UNA SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL PASO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

CHRISTIAN DAVID CAMPO MARÍN

200637711

LUIGI ALEJANDRO LASSO MUNARES

200843727

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali, 2014

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL PASO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS A LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

CHRISTIAN DAVID CAMPO MARÍN

200637711

LUIGI ALEJANDRO LASSO MUNARES

200843727

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

DIRECTORA

ÁNGELA GÓMEZ VELA

Profesora del Área de Educación Matemática

Instituto de Educación y Pedagogía.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICAS

Santiago de Cali, 2014

TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE FIGURAS

LISTADO DE TABLAS

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a DIOS por brindarme todo lo que necesito y por ser el motor de mi vida.

A mis padres por todo el apoyo que me brindan y demás familiares por creer en mis capacidades y ayudarme a fortalecerlas.

A la profesora Angela Gómez por su colaboración y dedicación durante la ejecución de este proyecto, de igual forma a los profesores Ligia Amparo Torres y Diego Garzón, por sus importantes comentarios y aportes para la realización exitosa de este trabajo.

A mi futura esposa Carolina Rodríguez Raigoza por brindarme todo el apoyo en los momentos más difíciles que tuve durante mi carrera y la realización de este proyecto.

A mis profesores que hicieron parte de mi formación desde el colegio hasta la Universidad, por orientarme y aconsejarme en todo momento.

A mi amigo Luigi Lasso por aceptar trabajar en este proyecto conmigo y por enseñarme todo su potencial para la realización del mismo.

Christian David Campo Marín

La presente tesis es producto de la colaboración de muchas personas que mediante consejos, guías, colaboraciones, precisiones e indicaciones hicieron posible que ésta saliera a la luz pública.

En primer lugar quiero agradecer a Dios, pues es por Él por medio de su gracia y bendición que me ha permitido llegar hasta este lugar. Sin su presencia no valemos nada.

A la profesora Ángela que fue una guía a lo largo del proyecto gracias por tus consejos, tu colaboración, tu dedicación y el compromiso que tuviste con nosotros desde un principio.

Gran apoyo incondicional siempre encontramos en ti. De igual manera a las profesoras Giselle Montiel y Gabriela Buendía porque sus investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática fueron luz y guía para la consecución del trabajo de grado.

A mi familia, gran baluarte y soporte que tengo todo momento, mi padre por sus apreciados consejos, mi madre por su infinita dedicación y mi hermana por el apoyo que puedo encontrar en cualquier momento.

Mi novia Stephany que también hizo parte en todo este proceso, por sus consejos en momentos difíciles, por darme aliento y porque encontré en ti una columna incondicional cada vez que me faltaba la fuerza.

A mi hermano Leonel Manrique, compañero de la academia y gran amigo que siempre tiene las palabras adecuadas en los momentos en que no podía hilar una oración.

A mis estudiantes que participaron en este trabajo: Sofía, Allison, Isabella, Juan Camilo, Guillermo, Tomás, Manuela y Victoria, sin ellos no hubiese sido posible la realización de este trabajo. Asimismo al Liceo Los Alpes por ofrecerme gentilmente sus instalaciones para la consecución de este objetivo.

Finalmente pero no menos importante a mí amigo Christian, quien estuvo conmigo durante el desarrollo de este trabajo. Los aciertos que tuviste y la visión que le dabas al trabajo hicieron posible que éste llegará a buen puerto.

Luigi Alejandro Lasso Munares

# RESUMEN

El siguiente trabajo aborda una problemática presente en el campo de la Educación Matemática en el aula, sobre la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas y su paso a las funciones trigonométricas, debido a que tradicionalmente las razones trigonométricas se abordan a partir del triángulo rectángulo de una forma mecánica, luego se estudia el círculo trigonométrico sin acompañamiento de una reflexión que las relaciones con las razones y al final se alude a las funciones trigonométricas por medio de definiciones lo que conlleva a una desarticulación en el paso de un proceso a otro.

Se busca entonces, mediante una secuencia didáctica favorecer el paso de las razones a funciones trigonométricas para el caso de la función seno. Para ello se tomaron algunos elementos pertinentes desde la microingeniería didáctica para explicar algunos de los fenómenos que ocurren en la intervención de la secuencia. La secuencia didáctica consta de dos (2) situaciones: la primera es una situación problema que aborda el concepto de razón trigonométrica, y la segunda situación es la construcción de la función trigonométrica Seno. Para las actividades anteriores se usó la plataforma Geogebra como herramienta mediadora en el aprendizaje de los conceptos trabajados.

Palabras claves: Razón trigonométrica, función trigonométrica, secuencia didáctica, pensamiento variacional, didáctica de la matemática.

INTRODUCCIÓN

El presente proyecto está inscrito en la Línea de Investigación ***Didáctica de las Matemáticas*** del programa Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle. Se plantea una secuencia didáctica que favorezca el paso de la razón trigonométrica a función trigonométrica Seno, para el desarrollo del proyecto se tuvo en cuenta algunos referentes metodológicos de la Microingeniería Didáctica desde la teoría de M. Artigue (1995) donde se analicen las condiciones y posibilidades involucradas en el aprendizaje del concepto del Seno trigonométrico, considerando inicialmente su aspecto geométrica y finalizando en su parte algebraica, es decir, desde la geometría del seno (razón trigonométrica) hasta la variacionalidad del mismo (función trigonométrica). Para ello se diseñó una secuencia didáctica con situaciones y actividades que permitan al estudiante describir, explicar, analizar y argumentar los sucesos y hallazgos en el desarrollo de las tareas.

El primer capítulo corresponde a las generalidades del proyecto, planteamiento del problema, objetivos y justificación, donde se hace referencia a la desarticulación entre los conceptos de razón y función trigonométrica y la importancia de desarrollar un pensamiento variacional en el aula; este problema se concreta al final del apartado con la pregunta que orienta esta investigación.

En el segundo capítulo se aluda a algunos referentes teóricos donde se identifican varias dimensiones y se presentan los elementos teóricos que permiten fundamentar el trabajo: La dimensión didáctica, la dimensión curricular y la dimensión matemática. Además los referentes metodológicos que son usados en el proyecto donde se explicitan la Microingeniería Didáctica como un posible enfoque de investigación, en el cual se tomaron algunos referentes para el diseño y los análisis de la secuencia didáctica aplicada.

El tercer capítulo corresponde al análisis del diseño y ejecución de la secuencia didáctica, donde se tienen presentes los conceptos matemáticos que subyacen en cada actividad.

Finalmente en el cuarto capítulo hace referencia a las conclusiones obtenidas por medio de la puesta en práctica de las situaciones, su análisis y evaluación.

CAPÍTULO I:

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En la enseñanza tradicional, el docente suele presentar la definición de razón trigonométrica como un cociente entre las medidas de las longitudes de un triángulo rectángulo, socavando de esta manera las relaciones explícitas y las construcciones geométricas que subyacen en ellas, como el teorema de Tales, semejanza de triángulos, ángulos en posición normal, entre otras, es decir, el tratamiento que se hace al concepto de razón trigonométrica en la escuela es abordado desde la geometría euclidiana, una geometría que se caracteriza por ser invariante, rígida y sin transformaciones explícitas. Por lo tanto, en el paso del contexto geométrico al algebraico se tienen pocas herramientas para articular la variación en el paso de la razón a la función trigonométrica.

Además, el uso de las razones trigonométricas en el aula se basa explícitamente en resolver problemas de triángulos rectángulos como el cálculo de alturas, de sombras, de ángulos de elevación o depresión, sin explorar características que posibilitan su extensión a las funciones trigonométricas; esto se sustenta en Cantoral, R., Maldonado, S. & Montiel, G. (2004, p.376), quienes argumentan que la función trigonométrica abstrae propiedades de las tablas trigonométricas y del estudio de los triángulos, pero obedece a prácticas de naturaleza distinta de la trigonometría como rama de la geometría.

En este sentido, es el círculo trigonométrico el que se usa frecuentemente como medio de introducción a las funciones trigonométricas en donde se pueden evidenciar el cambio entre las magnitudes del triángulo, las longitudes de arco, la equivalencia entre la medida de grados en el triángulo y la medida en radianes en el plano, el cambio de dominio, entre otras (Ver figura 1). Por ello su compresión es fundamental en el andamiaje entre un concepto y otro.

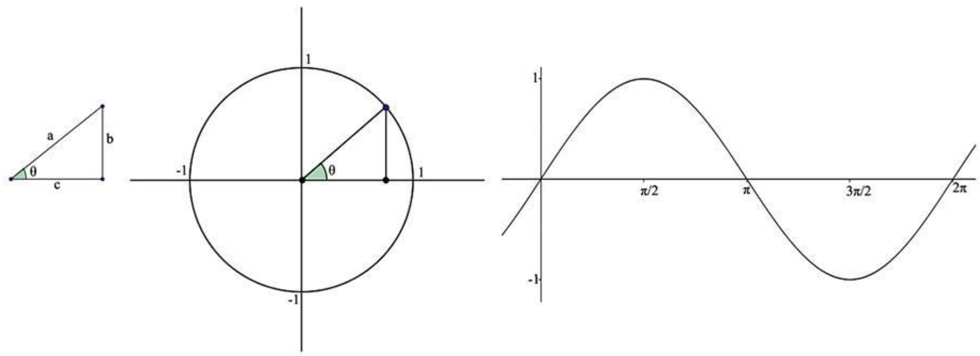


Figura 1. Paso de la razón seno a función seno a través de círculo trigonométrico.

Investigaciones hechas por Montiel (2004, 2005) demuestran que persiste la ruptura en el paso de la razón trigonométrica a función trigonométrica, es decir, cuando se pierde el sentido geométrico y se adquiere un carácter más funcional, esto se debe porque existe una discontinuidad entre la geometría y el álgebra de la geometría. Lo anterior aporta al planteamiento del problema del presente trabajo porque corrobora la existencia de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas al pasar de un triángulo rectángulo al plano cartesiano, desde las semejanzas de triángulos a las funciones trigonométricas, desde los ángulos medidos como amplitudes en grados y los ángulos en radianes y por ello se crea un dicotomía entre un concepto y otro durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Asimismo, Santacruz (2005) realizó una investigación en torno a los textos escolares que se trabajan en Colombia y a las concepciones que tienen los maestros sobre las funciones trigonométricas y el pensamiento variacional concluyendo que éstos no hacen alusión alguna a lo que la enseñanza y aprendizaje de este saber específico puede aportar al desarrollo del pensamiento variacional. Esto significa que prevalece en el aula una enseñanza mecánica de dichas funciones coartando de esta manera las posibilidades de su uso como desarrollo del pensamiento variacional.

Ante este panorama, el presente trabajo se contextualiza alrededor de las razones y funciones trigonométricas, sus problemas de enseñanza y aprendizaje y el diseño de una propuesta didáctica que permita la articulación en el paso de un concepto al otro dando una importancia del desarrollo del pensamiento variacional y geométrico.

En relación a todo lo anterior, el problema de investigación se concreta bajo la siguiente pregunta:

> ¿Cómo a través de una secuencia didáctica, que involucra la mediación de Geogebra, se favorece el paso de las razones a funciones trigonométricas, particularmente, la función seno en estudiantes de grado decimo de educación media Colombia?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. General

Favorecer en los estudiantes de grado decimo el paso de la razón a función trigonométrica seno a través de una secuencia didáctica mediada por Geogebra.

1.2.2. Específicos

- Fundamentar la problemática desde algunos aspectos teóricos como los didácticos, curriculares y matemáticos en pro del diseño de una secuencia didáctica alrededor de las razones y funciones trigonométricas.

- Articular los referentes teóricos en el diseño de una secuencia didáctica para favorecer en los estudiantes el pensamiento matemático, particularmente las razones y funciones trigonométricas, en el caso de la función seno.

- Movilizar en estudiantes de grado décimo algunos elementos conceptuales como la variación, en el paso de la razón a la función trigonométrica, para el caso de la función seno a través una serie de tareas dentro de la secuencia didáctica propuesta.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo presenta una forma de romper con el tratamiento estático de las razones y funciones trigonométricas que se observa en las tendencias de trabajos en el aula de clase, en ese sentido, Santacruz (2005) pone de manifiesto que se continúa en la escuela una conceptualización estática dejando a un lado aspectos como la variación y la relación entre el movimiento de variables. Por esta razón se propone la elaboración de una secuencia didáctica que aporte a la reflexión en el campo de la Educación Matemática y posibilite al estudiante establecer el paso de la razón trigonométrica a la función donde prevalezcan los procesos de variación.

