al considerar todos estos elementos se decidió en el departamento de Física y Matemáticas del CEM, construir un sistema entrenador de algoritmos y conceptos de cálculo de varias variables, cuyo principal objetivo es mejorar la calidad del aprendizaje en los estudiantes. Se seleccionó este curso porque su temario es sumamente ambicioso y requiere que los alumnos adquieran habilidad algorítmica para dominar los conceptos, leyes y algoritmos de la materia. En este trabajo se presenta el sistema de apoyo basado en web construido para el curso y se discuten brevemente algunas de sus características. Al final, se establecen varias conclusiones y se describen algunas líneas futuras del trabajo.

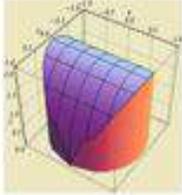
■ Sistema de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas

El sistema fue construido en el estándar HTML5 utilizando el generador de sitios web Weebly, lo que garantiza su visualización tanto en computadoras de escritorio como en computadoras portátiles o en tabletas electrónicas con casi cualquier sistema operativo. Pequeños programas base elaborados en el paquete Mathematica generan preguntas, soluciones, sugerencias y respuestas de forma aleatoria escritas en formatos HTML5 y PDF. Para la notación matemática se utilizó el lenguaje LaTeX y su interpretación requirió de la incorporación de la utilidad MATHJAX. Para la evaluación se utiliza el ambiente de Google-Drive.

El sistema está formado por 12 unidades didácticas: función de dos variables, derivada parcial, plano tangente, extremos de funciones, integral doble, coordenadas polares, integral triple, funciones vectoriales, curvatura y movimiento, campos vectoriales, integral de línea y teoremas integrales. Cada una de las unidades contiene algunas o todas las secciones: teoría y ejemplos, entrenador de ejercicios, práctica de autoevaluación, tareas y evaluación. En la figura 1 se muestra una unidad como se presenta a los alumnos.

Figura 1. Ejemplo de la unidad dedicada a la integral doble.

Tutorial de Mate III para Ingeniería INTRODUCCIÓN FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES DERIVACIÓN PARCIAL



Integral doble

Se practica el cálculo de integrales dobles mediante ejercicios que consideran: regiones rectangulares, regiones no rectangulares, con orden de integración, cálculo de áreas y cálculo de volúmenes.

Material de apoyo

Entrenador

En el tutor puedes practicar ejercicios del tema. Prime el botón para iniciar.

Iniciar entrenador

Práctica

Al oprimir el siguiente botón irás a conjuntos de ejercicios de práctica.

Iniciar práctica

Evaluación

Para ir a la evaluación del tema oprime siguiente botón.

Iniciar evaluación

Figura 2. Entrenador de ejercicios.

Pregunta

59 Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = x^{20} + y^{20}$ ($2x + 4y$) en el punto $(3, 2)$.

a. $z = 30x - 30y$

b. $z = -30x^2 + 17y^2 + 90$

c. $z = 84x^2 + 113y^2 - 240$

d. $z = -\frac{40x}{2^2} + \frac{42y}{2^2} - \frac{132}{2^2}$

Continuar

Pregunta

60 Determina el volumen encerrado por la superficie $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ y los planos coordenados.

a. 7

b. 6/24

c. 4

d. 8

Continuar

Respuesta

Primero calculamos las derivadas parciales de la función:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^{19} (2x + 4y) + 3x^{20} \cdot 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^{19} (2x + 4y) + 3x^{20} \cdot 0$$