Estos procesos son importantes debido a que permiten integrar el estudio y la compresión de variables aportando así a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan un pensamiento variacional. Desarrollar un pensamiento variacional significa relacionar las variables internas, pensar en lo que cambia y en lo que permanece constante, es la captación y la modelación de fenómenos asociados a la representación, modelación y caracterización de variables. Vasco (2006) hace referencia al pensamiento variacional donde lo describe como una forma de pensar dinámica y además intenta producir mentalmente sistemas que relacionan las variables internas de tal manera que coavaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad.

Es precisamente aquí donde el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación, en adelante TIC, juegan un papel fundamental para indagar los procesos de variación que se presentan entre algunos objetos matemáticos, ello debido a que la forma en que estos se conciben no son la misma desde otro ambiente, por ejemplo un punto en lápiz y papel es la huella que deja el lápiz en el papel y se caracteriza por ser estático (González, 2011), mientras que en la interfaz gráfica de Geogebra un punto se compone de pixeles y puede ser movido mediante animaciones o arrastres; aunque esto no necesariamente garantiza el dinamismo del concepto de función en el estudiante, sí permite una visualización dinámica, y así fortalecer, en cierta medida, la variación del objeto matemático a través de esta representación. Es por ello que es importante tener en cuenta todas estas particularidades en el momento de desarrollar la secuencia didáctica.

Se considera entonces, el uso de la tecnología dada sus potencialidades para la mediación porque permite acciones como la visualización, modelación y variación en espacios pequeños para fortalecer un pensamiento variacional en el aula.

Además, el presente trabajo se inscribe dentro del marco curricular colombiano del Ministerio de Educación Nacional, en adelante MEN, que en el documento de los Lineamientos Curriculares (1998) indica la necesidad de integrar no solo las calculadoras gráficas sino también los productos de software en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas enriqueciendo así el currículo, sin embargo, su uso en el aula debe ser llevado a enfatizar más en la compresión de los procesos matemáticos que la mecanización de rutinas, por ello en la secuencia didáctica que se presenta en este trabajo prevalecerá los procesos de análisis, reflexión y generalización del objeto matemático a explorar para así potenciar el pensamiento variacional en los estudiantes.

En relación con lo anterior, uno de los modelos teóricos que se ajusta a la propuesta es la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986) en la que relaciona directamente al estudiante y el objeto a enseñar, Margolinas (2009, citado en González, 2011, p.25), indica que la secuencia didáctica se construye intencionalmente para que los alumnos adquieran una saber determinado, por ende en este trabajo es necesario implementar una secuencia didáctica debido a que brinda la posibilidad de visualizar, recrear y variar para construir el saber correspondiente a la función seno.

También, una secuencia didáctica permite la realización de actividades planificadas y organizadas entre sí acorde al objeto matemático que se quiere enseñar, evitando de esta manera plantear situaciones desarticuladas o sin continuidad, tal como suele suceder en la enseñanza tradicional de las razones y funciones trigonométricas, donde cada contenido se presenta de manera aislada, por ello la necesidad de relacionar estos dos objetos matemáticos a través de una secuencia didáctica.

Finalmente, este trabajo aporta a la formación personal y profesional de los autores enriqueciéndolos de conocimientos y saberes, para llevar a cabo una labor competente y reflexiva como futuros docentes de matemáticas, en el caso particular de trigonometría haciendo hincapié en los aspectos variacionales.

CAPITULO II:

ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

2. ALGUNOS REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se muestran algunos de los elementos teóricos y metodológicos que son de referencia tanto para fundamentar la problemática como para el desarrollo del trabajo. Esta fundamentación se realiza desde tres perspectivas de trabajo: dimensión didáctica, dimensión curricular y dimensión matemática.

2.1. DIMENSIÓN DIDÁCTICA

La dimensión didáctica se fundamentó desde tres pilares: El pensamiento geométrico y variacional en la trigonometría (Montiel, 2013), el papel de las TIC en la Educación Matemática (Gonzales, 2011) y La teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Juntas pueden dar una visión global de los fenómenos que rodean los conceptos desarrollados en este trabajo de grado y se complementan para la consecución de una secuencia didáctica que aborde la problemática.

2.1.1. Pensamiento geométrico y variacional en la trigonometría

Investigaciones realizadas por Montiel (2004, 2005, 2013) documentan la necesidad de hacer énfasis en el tránsito de las razones a las funciones trigonométricas, donde se enfatice la importancia del desarrollo del pensamiento variacional, el cual está estrechamente relacionado con el reconocimiento, identificación y caracterización de una variación o cambios dentro de un fenómeno.

Debido a la necesidad de documentar resultados e investigaciones en torno a la problematización de la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, las funciones trigonométricas y el tránsito de un concepto a otro, Montiel (2013) los categoriza como Didáctica de la Trigonometría. Muchos son los autores que aportan a la construcción de una base sólida en donde se pueda comprender los fenómenos que subyacen en ella. Por ejemplo, Kendal y Stacy (1998) comparan diferentes métodos como el círculo trigonométrico y el uso de los triángulos rectángulos para su extensión a las funciones trigonométricas y concluyen que en éste último es donde encontraron mejores resultados, aun así se debe tener claro que en el paso de un concepto a otro es necesario los elementos que aporta el círculo unitario.

Por otro lado, Grabovskij y Kotel'nikov (1971) fueron quizás los primeros investigadores en hablar sobre la necesidad de involucrar la modelación de fenómenos físicos en el estudio de las funciones trigonométricas y así realizar los diferentes análisis de sus propiedades, sin embargo el cálculo del valor numérico que se realiza al final, aun estando contextualizada, se establece como una razón entre dos lados lo que no deja depender del triángulo rectángulo.

No obstante, este acercamiento es bastante interesante en el sentido que se contextualiza las funciones trigonométricas con movimientos o aplicaciones, combinando de esta manera, la resolución de problemas y los conceptos trigonométricos involucrados, asimismo se busca darle significación mediante actividades de medición, calculo y modelación, conllevando a un modelo propuesto por Montiel (2005) sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico.

Siguiendo en el terreno de las funciones trigonométricas, Webber (2005) encuentra resultados positivos cuando se trabaja en el círculo unitario gracias a diseños fundamentados en teorías de aprendizaje en matemáticas. Las actividades diseñadas en este estudio utilizan los valores del círculo trigonométrico como un procedimiento geométrico donde sus coordenadas son justamente el valor de las funciones seno y coseno. Sin embargo el procedimiento para el cálculo que está detrás es nuevamente, el resultado de dividir dos segmentos de longitudes de un triángulo.

Esta inherencia entre los dos conceptos, el de razón y función trigonométrica pareciera estar involucrado en todo el proceso educativo de la trigonometría por donde quiera que se mire y resulta entonces más provechoso estudiar y analizar los resultados desde una perspectiva donde se retome y rescate tanto lo geométrico como lo variacional, es decir, ver lo trigonométrico como un conjunto de saberes que obedece a contextos, problemas y circunstancias particulares y no solo a estructuras matemáticas que dan coherencia a su presentación como objeto matemático formal.

Por ello, el diseño de las actividades de la secuencia didáctica debe abarcar todos los aspectos que sean necesarios con el único objetivo de que emerja el pensamiento funcional trigonométrico para resolver un problema en particular. Por *pensamiento funcional trigonométrico* (Montiel, 2013) se hace referencia a cuando el estudiante es capaz de reconocer, en un comportamiento periódico – acotado, una herramienta predictiva, es decir, una herramienta que pueda predecir el comportamiento "futuro" con base al presente y a las variaciones del pasado. La especificad de este comportamiento periódico se construye en un contexto de variación. Ello no resta importancia a las construcciones geométricas sino que por el contrario constituyen el proceso que le da origen y es entonces cuando se habla de *desarrollo del pensamiento relacional-trigonométrico* cuando el estudiante identifica la relación entre ángulos y cuerdas, pero sobre todo la naturaleza de dicha relación y la posibilidad de cuantificarlas.

La contextualización de las actividades didácticas en trigonometría no solo depende de la elección del tipo de herramientas (como el uso o no de la tecnología computacional) o de los materiales (manipulables o no) sino también de la elección de situaciones problema según la ubicación curricular de los contenidos y los problemas que ya se hayan resuelto con anterioridad o que en el futuro puedan ser vinculados con la trigonometría, es decir, con las intenciones o perspectivas que tiene el docente en los contenidos didácticos a trabajar.

En todo caso, es de resaltar que en toda propuesta didáctica se debe buscar el desarrollo del pensamiento variacional tanto el funcional trigonométrico y relacional-trigonométrico como lo indica Montiel (2013)

Los conceptos de razón y función trigonométrica deben emerger de manera natural a partir de la necesidad de su utilización, para ello es necesario enfrentar a los estudiantes a actividades donde a partir del uso de la geometría se lleguen a las nociones trigonométricas.

En búsqueda del desarrollo del pensamiento trigonométrico, se usó la herramienta Geogebra como un facilitador del aprendizaje de la trigonometría, pues debido a las diferentes posibilidades de exploración que ésta ofrece puede contribuir a la comprensión y al desarrollo de conceptos y habilidades propios de las matemáticas.

2.1.2. El papel de las TIC en la Educación Matemática

Un hecho indudable es que la tecnología cada vez tiene un mayor impacto en el diario vivir de los seres humanos, incluyendo los estudiantes que se encuentran en la educación media, sujetos de interés en esta investigación. El auge de este nuevo desarrollo cultural permite presentar una opción diferente a la habitual en lo que se refiere al conocimiento como parte de la actividad humana, de esta manera en este trabajo se recurre a la tecnología como herramienta en pro del conocimiento, utilizando el programa Geogebra como mediador, se considera que el software potencializa la visualización del paso de la razón a la función trigonométrica, específicamente en la función seno.

Gonzales (2011) define la visualización como:

> “el proceso de formar imágenes (mental, con lápiz y papel o computadora), usar esas imágenes para descubrir o comprender matemáticamente algo (…), convertir lo simbólico en lo geométrico, favorecer el proceso de conocimiento científico”

Es por esto que en Educación Matemática se considera que la visualización hace parte fundamental de los procesos que en esta área se medían, pues gracias a la naturaleza abstracta de los objetos de estudio, es necesario acudir a representaciones que permitan acceder a estos de una forma cercana, no siendo esta la única manera. Geogebra entonces se convierte en el instrumento, que presenta una solución a dicha situación, potencializando y permitiendo que como en este caso se puedan visualizar gran parte de las propiedades de la función seno.

Algunos docentes se ven interesados en utilizar nuevos recursos en el desarrollo de los contenidos matemáticos, sin embargo al momento de emplear las TIC en el aula es pertinente que el docente realice un análisis de las fortalezas y limitaciones del artefacto a implementar, para que este no se convierta en un obstáculo, que le agregue complejidad al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para el desarrollo de esta secuencia, es necesario aclarar las restricciones que el programa Geogebra puede tener al momento de ser usado en las diferentes situaciones, dichas restricciones intervienen en el desarrollo de las actividades y en el proceso de la construcción del concepto matemático a trabajar, entre estas se encuentran: la precisión del arrastre para ubicar ángulos medidos en grados, la cantidad de cifras decimales a utilizar en las mediciones tanto de ángulos como de longitudes y al momento de medir una longitud de arco el programa solo mide hasta una vuelta completa. Sin embargo, como orientación del docente éstas restricciones no deben ser un problema para la aplicación de la secuencia.

Por otra parte, este trabajo se fundamenta desde el enfoque instrumental, el cual Santacruz (2009) describe como:

> *"La aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como 'recursos que resuelven y solucionan' problemas en el aprendizaje"*

Por tanto, el artefacto entregado por el docente debe ser convertido en instrumento a través de la construcción de esquemas de uso por parte del estudiante, entendiéndose como esquemas de uso las actividades que se realizan en el software, estas permanecen de forma invariante por un periodo de tiempo, hasta que el estudiante organiza nuevamente su manera de trabajar para acercarse a la resolución de la tarea propuesta.