Evalúamos ahora las derivadas parciales a la función en el punto $(3, 2)$ obteniendo entonces:

$$f_x(3, 2) = 14,$$

$$f_y(3, 2) = 30,$$

$$f_z(3, 2) = -38.$$

El plano tangente se obtiene usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Obtenemos entonces la ecuación

$$z = 30(x - 3) - 38(y - 2) + 14.$$

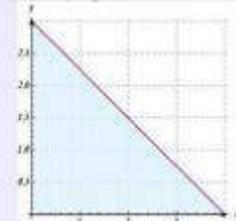
Respuesta

La función a integrar es $f(x, y) = \frac{1}{4}(4 - 3x - 4y + 12)$. La región de integración está dada por:

$$0 \leq y \leq -\frac{1}{3}(x - 4)$$

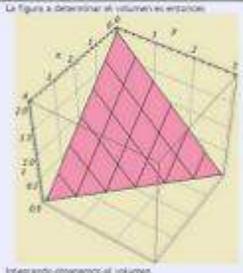
$$0 \leq x \leq 4$$

Gráficamente, se ve así:



Pregunta

La figura a determinar el volumen es espacial.



Integrando obtenemos el volumen

$$V = \int_0^4 \int_0^{-\frac{1}{3}(x-4)} \left(\frac{1}{4}(4 - 3x - 4y + 12) \right) dy dx$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{xy}{4} - \frac{3x^2y}{12} - \frac{2y^2}{4} \right]_0^{-\frac{1}{3}(x-4)} dx$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{3x^2}{16} - \frac{3x}{2} + 3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{16} - \frac{3x^2}{4} + 3x \right]_0^4$$

$$= 4$$

Teoría y ejemplos. En esta sección se discuten los conceptos y una gran variedad de ejemplos relacionados con el tema. Algunas unidades cuentan con material en formato PDF y/o breves videos con pequeñas cápsulas de información con teoría y ejemplos.

Entrenador. En este apartado se presentan ejercicios de opción múltiple, agrupados en niveles de dificultad. Dependiendo de la respuesta se toma la decisión de asignar ejercicios de mayor o menor grado de dificultad y se decide si se muestra o no el procedimiento de solución, ver figura 2. Este es el núcleo base del sistema.

Práctica de autoevaluación. En esta sección se presentan diversas prácticas de autoevaluación con retroalimentación básica. En este apartado se le presentan al usuario de 5 a 10 preguntas. Después de contestar cada una de ellas se le indica al usuario si sus respuestas son o no correctas y, al terminar, se le indica si debe o no continuar con la evaluación de la unidad didáctica, ver figura 3.

Figura 3. Práctica

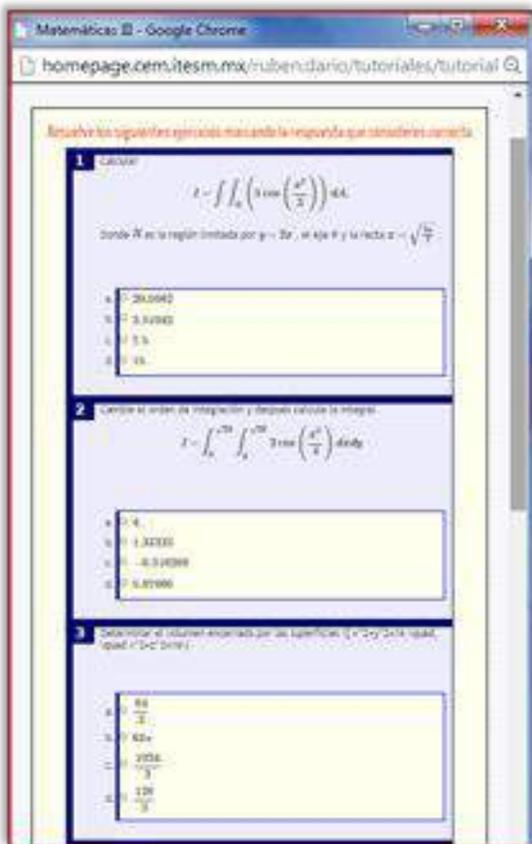
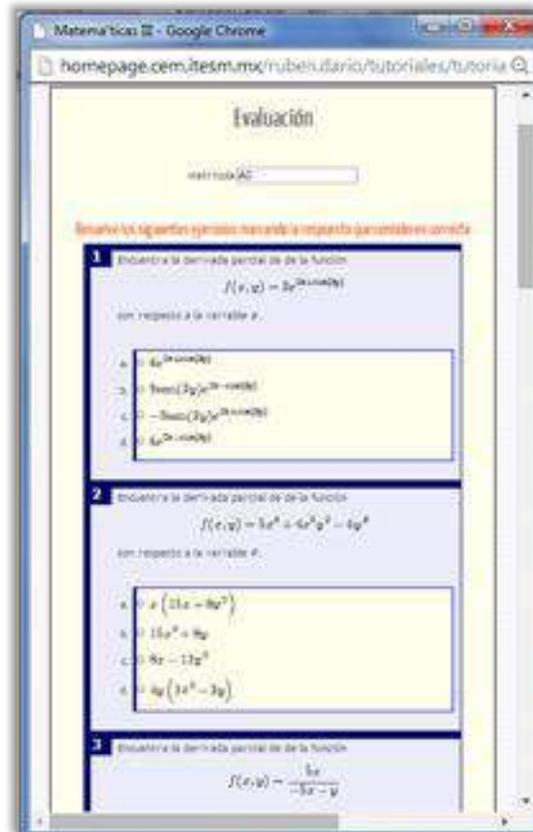