El artefacto entonces es la parte material o simbólica que es convertida en instrumento, a través de su uso por parte del usuario, en este caso, Geogebra en sí mismo es un artefacto, que se convierte en instrumento una vez el estudiante se apropia de este, utilizándolo de manera asertiva en pro de la construcción de su proceso educativo, empleando formas específicas y personales de manejo.

Por esta razón se tiene en cuenta para el desarrollo de la secuencia didáctica presentada en este trabajo, no tomar Geogebra como un software para sólo verificar resultados, pues se considera que esta tarea no permite explorar todas las potencialidades del programa, restringiendo sus fortalezas; además el uso del artefacto debe estar dirigido hacia el cumplimiento de los objetivos planteados en la secuencia.

A continuación se describe algunas características del software Geogebra será integrara en la situación didáctica.

Geogebra es un software libre, creado con fines pedagógicos por Markus Hohenwarter (2002) profesor de la Universidad de Salzburgo. Es un software interactivo desarrollado en *JAVA*, que puede ser usado en ambientes escolares y universitarios; es un procesador geométrico y algebraico, debido a que relaciona la geometría, el álgebra y el cálculo en un Ambiente de Geometría Dinámico, en adelante AGD, además este software permite evidenciar distintas representaciones de un mismo objeto matemático como la gráfica, la algebraica y la numérica, permitiendo así el paso de un registro a otro, sin que este genere obstáculos al momento de desarrollar la tarea.

En el caso de las gráficas de las funciones, Geogebra permite identificar algunas características que no son evidentes en lápiz y papel, por ejemplo al momento de realizar desplazamientos horizontales o verticales, identificar el periodo, la amplitud, el rango, cortes con los ejes, entre otros.

Además, Geogebra tiene algunas características de los Sistemas de Cálculo Simbólico (en inglés CAS), porque se pueden generar gráficas de las diversas funciones, en particular la función seno, con solo ingresar su expresión algebraica y también incorpora otras utilidades de manipulación de expresiones algebraicas como obtener las raíces de una ecuación, factorización de expresiones algebraicas, desarrollo en polinomios de Taylor, entre otras funcionalidades. Esto quiere decir que Geogebra une las características de los CAS y los AGD, acoplando en una misma interfaz, representaciones gráficas y simbólicas, lo que pone al software en un lugar privilegiado, respondiendo a las necesidades de la secuencia a realizar.

Más aún, los CAS permiten que el estudiante muestre un mayor interés por las expresiones algébricas debido que estos brinda la posibilidad de visualizar de manera dinámica el impacto de los parámetros en la relación entre la ecuación (en lenguaje algebraico) y su gráfica, siendo así Geogebra una herramienta de gran utilidad para los objetivos del presente trabajo.

Por las anteriores razones expuestas, se considera Geogebra como el software ideal, para la aplicación y ejecución de la secuencia didáctica propuesta en este trabajo.

2.1.3. Teoría de Situaciones Didácticas

Las situaciones didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone en el aula a un docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas, desde una perspectiva basada en la resolución de problemas y la indagación por parte de los estudiantes. Su teoría fue inicialmente desarrollada por Brousseau (1986) con el objetivo de construir el conocimiento matemático a partir del reconocimiento de problemas que son generados a partir de otros problemas. Brousseau piensa que, para todo conocimiento (matemático) es posible construir una situación que pueda comunicarse sin apelar a dicho conocimiento y para lo cual éste determina la estrategia óptima.

Esta visión del aprendizaje sostiene que los estudiantes deben tener experiencias que les permitan dar sentido y significado a los diferentes aspectos del mundo, asimismo el desarrollo de habilidades necesarias en los procesos de construcción del saber, que rescatan la indagación como la resolución de problemas tales como preguntar, predecir, observar, interpretar, comunicar y reflexionar.

Para que el proceso de construcción del conocimiento matemático emerja se necesita esencialmente de dos elementos: La interacción del estudiante con una situación problema que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en escena y la interacción del docente con el estudiante. A partir de ellos se postula la necesidad de un medio pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica.

En la propuesta que se presenta en este trabajo, se exponen situaciones que servirán como carta de navegación en la consecución del objetivo, que es favorecer el paso de la razón a función trigonométrica y desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes. El medio en el que el estudiante se moverá con el objeto matemático es el programa Geogebra.

Es así como desde esta mirada, las situaciones didácticas de matemáticas están construidas bajo dos pilares: La primera es una situación problema que enfrenta al estudiante con el concepto matemático y que orienta el proceso de enseñanza y la segunda es, por supuesto, el contenido matemático a desarrollar.

Por eso, en el presente trabajo se explicitan justamente los contenidos matemáticos que se trabajan en cada actividad, explicitando los conocimientos previos y los conocimientos que se esperan que emerjan como producto de la socialización de las actividades, asimismo el diseño y las preguntas propuestas posibilitan la continua interacción del estudiante con el objeto matemático y que éste pueda tomar diferentes posturas frente a la situación planteada siempre bajo la guía del docente. En el desarrollo de cada situación los estudiantes tienen la posibilidad de explorar e incorporar herramientas que permitan dar una respuesta a la pregunta planteada, respuesta que siempre se debe socializar, confrontar pero sobre todo comunicar para así determinar si el estudiante pudo interiorizar el concepto que se ha trabajado.

Por ello, la competencia comunicativa es un componente transversal y valioso para la construcción y perfeccionamiento de las competencias matemáticas, es decir, el uso de un leguaje apropiado (notación, símbolos, terminología, entre otros) en las explicaciones escritas y/u orales, el uso de formas de representación matemática apropiadas para presentar información, cambiar de unas formas de representación matemática a otras y comunicar líneas de razonamiento matemático completas, coherentes y concisas son fundamentales para la aprehensión de todo conocimiento matemático.

De esta manera, las situaciones didácticas brindan la posibilidad que los estudiantes escriban sus propias opiniones, hipótesis y conclusiones, a través de un proceso colaborativo con el docente quien ahora tiene un rol más activo, pues es el responsable de movilizar un aprendizaje significativo.

La situación didáctica en pro del pensamiento matemático:

Como se expuso anteriormente, el desarrollo del pensamiento trigonométrico debe emerger de una manera natural en el estudiante, sin embargo es evidente que éste debe ser provocado mediante situaciones que enfrenten al estudiante con el objeto en cuestión, por ejemplo a través de una situación didáctica. Montiel (2013) caracteriza este pensamiento no como algo que debe ser alcanzado sino más bien como un conjunto de evidencias que emergen o deben emerger en medio de una actividad matemática cuando estudiantes y profesores enfrentan situaciones donde el conocimiento trigonométrico debe ser necesario para dar solución a un problema. Las situaciones a que Montiel hace referencia pueden ser, entre otras, situación didácticas ricas en contenidos matemáticos y trigonométricos que pongan al estudiante frente a situaciones desconocidas pero que pueden dar solución con los conocimientos previos que éstos poseen.

Por esta razón, se busca a través de este proyecto diseñar y poner en práctica situaciones problema que permitan que el conocimiento trigonométrico sea puesto en práctica y así verificar y constatar las teorías didácticas en torno al aprendizaje del pensamiento trigonométrico.

2.2. DIMENSIÓN CURRICULAR

En este apartado se tendrán como referente el currículo nacional colombiano establecido legalmente en los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional.

Es importante indicar que los currículos propios de la Institución Educativa y aula de clase serán analizados en el momento previo de la aplicación de la secuencia didáctica.

2.2.1. La propuesta curricular en los Lineamientos

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) tienen una visión global e integral sobre el quehacer matemático dentro del aula y proponen organizar el currículo en tres grandes aspectos: **Los procesos generales** que están relacionados con el aprendizaje, tales como razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración; comparación y ejercitación de procedimientos. **Conocimientos básicos** que son propios de las matemáticas y que están organizados en cinco niveles de pensamiento: pensamiento numérico y los sistemas numéricos, pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas métricos, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. Por último, **el contexto** que son los ambientes que rodean el estudiante y el aprendizaje como los roles sociales, culturales, económicos entre otros.

En el presente trabajo se explicitan algunos procesos que son importantes para el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica, que permiten el paso de la razón a función trigonométrica. Dichos procesos son:

Resolución y planteamiento del problema, el cual permite que el estudiante alcance metas significativas en el proceso de construcción del conocimiento matemático (MEN, 1998, p. 76). Algunas de ellas son:

- Desarrollar habilidades para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas. (MEN, 1998, p. 76).

- Provocar procesos de investigación que subyacen al razonamiento matemático, en este caso, a través de la formulación de conjeturas.

- Investigar comprensión de conceptos y procesos matemáticos a través de traducción entre distintas formas de representación, identificación de propiedades y el reconocimiento de condiciones, ejecución eficiente de procesos y verificación de resultados de un proceso.

Razonamiento: el cual se entiende como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión (MEN, 1998, p. 77). Lo cual implica que el estudiante está en la capacidad de:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.

- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Comunicación: Este proceso juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. (NTCM, 1989 Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, citada en MEN 1998, p95). La comunicación debe permitir que los estudiantes:

- Adquieran seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.

- Hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.

- Frecuentemente estén pasando del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología.

Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: El aprendizaje de procedimientos o "modos de saber hacer" es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

Los procesos descritos anteriormente se deben tener en cuenta en el momento del diseño de una secuencia didáctica pues se busca en los estudiantes potenciar su pensamiento matemático a partir de actividades, como situaciones problema, donde provoquen en ellos procesos de investigación de patrones, que realicen comparaciones con sus pares, que puedan formular y demostrar hipótesis, entre otros. En particular una de las situaciones propuestas en este trabajo consiste en la resolución de un problema que conlleva a la construcción del concepto de razón trigonométrica donde los estudiantes deben dar cuenta de los fenómenos hallados en éste.

Así mismo, en el presente trabajo también se reflejan algunos de los conceptos matemáticos presentes en Los Lineamientos, principalmente, el pensamiento espacial y sistema geométrico y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

El pensamiento geométrico es considerado como el "conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a diversas representaciones materiales." (MEN, 1998. P. 61)

Dentro de este proyecto se busca deducir las características del lugar geométrico que tiene la función seno y su carácter transformacional. En los Lineamientos también se expone que la construcción de los sistemas geométricos se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que va de lo intuitivo a lo conceptual o abstracto.

De alguna manera la manipulación del objeto matemático utilizando un ambiente interactivo de geometría dinámica como Geogebra permite visualizar las transformaciones para el caso del seno utilizando el cambio en los parámetros lo cual se relaciona con el pensamiento variacional.

En lo que al pensamiento variacional respecta, este está ligado con el estudio de patrones, estructuras y regularidades, donde los estudiantes puedan describirlos como relaciones o reglas generales y así explicar su razonamiento empleando justificaciones y demostraciones matemáticas.

El estudio de la variación debe iniciar desde temprana edad escolar con el estudio de regularidades y la detección de criterios que las rigen, donde puedan ser modelados a través de situaciones problemas cuyos escenarios sean referidos a los fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

A partir de lo anterior se evidencia la importancia que Los Lineamientos Curriculares le otorgan al pensamiento variacional como potenciador del pensamiento matemático, concluyendo que para lograr una aprehensión del concepto de función trigonométrica seno es necesario determinar que los estudiantes puedan reconocer cuáles son las variables que cambian y cuáles son las que permanecen constantes, cuáles son las variables que intervienen y la posible relacion que hay entre ellas, es así como la relaciones entre el seno geométrico y el seno algebraico toman un significado de vital importancia para el desarrollo del pensamiento variacional.

Estos procesos descritos se especifican o profundizan de manera posterior en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) guardando una coherencia teórica; en la propuesta de los Estándares se enuncia un aprendizaje desarrollado a través de competencias, mediado por diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas, donde los procesos generales son esenciales.

A continuación, se presentan los Estándares Básicos de Competencia Matemática relacionados con los pensamientos variacional y espacial y con las funciones trigonométricas.

2.2.2. Razones y funciones trigonométricas en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional

Este documento sigue la propuesta de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) pero se especifican los niveles de alcance de los cinco (5) tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, además se organizan por conjunto de grados. En lo que respecta a las razones trigonométricas no está detallada como tal, porque el marco teórico del currículo mencionado gira alrededor de las competencias matemáticas y no de los contenidos, por eso es necesario inferir en qué tipo de pensamiento y ciclos están inmersos estos conceptos. Sin embargo, para las funciones trigonométricas sí se hacen explícitos estándares dentro de los Pensamientos Espacial y Variacional.

A continuación se detallan los estándares que hacen referencia a las razones trigonométricas, esta tabla se elaboró escogiendo aquellos que aluden implícitamente este concepto. En cada conjunto de grados se establecieron detallando además al tipo de pensamiento al que pertenecen.

Grados	Pensamiento Espacial	Pensamiento Métrico	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos
4° a 5°	Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo a sus componentes (ángulos y vértices) y características. Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámica.		
6° a 7°		Diferencio y ordeno en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficie, dados volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes: pesos y masa de cuerpos solidos; duración de eventos o procesos amplitud de ángulos	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciónes) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y de arte
10° a 11°			Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas superficies, volúmenes y ángulos con de niveles de precisión apropiados.

Tabla 1 Estándares identificados en la construcción del concepto de razones trigonométricas.

Los Estándares Curriculares expuestos en la anterior tabla, direccionan la manera de construir el concepto de razón trigonométrica, esto se puede evidenciar por la forma en que se presenta los procesos de forma específica desde los primeros grados de escolaridad permitiendo aspectos de comparación, representación y uso de medidas en los triángulos y circunferencias, en el caso de la secuencia se aborda desde la relación entre los lados de un triángulo, los ángulos, la longitud de arco, la semejanza de triángulos.

En la tabla 2 se detallan los estándares que hacen referencia a las funciones trigonométricas.

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos
Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas	Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Tabla 2. Estándares de Competencia en Matemáticas para las funciones trigonométricas. Nivel: de décimo a undécimo.

Los Estándares Curriculares expuestos en la anterior tabla, sugieren contextualizar la variación de las funciones trigonométricas a través de fenómenos periódicos tales como las vibraciones de cuerda, oscilaciones de péndulos, movimientos amortiguados, entre otros, donde estas juegan un papel fundamental en la construcción de dichos objetos; esto quiere decir que el concepto de función trigonométrica no solamente debe ser tratado en el aula de manera aislada sino que haya una transversalidad con fenómenos tangibles asociados a este.

Ello no resta importancia a las múltiples formas de acercarse a las funciones trigonométricas como el uso del círculo unitario donde investigadores como Webber (2005) han encontrado resultados positivos. De hecho, una de las situaciones realizadas en el presente trabajo se usa el círculo unitario como objeto matemático para la aprehensión del concepto de función.

2.3. DIMENSIÓN MATEMÁTICA

El estudio de las razones y funciones trigonométricas han sido tratados de muchas maneras, Apostol (1980) realiza construcciones geométricas mientras que otros autores como Spivak (2003) realiza construcciones analíticas. Sin embargo, teniendo en cuenta la problemática a tratar en este trabajo de grado se ha decidido analizar la aproximación que se realiza en el libro de Precálculo (Stewart, 2009) porque aborda los dos conceptos separados pero idénticos a la vez.

2.3.1. Precálculo (Stewart, 2009)

El libro de Precálculo está divido en XI capítulos, y en los capítulos V y VI hacen referencia a las funciones trigonométricas de los números reales y funciones trigonométricas de ángulos respectivamente. Estos capítulos serán analizados para comprender el estudio y la aplicación de la trigonometría en la construcción de la secuencia didáctica.

Para Stewart (2009), la trigonometría puede estudiarse desde dos maneras diferentes pero equivalentes, desde una perspectiva de funciones en número reales (funciones trigonométricas) y desde una perspectiva de funciones de ángulos (razones trigonométricas). Sus estudios son idénticos: asignan el mismo valor a un número real dado (en el segundo caso, el número real es la medida de un ángulo). La diferencia radica en las aplicaciones que ambas tienen, pues mientras una se presta para *procesos dinámicos* como el movimiento armónico, el estudio de las ondas sonoras y descripción de otros fenómenos que impliquen movimiento, la trigonometría de ángulos tiene un *enfoque más estático*, es decir, sus aplicaciones son de medición de fuerzas, alturas, ángulos de depresión, ángulos de elevación entre otros.

De hecho, su estudio se puede iniciar desde cualquier perspectiva y los capítulos a los que se ha hecho referencia anteriormente permiten que cualquiera de los dos procedimientos pueda ser iniciado primero.

2.3.1.1. Funciones trigonométricas de números reales

Este capítulo inicia con la descripción del círculo unitario, centrado en el origen del plano cartesiano y de radio $r = 1$. Donde su ecuación corresponde a:

$$x^2 + y^2 = 1$$

A continuación, Stewart (2009) define el concepto de **punto terminal** en el círculo unitario como aquella distancia $t, t \in \Re$ alrededor del círculo iniciando desde el punto de coordenadas (1,0). Si se mueve en el sentido contrario a las manecillas del reloj entonces t será positivo $t > 0$, análogamente si se mueve en el sentido de las manecillas del reloj entonces t será negativo $t < 0$

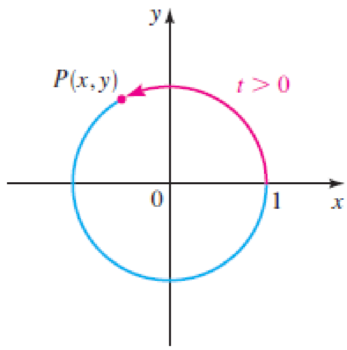


Figura 2. El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$.

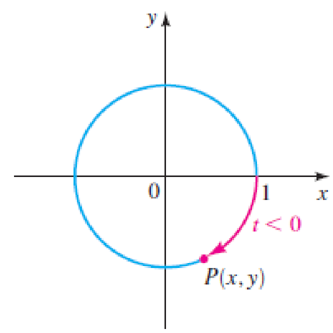


Figura 3. El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$.

Puesto que el perímetro de una circunferencia unitaria C es 2π, entonces si las coordenadas del punto P están en la intersección de la circunferencia con los ejes entonces t toma los siguientes valores.

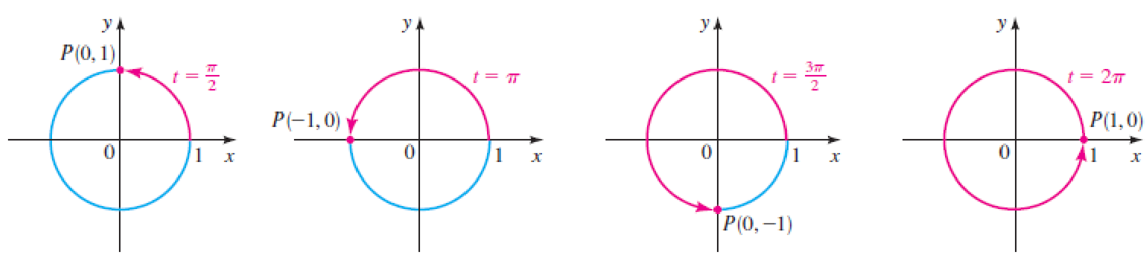


Figura 4. Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π.

A partir de esto, se puede observar que diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal.

Para algunas distancias especiales de t como $t = \pi/4$, $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ las coordenadas del punto terminal se pueden determinar utilizando propiedades analíticas como simetrías, ecuación de la recta $y = x$ y distancia de segmentos entre otras. Stewart (2009) demuestra que las coordenadas del punto terminal para $t = \pi/4$ es $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y deja como ejercicios al lector demostrar las coordenadas de los puntos terminales para las distancias $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$.

La siguiente tabla muestra los puntos terminales para las distancias t anteriormente mencionadas.

t	**Punto terminal determinado por t**
0	$(1,0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$

Tabla 3. Puntos terminales para algunos valores de t.

Para poder determinar las coordenadas de un punto P determinado por un valor $t > \pi/2$ Stewart (2009) se basa en la definición de **número de referencia**, en la que asocia a $\bar{t}$ con t y donde $\bar{t}$ es la distancia más corta al eje X a lo largo del círculo unitario.

La figura 6 muestra que para obtener el número de referencia $\bar{t}$ es útil saber en qué cuadrante se encuentra el punto terminal determinado por P.

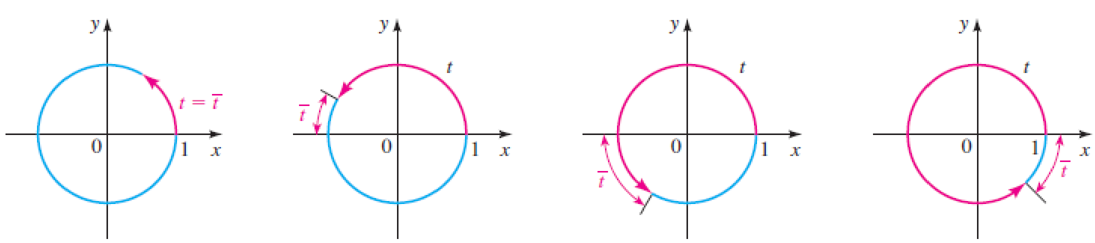


Figura 5. El número de referencia $\bar{t}$ para t.

Posteriormente, Stewart (2009) orienta la manera de usar los números de referencia para encontrar los puntos terminales determinados por aquellos valores de t donde t es múltiplo de $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$.

Este análisis es interesante desde varios aspectos, el primero de ellos se debe a que el estudiante puede observar que hay una correspondencia única entre un valor t y el punto terminal determinado por él, esto es, hay una relación entre t y el punto de coordenadas (x, y). Por otro lado, se puede establecer que para los valores $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ estos se relacionan con un mismo punto terminal (x, y), esto se debe a que la distancia t mide la longitud del círculo unitario y t puede realizar más de un giro completo. Lo anterior es un indicador de que la relación así establecida es una función y además cumple con un patrón de periodicidad para el caso de la función seno.

Este ejercicio, el de asignar la longitud de arco t a una coordenada (x, y) puede ser implementando en una actividad de la secuencia didáctica a diseñar en Geogebra, permitiendo así, que el estudiante pueda observar el concepto de función y de periocidad.

En seguida, Stewart (2009) define función como una regla que asigna a cada número real otro número real, en base a esto, define la **función trigonométrica seno** como la asignación del número real t a la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$. Posteriormente, se establecen las características de la función seno como el dominio, signos, gráfica, propiedades de par e impar, periodo entre otras.

Para evaluar las funciones trigonométricas, Stewart se basa en los números de referencia siempre y cuando el valor de t sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. Sin embargo, si se desea calcular el valor de un t no múltiplo de los anteriores (por ejemplo $\operatorname{sen} 1.5$) entonces se puede proceder de dos maneras, la primera (no recomendada) medir cuidadosamente una longitud de arco de 1.5 en el círculo unitario a partir del punto (1,0) y leer su correspondiente valor y en el punto terminal, y la segunda opción es utilizar el método numérico del seno, que consiste en una aproximación del valor de la función.

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

Este método numérico está inmerso en las calculadoras científicas y se puede usar siempre y cuando el modo de la calculadora está en radianes.

Dicho esto, Stewart (2009) termina el capítulo con algunas propiedades de identidades fundamentales y las gráficas de las funciones trigonométricas.

2.3.1.2. Funciones trigonométricas de ángulos

Este capítulo inicia con la definición de ángulos y su medición, dejando claro que existen dos formas diferentes de medir su "abertura", una de ellas es el **grado** y la otra es el **radián.** Posteriormente establece la relación entre las medidas de ángulos en grados y radianes.

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

A continuación Stewart (2009) define lo que es un **ángulo en posición normal** como aquél ángulo medido desde el origen y su lado inicial sobre el eje x positivo. La siguiente figura da ejemplos de ángulos en posición normal.

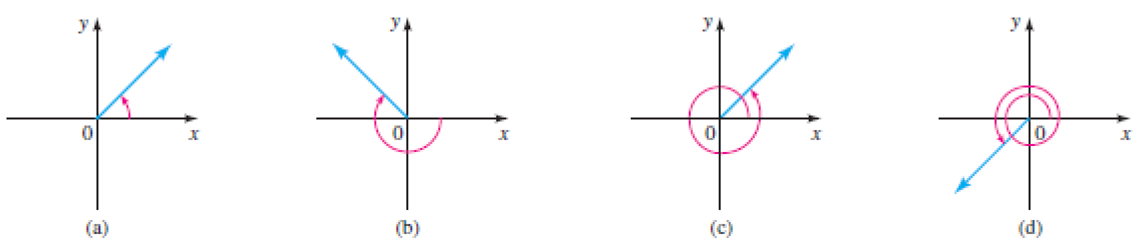


Figura 6. Ángulos en posición normal.