Figura 4. Evaluación



Tareas. En esta sección se construye aleatoriamente un conjunto de ejercicios (con respuestas) que los estudiantes deben entregar al profesor en la fecha convenida entre ellos.

Evaluación. En este apartado se genera un examen de 5 a 10 preguntas de opción múltiple, ver figura 4. Las respuestas del alumno se envían a una base en Google-Drive para su posterior análisis estadístico. El alumno recibe en su correo institucional el resultado obtenido. La estrategia seguida permite que el profesor cuente con la información de sus alumnos en un archivo Excel, que puede usar para hacer análisis estadísticos, ver figura 5.

Figura 5. Los resultados en Google-Drive

	Materia	Matrícula	Examen	Ejercicios	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3
1	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1
2	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1
3	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1
4	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1
5	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1
6	86112010	18101010	12548	43073	1	0	1

Programa Gentutor 1.0

Para construir los entrenadores de ejercicios, las tareas, las prácticas de autoevaluación y el formulario de evaluación se utiliza el programa GenTutor 1.0. Este programa consta de diferentes módulos que, a su vez, permiten generar páginas web con preguntas y ejercicios. Los módulos son: tutor, práctica global, evaluación, tareas y exámenes. Las páginas web construidas utilizan la librería MathJAX para visualizar el código matemático, el lenguaje LaTeX y pequeños programas de evaluación y retroalimentación en JavaScript.

Tutor. El módulo del tutor es el que permite tener un sistema de preguntas, soluciones y respuestas que interactúa con los estudiantes, ver figura 6.

Figura 6. Segmento del programa para construir el tutor.

```

Programa para producir el archivo del "tutor"

principalesArchivos[arch, material, material2, tema, claveTutor, capitulo] := Module[{} ,
archLen = 0;
Write[arch, OutputForm["<DOCTYPE HTML>"]];
Write[arch, OutputForm["<html lang=<es>" ]];
Write[arch, OutputForm["<head>"]];
Write[arch, OutputForm["<meta charset=<utf-8>"]];
Write[arch, OutputForm[StringJoin["<title>", material, " ", material2, "</title>"]];
Write[arch,
OutputForm[
" <link rel=<stylesheet>" type=<text/css>"
href=<"http://fonts.googleapis.com/css?family=Teangerino&mp;v1">"]];
Write[arch,
OutputForm[
" <link rel=<stylesheet>" type=<text/css>"
href=<"http://fonts.googleapis.com/css?family=Yanone-Kaffeesatz">"]];
Write[arch,
OutputForm["<link rel=<stylesheet>" type=<text/css>" href=<"/>../var/estilos/estilos.css">"]];
Write[arch, OutputForm["<link rel=<stylesheet>" type=<text/css>" href=<"/>../var/styla/style.css">"]];
Write[arch, OutputForm[StringJoin["<script>var pregunta", ToString[claveTutor], "</script>"]];
Write[arch, OutputForm[StringJoin["<script>var esp", ToString[capitulo], "</script>"]];
Write[arch, OutputForm["<script type=<text/javascript>" src=<"/>../var/pvaotica.js">"]];
Write[arch,
OutputForm[
"<script type=<text/javascript>"
src=<"http://oda.mathjax.org/mathjax/2.1-beta/MathJax.js?config=TeX-AMS-MML_HTMLorMML">"]];