Posteriormente, se especifica que aquellos ángulos en posición normal o estándar se denominan coterminales si sus lados coinciden, esto es, si un ángulo θ mide 30° entonces será coterminal con $390°, 750°, -330°$ etc, en general, para un ángulo cualquiera θ medido en grados será coterminal con todos aquellos ángulos de la forma:

$$\theta + n360°, n \in \mathbb{Z}$$

Análogamente, si el ángulo θ está medido en radianes entonces será coterminal con todos los ángulos de la forma:

$$\theta + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Dicho esto, se plantean algunos ejercicios para hallar ángulos coterminales medidos tanto en grados como en radianes, asimismo las definiciones de longitud de arco, área de un sector circular y las aplicaciones de dichos conceptos.

En seguida Stewart (2009) en un apartado denominado *trigonometría de los triángulos rectángulos* define las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo que tiene θ como uno de sus ángulos agudos de la siguiente manera[1].

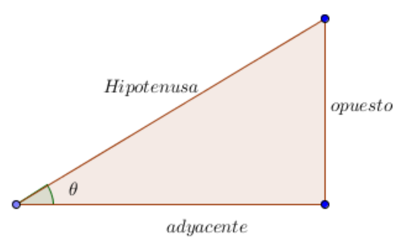


Figura 7. Lados del triángulo rectángulo.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

El símbolo sen es la abreviatura del nombre de la razón seno.

Puesto que para cualquier par de triángulos rectángulos con un ángulo θ son semejantes, estas razones son iguales, independientemente del tamaño del triángulo; solo depende del ángulo θ. En seguida, Stewart (2009) habla de los triángulos especiales para calcular el valor de la razón seno para algunos ángulos, dichos ángulos son: $30°, 45°$ y $60°$; o de manera equivalente $\pi/6, \pi/4$ y $\pi/3$.

[1] Para efectos del presente trabajo solo se evidencia la definición de la razón seno

Para determinar el valor de la razón seno del ángulo de 45°, Stewart (2009), se basa en utilizar un cuadrado de lado 1, traza una de las diagonales del cuadrado formando así un triángulo rectángulo, en donde el valor de la hipotenusa lo determina con ayuda del teorema de Pitágoras; para hallar el valor de la razón seno para los ángulos de 30° y 60°, parte de un triángulo equilátero ABC de lado 2 y traza la bisectriz perpendicular BD al segmento opuesto del vértice, formando así dos triángulos rectángulos congruentes y al igual que el caso anterior se apoya en el teorema de Pitágoras para determinar el lado faltante del triángulo rectángulo.

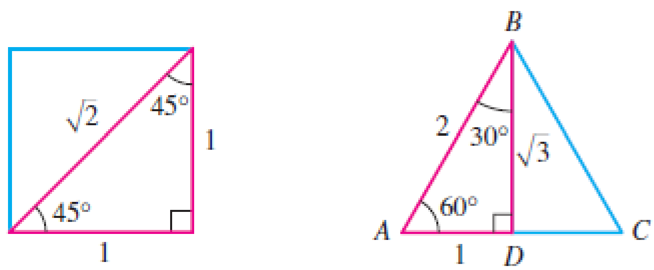


Figura 8. Seno para los ángulos 45°, 30° y 60°.

A continuación se presenta la tabla de los valores de la razón seno para los ángulos anteriormente mencionados.

θ en grados	θ en radianes	sen θ
30°	$\pi/6$	½
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$

Tabla 4 Valores del seno para ángulos especiales.

Stewart (2009) establece una diferencia entre sen 1 **y** sen 1° , el primero hace referencia al *seno de un ángulo cuya medida en radianes es 1 mientras que el segundo es el seno de un ángulo cuya abertura es 1°.*

Dicho esto, las siguientes páginas muestran las aplicaciones de las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos y su utilidad en el cálculo de alturas, sombras, ángulos de elevación y depresión, entre otras.

En este punto, se evidencia que el uso de las razones trigonométricas es de orden estático o invariante y por lo tanto, su análisis no contribuye a los objetivos del presente trabajo. Para lograr esto, se deben extender las razones trigonométricas *a funciones trigonométricas de ángulos* donde se puedan observar la variabilidad del ángulo y su relación con las *funciones trigonométricas de números reales*. Stewart (2009) da una solución a esta dicotomía cuando ***traslada*** el triángulo rectángulo al plano cartesiano como se muestra en la siguiente figura.

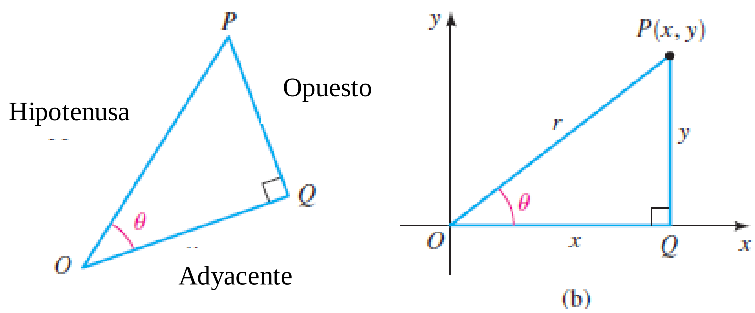


Figura 9. Traslado del triángulo rectángulo al plano cartesiano.

Ahora, el punto P tiene coordenadas $P = (x, y)$ y es un punto en el lado terminal del ángulo θ. Entonces el lado opuesto del triángulo rectángulo tiene longitud y. Usando el teorema de Pitágoras se puede hallar la longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, así el seno del ángulo queda definido por:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

Para Stewart, *"es un hecho vital que los valores de las funciones trigonométricas no dependen de la elección del punto $P(x, y)$. Esto se debe a que si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto del lado terminal, como se ve en la figura 11, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son triángulos semejantes"*.

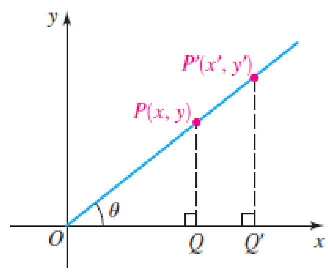


Figura 10 Semejanza de triángulos para las funciones trigonométricas de ángulos.

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos θ en posición estándar no agudos, Stewart (2009) se basa en la definición de **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$, como aquel ángulo agudo formado por θ y el eje X. la figura 12 muestra que para obtener el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ es útil saber en qué cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo θ.

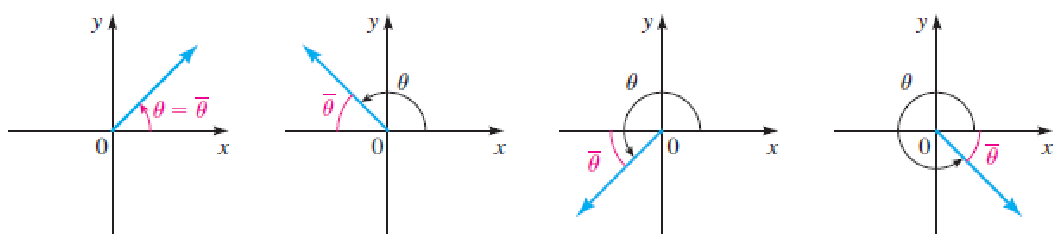


Figura 11. Ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ.

De esta manera, se pueden hallar los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo $\bar{\theta}$ simplemente determinando su ángulo de referencias $\bar{\theta}$ y teniendo en cuenta el signo de la función trigonométrica.

2.3.1.3. Relación entre las funciones trigonométricas de números reales y funciones trigonométricas de ángulos

Iniciar con el estudio de la trigonometría desde los ángulos o desde los números reales depende de las aplicaciones y la visión que se quiera dar en una clase de matemáticas, sin embargo ambas son equivalentes y su relación es bastante estrecha. Stewart (2009) describe la forma en que una se relaciona con otra.

“Iniciamos con un triángulo rectángulo $\triangle OPQ$ donde se traslada al plano cartesiano con el ángulo θ en posición normal.

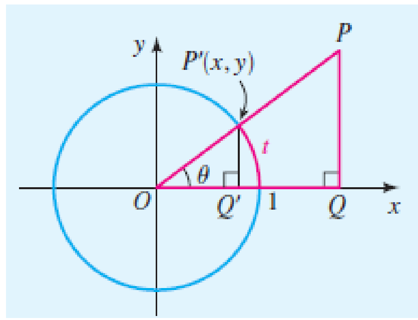


Figura 12. Triángulo rectángulo ubicado en el plano.

El punto $P'(x, y)$ en la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Note que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyas longitudes son x e y.

Ahora, por definición de funciones trigonométricas de ángulos tenemos:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{op}{hip} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'} = \frac{y}{1} = y$$

Por otra parte, por definición de funciones trigonométricas de números reales tenemos que:

$$\text{sen}\ t = y\text{”}$$

Ahora, si θ es medido en radianes, entonces $\theta = t$ y así las funciones trigonométricas de ángulos con medida en radian son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidos en términos de un punto terminal determinado por un número real t” (P.p. 409). Esto significa que si comparamos las dos maneras de definir las funciones trigonométricas entonces da valores idénticos, en otras palabras, consideradas como funciones que asignan valores idénticos a un número real dado. El número real es la medición en radianes de θ en un caso o la longitud de un arco de círculo en el otro.

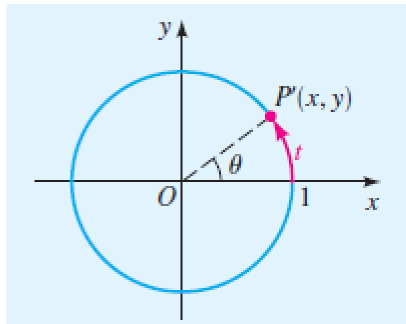


Figura 13. La medida del radián del ángulo θ es t.

Una visión desde esta perspectiva cambia el modelo tradicional que se suele trabajar en el aula de clase, porque no se considera el círculo unitario con las líneas trigonométricas para el cambio de un concepto al otro, sino que se estudia y se muestran las relaciones subyacentes entre el ángulo y el radián. Además, la razón trigonométrica se puede extender para triángulos no necesariamente agudos con el uso de las funciones trigonométricas de ángulos haciendo que sea posible su análisis y posteriores aplicaciones.

Por otra parte, es fundamental el aporte que hace al autor al afirmar que son las necesidades, los intereses y las visiones que tiene el maestro en la clase de matemáticas para guiar asimismo su discurso en la clase, el uso de las razones trigonométricas o funciones trigonométricas solo difiere, como ya se ha establecido antes, en su aplicación. Por tanto, se puede iniciar el estudio de la trigonometría con cualquiera de estos dos conceptos.

Para la consecución de los objetivos del presente trabajo, las situaciones propuestas iniciaron con las razones trigonométricas para luego dar paso a las funciones trigonométricas.

2.4. ALGUNOS REFERENTES METODOLÓGICOS

2.4.1. INGENIERÍA DIDÁCTICA

La Ingeniería Didáctica surge en los años 80's en la Didáctica de la escuela francesa como una metodología de investigación para realizar seguimientos a los hallazgos de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brosseau, 1997). Su sustento teórico también proviene de la Teoría de Transposición Didáctica (Chevallard, 1998), que tiene una visión sistémica al considerar a la Didáctica de las Matemáticas como el estudio de las interacciones que surgen entre un saber, un sistema educativo y un estudiante, con el objetivo de optimizar los modos de apropiación de este por el sujeto. Artigue (1995) hace una la analogía de la Ingeniería Didáctica con la de un ingeniero en el que para un hacer proyecto determinado, éste se debe basar en los conocimientos propios de su dominio y someterse después a un control científico, asimismo sucede con el trabajo en la Ingeniería Didáctica, en el que se debe trabajar con diferentes objetos matemáticos y teorías matemáticas para abordar un problema que, posteriormente, llevan a realizar conclusiones y reflexiones finales frente a los resultados obtenidos.

Por otra parte, Douday (1996) define a la Ingeniería Didáctica como un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente para efectuar un proyecto de aprendizaje. Es por ello, que ésta mirada metodológica es la que más se acopla a los intereses de este trabajo en el que, mediante una serie de tareas o actividades, se realiza un producto resultado de los análisis *a priori* y los análisis *a posteriori* para así determinar el impacto y la viabilidad de la secuencia didáctica en el aula.

El término de Ingeniería Didáctica se utiliza en Didáctica de las matemáticas como una doble función: como metodología de la investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases. Por tanto, para efectos del presente trabajo, éste se enfocó en las características generales de esta última, sin embargo también tomó elementos que son esenciales de la metodología de investigación.

2.4.1.1. *La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación*

Artigue (1995) caracteriza la Ingeniería Didáctica como un esquema experimental basado en realizaciones didácticas, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen dos niveles: el de *micro-ingeniería* donde se toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos del aula y el de la *macro-ingeniería* que es la que permite componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con la de fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Para efectos del presente trabajo, éste se basó fundamentalmente en el nivel de micro-ingeniería debido a que los objetivos a que se apuntan son los fenómenos que subyacen en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la trigonometría analizados desde una secuencia didáctica, por ello se sustenta bajo las diferentes fases de análisis de la metodología de las que Artigue (1995) hace referencia.

Fases de la metodología de la Ingeniería didáctica:

En el desarrollo de la Ingeniería Didáctica, ésta consta de cuatro (4) fases:

1. Primera fase: Análisis preliminares.
2. Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y evaluación.

Fase 1: Análisis preliminares: Estos hacen referencia a los análisis teóricos que, en general, están sobre el objeto matemático estudiado y que están relacionados con él. Aquí se identifican como los análisis preliminares más frecuentes los siguientes:

- Análisis epistemológicos de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

De los anteriores elementos se tomarán en cuenta algunos de ellos, apoyados en los objetivos, los alcances y las limitaciones de la investigación, como el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución y el análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

Para el caso del presente trabajo, los capítulos I y II obedecen a un *acercamiento* al análisis preliminar del objeto matemático en cuestión, en el marco teórico se indicó los aspectos concernientes a el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, errores y dificultades de los estudiantes.

Fase 2: La concepción y el análisis *a priori*: En esta fase se construye la secuencia didáctica y se realizan los respectivos análisis *a priori* que son conjuntos de hipótesis que los estudiantes pueden tener respecto al objeto matemático, estos análisis deben comprender una parte descriptiva y una parte predictiva.

Fase 3: Experimentación: Se refiere a la puesta en escena de la Situación Didáctica con un grupo o población de estudiantes, es aquí donde se da un primer contacto entre el investigador o el observador con ellos. En esta fase se deben explicitar los objetivos y condiciones de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación y asimismo establecer un contrato didáctico con ellos, entendiéndose contrato didáctico como aquellas normas explicitas e implícitas y los hábitos específicos esperados por el docente y los estudiantes en situaciones de enseñanza y aprendizaje. Se deben tener registros de observaciones fílmicas, gráficas o sonoras realizadas durante la experimentación, con el objetivo de realizar de una manera más detallada las respectivas comparaciones con los resultado esperados.

Fase 4: Análisis *a posteriori* y evaluación: Es la última fase de la Ingeniería Didáctica, se basa en el análisis del conjunto de datos recolectados durante el proceso de la experimentación. Estos datos se pueden complementar con otros externos como cuestionarios o entrevistas realizadas durante el proceso de experimentación. La validación o refutación de las hipótesis realizadas en el proceso de la fase de concepción y análisis *a priori* son confrontadas aquí. Según Artigue (1998) dicha confrontación permite la aparición de distorsiones y que, generalmente, no suelen analizarse en términos de validación.

Las cuatro (4) fases descritas anteriormente son la carta de navegación que dirección este trabajo. Como se nombró anteriormente, la fase 1 *Análisis preliminares* se puede evidenciar en los capítulos I y II llamados Generalidades y Marco Teórico respectivamente. La fase 2, 3 y 4 *Concepción y análisis a priori, Experimentación* y *Análisis a posteriori* hacen parte del capítulo IV llamado Diseño, Aplicación y Análisis de Resultados del trabajo.

Es necesario aclarar que el énfasis de este trabajo más que la realización de una micro-ingeniería, simplemente, es tomar en consideración los elementos pertinentes de este enfoque metodológico, con el fin de diseñar, poner en escena y analizar la situación didáctica.

CAPITULO III

DE LAS RAZONES A LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL AULA

3. DE LAS RAZONES A LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL AULA

3.1. IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este capítulo se ponen de manifiesto todas las condiciones en las que se desarrolla el trabajo de campo, es decir, desde la concepción de la secuencia didáctica hasta la aplicación y los análisis que son objeto de estudio.

Para ello, primero se contextualiza el lugar donde se llevó a cabo la situación didáctica, como el colegio, el tiempo de aplicación, el número de estudiantes, entre otros. Posteriormente se muestra la situación didáctica y su análisis, este se presenta seccionado en dos partes, un análisis hecho antes de la aplicación de la situación, que se denomina análisis *a priori*, el cual consiste en determinar las expectativas en cuando al desarrollo de las actividades y las posibles respuestas por parte de los estudiantes. Luego se realiza el análisis *a posteriori*, que será el análisis de los resultados finales de la actividad, en este último se comparan los dos análisis para contrastar las posibles diferencias.

3.2. MARCO CONTEXTUAL

La secuencia didáctica se llevó a cabo en la Institución Liceo Los Alpes, ubicada en el norte de la ciudad de Cali, de carácter privado, manejando niveles educativos desde prescolar hasta bachillerato.

El Liceo Los Alpes tiene una pedagogía constructiva, ofrece el Bachillerato Internacional IB a sus estudiantes, el cual está divido de la siguiente manera: Programa de la Escuela Primaria (PEP), Programa de los Años Intermedios (PAI) y Programa del Diploma (PD). En la actualidad busca acreditarse en el Programa del Diploma para ofrecer una educación de alta calidad y convertirse en uno de los pocos colegios de la ciudad de Cali con contar con la acreditación de los tres (3) programas ofrecidos por el International Baccaulaureate IB.

Además, también se encuentra ceñido a las políticas nacionales del Ministerio de Educación Nacional MEN, por tanto el plan de aula cuenta con todos los componentes necesarios articulados desde la educación básica hasta la educación media vocacional.

3.3. DISEÑO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Con el objetivo de articular la secuencia didáctica con los referentes teóricos desarrollados anteriormente, donde se busca potenciar el desarrollo del pensamiento trigonométrico, se presenta las siguientes actividades que busca movilizar en estudiantes de grados décimo elementos conceptuales tanto de variación como de geometría para el caso de la función seno.

La primera actividad es adoptada y adaptada de Vohns (2006) citado en Montiel (2013) donde se modela una situación problema y se extiende hasta la variación del seno trigonométrico.

La primera tabla muestra el resumen de la Situación 1 y las actividades que hacen parte de ella.

<table>
<tr><th colspan="4">SITUACIÓN 1</th></tr>
<tr><td>Nombre Situación</td><td>Distancia entre dos personas</td><td colspan="2">Número de preguntas por actividad</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Número de actividades</td><td rowspan="4">4</td><td>Actividad 1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Actividad 2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Actividad 3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Actividad 4</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo o propósito
Reconocer el patrón que emerge en un triángulo a partir de una situación problema</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descripción de la tarea
Mediante la generalización de un caso se pretende potenciar las características geométricas y variacionales en un triángulo, para ello se proponen 4 actividades en que los estudiantes deben además de inferir explicar los resultados hallados. El dinamismo del programa Geogebra permite que los estudiantes puedan corroborar sus resultados para diferentes medidas de las longitudes de los lados del triángulo.</td></tr>
</table>

Tabla 5 Situación 1.

La tabla 7 muestra el resumen de la Situación 2 y las actividades que hacen parte de ella, asimismo la tabla 8 muestra la Situación 3 con sus respectivas actividades.

<table>
<tr><th colspan="4">SITUACIÓN 2</th></tr>
<tr><td>Nombre Situación</td><td>Explorando el círculo unitario</td><td colspan="2">Número de preguntas por actividad</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Número de actividades</td><td rowspan="4">4</td><td>Actividad 1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Actividad 2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Actividad 3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Actividad 4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo o propósito
Relacionar la longitud de arco con la coordenada y del punto de referencia</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descripción de la tarea
Mediante el uso de Geogebra se explora los atributos que tiene el círculo trigonométrico como la longitud de arco medida desde el punto (1,0) hasta un punto arbitrario (x, y) y la relación entre longitud de arco y la coordenada y de dicho punto.</td></tr>
</table>

Tabla 6. Situación 2.

3.4. LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Para el diseño de la secuencia didáctica se ha considerado la coherencia entre los objetos matemáticos a ser movilizados y la intencionalidad que tienen en el momento de ser puestos en práctica, como la potencialidad del conocimiento matemático, describir patrones como reglas generales y el reconocimiento de parámetros de comportamiento algebraico en una función, tal como lo describe los Lineamientos Curriculares expuestos anteriormente.

A continuación se muestran las actividades de las secuencias didácticas y los contenidos matemáticos involucrados en ellas.

3.4.1. Situación 1: Distancia entre dos personas

Contenidos matemáticos involucrados

La Situación 1 contiene un conjunto de actividades que son muy ricas en contenidos geométricos tales como circunferencias, segmentos de recta, semirrectas, bisectrices, intersección de puntos, distancia entre puntos, ángulo central entre otros, que son propios de las construcciones geométricas, sin embargo es la manipulación que se hace con los objetos en Geogebra lo que permite que las actividades se tornen diferentes a las tradicionales, porque son necesarios los conceptos de semejanza de triángulos, razones y proporciones y el teorema de Thales para dar cuenta de las preguntas formuladas en cada actividad y así alcanzar el objetivo de la situación.

Aquí es necesario aclarar sobre los conceptos previos que debe tener el estudiante y los conceptos que pueden emerger al momento de poner en práctica la situación, por ejemplo un concepto previo es el de Teorema de Pitágoras pero un concepto que puede ser estudiado con más profundidad y detalle es el de semejanza de triángulos o el de razones y proporciones, porque emerge al momento de realizar las primeras actividades. Aun así, también es probable que el estudiante sepa con anterioridad, o al menos haya estudiado previamente, dichos conceptos y a partir de las situaciones puestas en práctica podrían ser estudiadas con mayor profundidad.

Actividad 1

Alicia y Beto están en un parque en distintos lugares, pero separados a la misma distancia de la iglesia (12 m).

1. Realiza diferentes gráficos en que se muestren las posibles posiciones.
2. ¿Qué posiciones permiten obtener la distancia entre ellos con cálculos aritméticos y por qué?

Actividad 2

Para generalizar todos los casos donde Alicia y Beto se puedan encontrar necesitamos variar sus posiciones. Por ejemplo, un círculo con centro en la iglesia, radio 12m y Alicia y Beto situados sobre él permitiría explorar todas las posibles situaciones.

Realiza los siguientes pasos:

a. Con ayuda del programa Geogebra muestra las posiciones posibles de Alicia y Beto, recuerda que el radio del círculo debe ser de 12 unidades. Renombra el centro de la circunferencia con la letra I (iglesia) y los puntos sobre la circunferencia con las letras A (Alicia) y B (Beto).

b. Forma el triángulo AIB por medio de segmentos, halla la distancia entre los puntos A y B. Asimismo, halla el ángulo que se forma entre ellos y la iglesia. Como se muestra en la figura 1

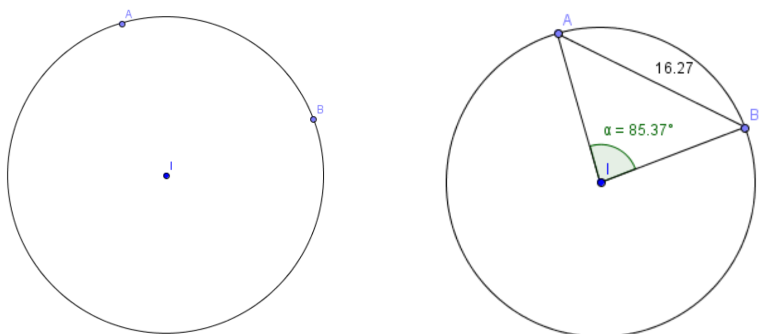


Figura 1

Completa la tabla 1:

Ángulo	**Distancia entre Alicia y Beto**
10°	2.09m
20°	
	6.3m
15°	
60°	

Tabla 1

1. ¿Qué relación encuentras entre los ángulos y las distancias entre Alicia y Beto? ¿Cómo es esta relación? Puedes confirmar tus hallazgos calculando más ángulos o distancias.