```

Práctica. En este módulo se pueden construir aleatoriamente prácticas de ejercicios y problemas con retroalimentación basada en sugerencias sobre el avance del estudiante.

Evaluación. En este módulo se construyen actividades aleatorias de resolución de ejercicios online. Las respuestas de los estudiantes son enviadas a un archivo Excel en la cuenta del profesor de Google-Drive. Junto con las respuestas se envía la solución en forma codificada. El profesor puede decodificar, evaluar y retroalimentar a sus alumnos mediante un sencillo programa en Google-Drive.

Tareas y exámenes. En estos módulos se construyen instrumentos de evaluación que, generalmente, son usados en el aula.

La unidad básica de construcción del sistema se muestra en la figura 7. Allí podemos ver que en ésta se mezcla código propio de Mathematica con el lenguaje LaTeX. La unidad está optimizada para generar la pregunta, los procesos de solución con sus explicaciones, y la solución misma. Por cada una de estas unidades básicas se requiere de un programa adicional que sirve como el motor de apoyo a la primera. En general, la construcción de la unidad didáctica de un tema requiere aproximadamente 20 programas básicos y otros 20 de apoyo.

Figura 7. La unidad básica en Mathematica.

```
obj090701 := Module[{cbeo, f1, f2, f3, f4, a, b, fun1, fun2, fun3, fun4, sol, dist1, dist2, dist3,
  repasa, enunciado, ti, pasos},
  cbeo = False;
  Clear[x, y];
  While[cbeo == False,
    f1 = aleat; f2 = f1 - aleat; f3 = aleat; f4 = f3 + aleat;
    a = aleat; b = aleat;
    fun1 = a*x + b*y; fun2 = a*x - b*y; fun3 = fun1/2; fun4 = fun2/2;
    sol = { Integrate[fun1, {x, f1, f2}, {y, f3, f4}][[2]] // Simplify /. regla;
    dist1 = Integrate[fun1, {x, f1, f2}, {y, f1, f2}][[2]] // Simplify /. regla;
    dist2 = Integrate[fun3, {x, f1, f2}, {y, f3, f4}][[2]] // Simplify /. regla;
    dist3 = Integrate[fun4, {x, f1, f2}, {y, f3, f4}][[2]] // Simplify /. regla;
    repasa = {sol, dist1, dist2, dist3};
    cbeo = Check[repasa];
  ];
  enunciado = ("Calcule la integral  $\int \int I \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{b^2 - y^2} dx dy$ ");
  enunciado = "Calcule ";
  enunciado = StringJoin[Drop[enunciado, 1]];
  enunciado = StringJoin[enunciado];
  ti = " ";
  pasos = Integrate[fun1, {x, f1, f2}, {y, f3, f4}][[2]];
  {enunciado, {enunciado, enunciado}, {sol, dist1, dist2, dist3},
  {pasos, ti}};
```

Resultados

Al terminar el periodo académico enero-mayo 2014 se realizó una encuesta de 10 preguntas a 32 estudiantes del curso para conocer sus impresiones con respecto al uso del sistema de apoyo. En esta ocasión las preguntas se enfocaron a conocer cinco aspectos del sistema, a saber: desarrollo de habilidades operativas, tiempo de dedicación, utilidad de la interfase, beneficios de la retroalimentación y utilidad del material didáctico proporcionado. Los resultados indican que el 63% de los alumnos consideran que mejoraron sus habilidades algebraicas y algorítmicas básicas ya que tuvieron que dedicar 3.2 horas de promedio semanales al trabajo con los asistentes matemáticos y los tutores. Sin embargo, la mayoría, 57% considera que falta mejorar las interfases, 63% que se requiere mejorar el apoyo y las sugerencias y 44% que es necesario construir guías más precisas y elaboradas que consideren más pasos en la solución de los ejercicios.