2. Si los ángulos son mayores a 180°, por ejemplo 200° o 300°, ¿su distancia es igual para qué ángulos menores que 180°? ¿existe alguna relación para iguales distancias con ángulos mayores que 180° y menores que 180°? ¿Qué tipo de relación es?

Actividad 3

Si la distancia entre la iglesia y la pareja de amigos aumenta o disminuye, esto es supongamos que en lugar de 12m sea de 24m o 6m ¿Qué relación existe entre la nueva distancia de Alicia y Beto a la inicial? Para ayudarte a contestar esta pregunta, se te dará el archivo 1 en Geogebra como el que se muestra en la Figura 2 que contiene la construcción para diferentes distancias en las que pueden estar Alicia (punto A) y Beto (punto B). Las distancias mostradas son las siguientes: radio 6 cm, 12 cm, 18cm, 24cm.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

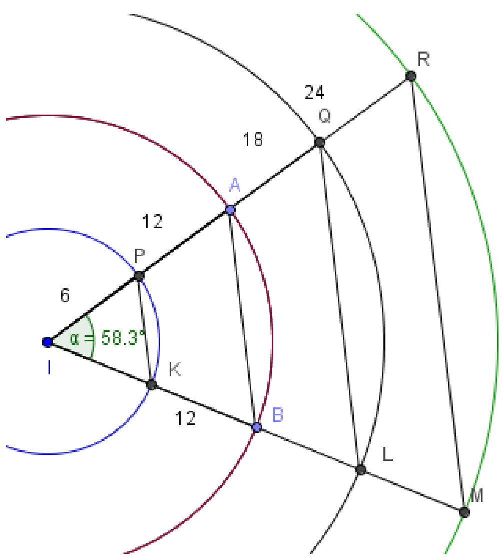


Figura 2

Dejando el ángulo α constante completa la tabla 2:

	Distancia de los Segmentos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
Círculo 4			

Tabla 2

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

1. ¿Qué relación existe entre las nuevas distancias de Alicia y Beto a la distancia inicial (12m)? ¿cómo es esta relación?
2. En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?
3. Repite el paso 2 para cualquier ángulo α. ¿Qué concluyes?

Actividad 4

A continuación se dará el archivo 2 en Geogebra que contiene la construcción anterior y la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB tal como lo muestra la figura 3

> Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz es perpendicular y divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice.

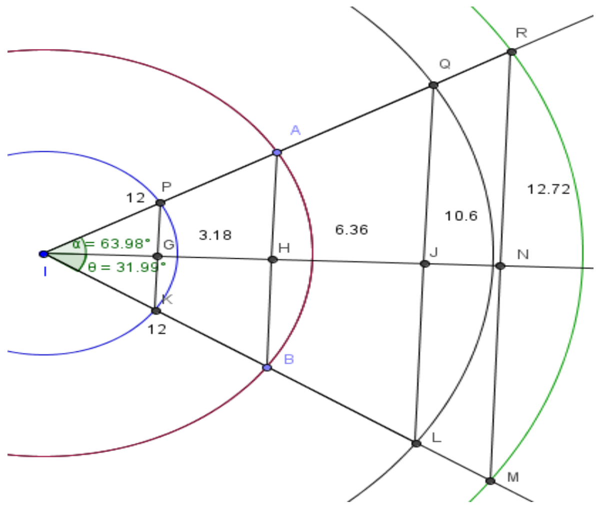


Figura 3

En el archivo 2 de Geogebra contiene las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la tabla 3:

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
Círculo 4			

Tabla 3

1. ¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

2. ¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿a qué crees que se deba esto?

3. En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

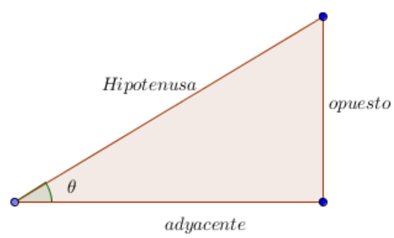
Uso de la calculadora

Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para los ángulos empleados en la tabla anterior.

4. ¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor.

5. En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

6. Usa el siguiente triángulo y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa.

7. ¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?

3.4.2. Situación 2: Explorando el círculo unitario

Contenidos matemáticos involucrados

En la Situación 2 están inmersos los contenidos matemáticos tales como: circunferencia unitaria, longitud de arco, punto terminal, ángulo en radian y uno de los más significativos para los propósitos de la secuencia es el concepto de función. Para dar respuesta a las preguntas correspondientes a las actividades de esta situación es necesario que el estudiante tenga una idea general del concepto de longitud de arco, en particular que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, es decir una vuelta completa; por lo tanto, si un punto sobre la circunferencia se desplaza un cuarto de vuelta, esta longitud de arco mide $\frac{\pi}{2}$, y de esa manera para cuando el punto se desplaza media vuelta o tres cuartos de vuelta la longitud de arco medirá respectivamente π y $\frac{3\pi}{2}$.

Además otro concepto previo que debe tener claro el estudiante es la equivalencia entre las medidas de ángulos en los sistemas sexagesimal y circular. Los conceptos como función y punto terminal emergen al momento de aplicar esta situación, por lo tanto pueden ser detallados con más profundidad con las preguntas de las actividades a realizar, y también se puede profundizar la equivalencia entre las medidas de ángulos anteriormente mencionadas.

Actividad 1

En la Situación 1 se estudió la razón seno como la relación de los lados de un triángulo rectángulo (cateto opuesto e hipotenusa) y el ángulo que estos conforman. En la segunda situación se estudiará un nuevo sistema de medición angular, el cual permite calcular el valor numérico del $\operatorname{sen}\sqrt{2}$, $\operatorname{sen} 0.79$ entre otros. Cabe aclarar que los números $\sqrt{2}$ y 0.79 son número reales y no hacen referencia a la abertura de un ángulo medido en grados.

1. **Medición en grados** Una vuelta completa de una circunferencia medida en grados equivale a 360°, a partir de este enunciado, responda explicitando el proceso realizado: A cuántos grados equivalen:
    a. Un doceavo de vuelta.
    b. Un octavo de vuelta.

c. Un sexto de vuelta.
d. Un cuarto de vuelta.

2. **Medición en radianes** La longitud de una circunferencia unitaria, es decir radio $r = 1$, mide 2π (para una circunferencia cualquiera de radio r su longitud es $2\pi r$). A partir de este enunciado halla la longitud de circunferencia para los siguientes ejercicios:
   a. Un doceavo de vuelta.
   b. Un octavo de vuelta.
   c. Un sexto de vuelta.
   d. Un cuarto de vuelta.

3. Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además establece una ecuación que te permita el paso de un sistema de medida a otro. ¿Cuál sería el valor de π medido en grados? De ejemplos que muestren el paso de un sistema a otro.

Actividad 2

A continuación se da el archivo 1 en Geogebra como lo muestra la figura 1 que contiene la construcción de la Actividad 2.

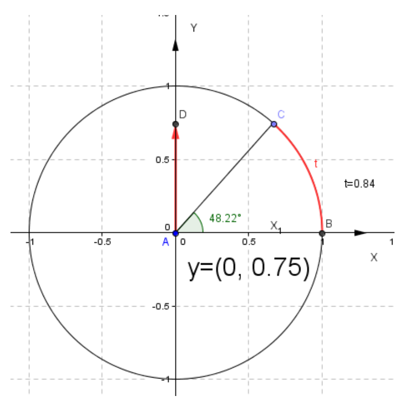


Figura 1

Deslice el punto C sobre la circunferencia (denominado punto terminal) en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener los siguientes grados, registre los valores en la tabla 1 y conteste las siguientes preguntas.

Grados	**Arco de circunferencia t**	**Medida en radián**	**Coordenada y del punto terminal**
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			

Tabla 1

1. Cuando se va a cambiar de grados a radianes, entonces el valor de π equivale a 180°, sin embargo en el sentido numérico π tiene una valor aproximado de 3.14. A partir de dicho valor y con la ayuda de la calculadora, expresa la medida del radian de los valores de la tabla, en un número real. ¿Qué relación encuentras entre estos valores y la medida del arco de circunferencia t?

2. Deslizando el punto C determina los valores de la coordenada $\boldsymbol{y}$ cuando t toma diferentes valores de la tabla 2:

Arco de circunferencia	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	3π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Coordenada y del punto terminal									

Tabla 2.

¿Cómo determinas la ubicación del arco de la circunferencia t?

Actividad 3 Número de referencia

Definición 1: Supongamos que t es un número real. El número de referencia $\tilde{t}$ asociado con t, es la distancia más corta, a lo largo del circulo unitario, entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

De acuerdo a la anterior definición, esboce un gráfico con lápiz y papel que represente, cuál sería la distancia de $\tilde{t}$, si el punto terminal t está en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante (emplea un gráfico para cada cuadrante).

Deslice el punto C sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener las medidas dadas en la tabla 3 y halle el valor de $\tilde{t}$ correspondiente

Arco de circunferencia t	2.09	2.35	2.62	3.14	3.66	3.93	4.19	4.71	5.23
Valor de $\tilde{t}$									

Arco de circunferencia t	5.49	5.76	6.28	6.8	7.07	7.33	7.85
Valor de $\tilde{t}$							

Tabla 3

1. ¿Cómo puedes determinar el valor de $\tilde{t}$?
2. ¿Qué relación encuentras con la tabla 1? ¿En qué se parece? ¿A qué crees que se deba esto?
3. Registra los valores hallados en la tabla 4 y desliza el punto C para encontrar el valor de la coordenada y.

Arco de circunferencia t	2.09	2.35	2.62	3.14	3.66	3.93	4.19	4.71	5.23

Coordenada y del punto terminal									

Arco de circunferencia t	5.49	5.76	6.28	6.8	7.07	7.33	7.85
Coordenada y del punto terminal							

Tabla 4.

4. ¿Qué relación encuentras con la tabla 1? ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Por qué crees que se deba esto?

Actividad 4

Uso de la calculadora

1. Con la ayuda de tu docente y el uso de la calculadora en modo radianes, verifica el seno trigonométrico del valor de la longitud de arco t y registra los valores en la tabla 5.

Arco de circunferencia t	2.09	2.35	2.62	3.14	3.66	3.93	4.19	4.71	5.23
Coordenada y del punto terminal									

Arco de circunferencia t	5.49	5.76	6.28	6.8	7.07	7.33	7.85
Coordenada y del punto terminal							

Tabla 5.

Compara estos resultados con los obtenidos en la coordenada y de la tabla 3. ¿Qué concluyes?

Nota: Debido a que el número π tiene infinitas cifras decimales, los resultados pueden estar por encima o por debajo una centésima del valor esperado.

Definición 1 Función (Stewart, 2009)**:** Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B $(f: A \to B)$ es una relación que asigna a todos los elementos de A un único elemento en B. Suele escribirse así:

$$y = f(x)$$

Donde x se llama variable independiente e y variable dependiente.

2. ¿De acuerdo a la actividad realizada, cuáles crees tú son las variables dependientes e independientes?

Se define función trigonométrica como la relación entre los valores de t y de y de la siguiente manera:

$$y = \operatorname{sen}(t)$$

Donde t es el valor de la longitud de arco y y la altura que alcanza:

3. ¿Cómo crees que es la gráfica de la función trigonométrica seno? Usa el plano cartesiano para dibujarla.

Definición 2 Dominio: El dominio de una función es el conjunto de todos los números reales que puede tomar la variable independiente.

Definición 3 Rango: El rango es el conjunto de números formado por todas las imágenes del dominio.

Definición 4 Periodo: Algunas funciones tienen la propiedad que sus imágenes se repiten exactamente en el mismo orden, a igual intervalos del dominio. Este tipo de funciones se denominan funciones periódicas.

4. A partir de las anteriores definiciones, halla el dominio, el rango y el periodo de la función seno.
5. En un archivo en Geogebra grafica la función $y = \text{sen}\, x$. Compara esta gráfica con la que realizaste. ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Qué concluyes?
6. Al inicio de la actividad se proponía calcular $\text{sen}\, \sqrt{2}$. Ahora que has estudiado sobre la función trigonométrica seno, ¿cómo podrías hallar dicho valor?