Conclusiones

El avance de la tecnología sugiere la necesidad de incorporar apoyos, asistentes y tutoriales basados en web para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Las nuevas tecnologías ofrecen amplias posibilidades para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, los docentes deben discriminar las ventajas y desventajas de estas tecnologías. En este trabajo se integra de forma novedosa un asistente matemático, un tutorial o entrenador y un sistema de evaluación que usa Google-Drive. Se ha elaborado un producto con las siguientes características que cubre las necesidades de los estudiantes:

- Interactividad, los alumnos comprenden los conceptos mediante el uso de entrenadores y tutoriales generados con el paquete Mathematica.
- Fácil lectura, se discute la teoría desde la perspectiva del que lo lee y no del que lo escribe. En la medida de lo posible los tutoriales explican con amplitud los conceptos
- Tecnología de vanguardia, se utilizan las herramientas más actuales con objeto de que todos los apoyos sean visualizados en casi cualquier dispositivo móvil y con casi cualquier navegador web. Es de destacar la solución al problema del contenido matemático usando la paquetería MathJax y el uso del Google-Drive para el sistema de evaluación.

En conclusión, los apoyos didácticos basados en web son una alternativa para mejorar el aprendizaje de los alumnos, son valiosos porque aportan innumerables conocimientos a los estudiantes. Finalmente, con la metodología utilizada y con la experiencia adquirida podremos mejorar el trabajo incorporando un estudio educativo mucho más profundo que el realizado hasta ahora.

Agradecimientos. Este trabajo se realizó con fondos para la Innovación Educativa del Tecnológico de Monterrey, los autores agradecen el apoyo brindado. También agradecen todas las sugerencias de los profesores del departamento de Física y Matemáticas del ITESM, Campus Estado de México.

■ Referencias Bibliográficas

- Akbulut, Y. y Cardak, C. (2012) Adaptive educational high hypermedia accommodating learning styles: A content analysis of publications from 2000 to 2011. *Computers & Education* (58) 835-842.
- Artigue M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (8) 13-33.
- Delgado, F. (1996). Un modelo de Sistema de Educación Automatizada. *Memorias de las Jornadas sobre la Enseñanza de las Ingenierías*. Madrid, España.
- Fontalvo, H., Iriarte, F., Domínguez, E., Ricardo, C., Ballesteros, B., Muñoz, V. y Campo, J. (2007). Diseño de ambientes virtuales de enseñanza-aprendizaje y sistemas hipermedia adaptativos basados en modelos de estilos de aprendizaje. *Revista del Instituto de Estudios superiores en Educación, Universidad del Norte* (8) 42-61.
- Johnson, L., Adams, S. y Cummins, M. (2012). *The NMC Horizon Report: 2012 Higher Education Edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium.
- Rojas, Y. y Muñoz, T. Mentor. (2007). Sistema tutorial inteligente para el desarrollo de habilidades en la solución de problemas matemáticos. *Revista de Investigación* (7) 2, 235-246.
- Sánchez, N., Lorenzo, M. y Pérez, J. (2012). Model for designing intelligent tutorials systems using conceptual maps and knowledge-based systems. *IEEE Latin America Transactions* (6) 2301-2308.
- Santiago, R. y Quezada, L. (2013) *Gentutor: un sistema generador de entrenadores adaptativo*. Documento interno no publicado, ITESM, México.