3.5. ANÁLISIS A PRIORI DE LAS SITUACIONES

3.5.1. Situación 1: Distancia entre dos personas

Al momento de socializar las respuestas por parte de los estudiantes se espera que en la Actividad 1 los estudiantes identifiquen las siguientes posibles posiciones para la pareja de amigos.

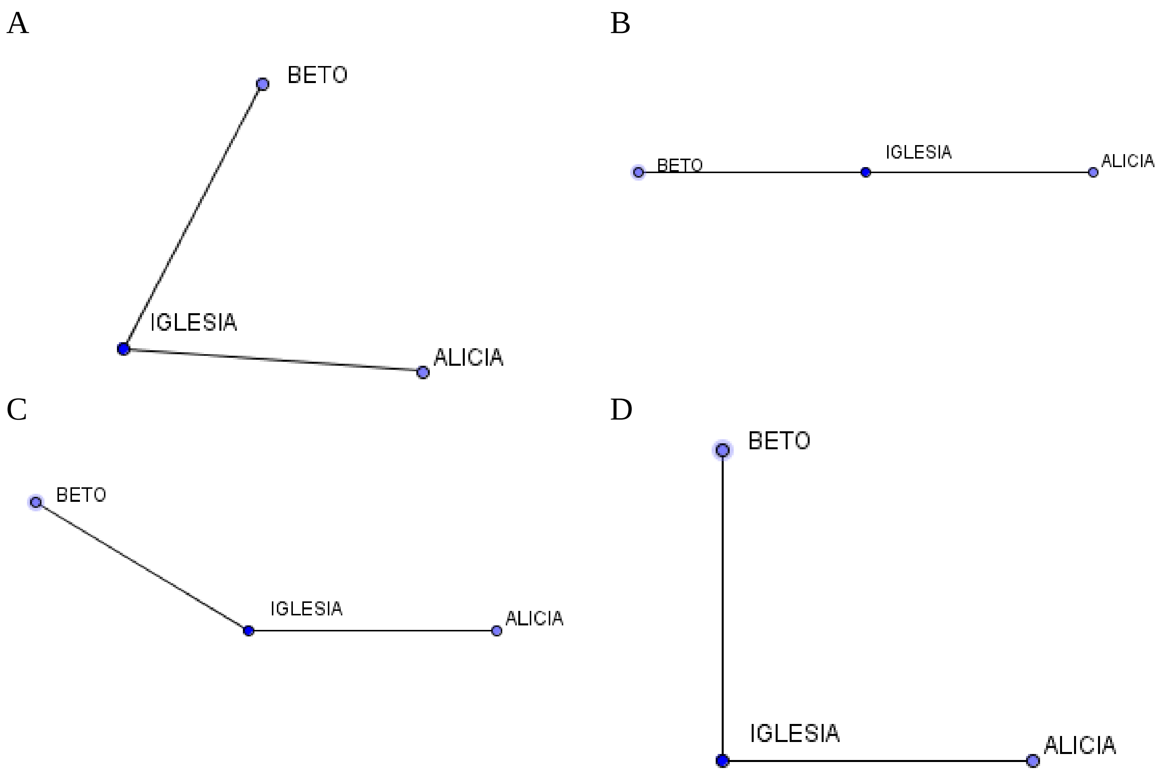


Figura 14 Posibles posiciones para la pareja de amigos.

Se asume que las figuras presentados tendrán inmerso el concepto de ángulos, para identificar las posibles posiciones, en la figura 14-A se hace explícito cuando el ángulo que se forma entre la pareja de amigos y la iglesia es agudo, asimismo las figuras 14-C y 14-D hacen referencia a ángulos obtuso y recto respectivamente, mientras que la figura 14-B se considera un ángulo llano.

Ahora, para la pregunta sobre cómo calcular la distancia entre los dos amigos, teniendo en cuenta las figuras realizados y además del uso restringido de la calculadora, se concluye que las posiciones en las que se puede medir la distancia por métodos aritméticos son las figuras 14-By 14-D. Para la 14-B se establece la suma de las distancias entre la iglesia y cada amigo (24 metros) mientras que para la 14-D se puede solucionar apelando al Teorema de Pitágoras; en el caso de 14-A y 14-C, estos pueden ser solucionados si se emplea la calculadora, por ello, estos no serán tenidos en cuenta.

Se espera que los estudiantes como mínimo puedan identificar las 4 posibles posiciones, sin mayor dificultad, para lograr contextualizar la pregunta realizada, se presupone que deben estar familiarizados con este tipo de conceptos matemáticos.

Por otra parte, en la Actividad 2 se espera que los estudiantes puedan diligenciar con facilidad la tablas 1 y 2, más aun, que puedan observar la relación entre el ángulo que se forma y las distancias entre la pareja de amigos, siendo esta, que a mayor ángulo, mayor distancia, por lo menos hasta 180°, puesto que en este ángulo se alcanza la distancia máxima entre los dos amigos.

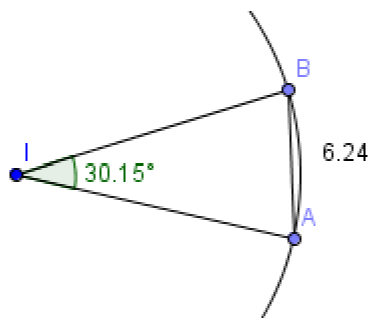


Figura 15. Distancia entre A y B cuando el ángulo es 30.15°.

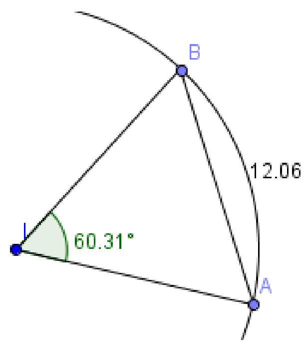


Figura 16. Distancia entre A y B cuando el ángulo es 68.06°

Cabe advertir que en el momento no se tendrá en cuenta el hecho de que α está medido en grados y no en radianes, el propósito de esta situación es construir el concepto de la razón seno y más adelante se retomará sobre la medición angular.

Se recomienda usar dos posiciones decimales para la medida de los grados y la distancia, de esta manera el margen del error disminuye.

Cuando uno de los puntos es movido a lo largo de la circunferencia entonces la distancia entre dichos puntos aumenta, esto se debe a que el punto se "aleja", haciendo que el ángulo central aumente, sin embargo si al mover el punto el ángulo es mayor a 180° entonces la distancia empieza a disminuir debido a que ahora el punto se "acerca" y las distancias se vuelven a repetir. Por eso, en la pregunta 2 el estudiante debe inferir que las distancias serán iguales para un ángulo α menor que 180° y un ángulo β mayor que 180°cuando la suma de dichos ángulos sea 360°. Ver figura 18 y 19

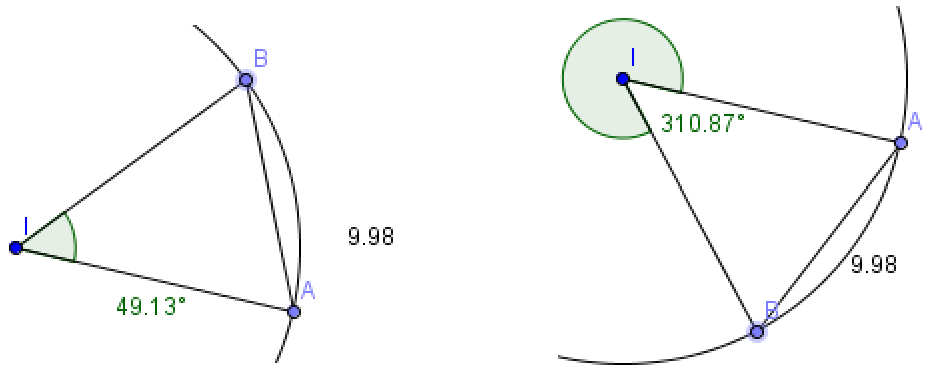


Figura 17. Medida del ángulo cuando la distancia entre A y B es 9.98.

Ahora en la Actividad No 3, si suponemos que el radio aumenta (o disminuye), es decir, sea el doble (o la mitad) entonces asimismo aumenta el doble (o disminuye la mitad) la distancia entre los puntos referenciados, esto significa que hay una relación directamente proporcional entre el radio del círculo y la distancia entre los puntos A y B.

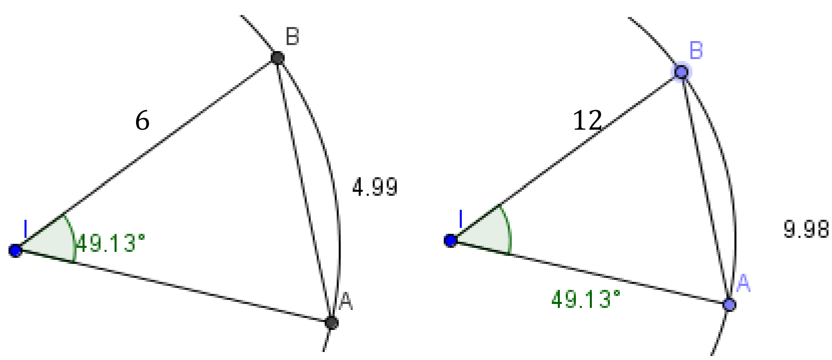


Figura 18. Distancia entre A y B para un ángulo fijo

Con el fin que el estudiante pueda verificar su hipótesis entonces el archivo de Geogebra contiene diferentes circunferencias de radios 6cm, 12cm, 18cm y 24cm con el que puede constatar la relación directa entre el radio y la distancia entre los puntos A y B. Para ello, se deja fijo un valor del ángulo y el estudiante solo debe registrar los valores de la tabla.

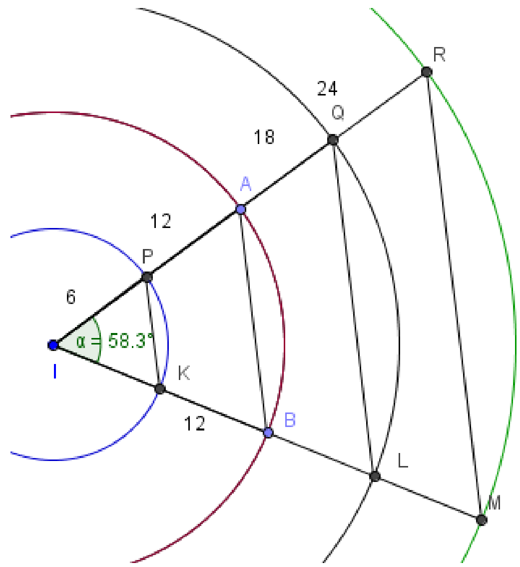


Figura 19. Variación de los radios.

Debido a que en el fondo de la construcción se encuentra el concepto de semejanza de triángulos entonces las razones entre las distancias de los puntos construidos y los radios de los círculos siempre será el mismo valor numérico sin embargo aún no se espera que los estudiantes puedan responder satisfactoriamente esta justificación.

Los estudiantes pueden verificar esta proporcionalidad simplemente cambiando el ángulo, entonces en este caso la razón será un valor diferente (si se compara con la tabla anterior) pero será igual para cada triángulo, es decir, **la razón es invariante y no depende de los lados del triángulo sino de su ángulo**, se espera que los estudiantes pueden llegar a esta conclusión sin ninguna dificultad, ello se debe a que Geogebra se puede cambiar el ángulo y automáticamente las distancias también varían y aunque el valor de la razón cambie, este será el mismo para todos los triángulos involucrados.

El cierre de la Situación 1 se da con la Actividad 4, donde ahora el estudiante explorará la definición de la razón seno, para ello enfrenta a una situación un poco diferente, porque que se ha trazado la bisectriz del ángulo entre los puntos A, B y el centro de la circunferencia formando así dos triángulos rectángulos, el porqué de esto se debe a que la bisectriz es la misma altura en un triángulo isósceles y, por definición de altura, esta corta el segmento opuesto del vértice con un ángulo de 90°.

Esta actividad es muy similar a la anterior respecto a los resultados invariantes de las razones, aunque con una diferencia: No se calcula la razón entre las distancias de los puntos y el radio de las circunferencias sino entre el segmento comprendido entre uno de los puntos A o B y el punto medio de estos (intersección de la bisectriz con el segmento AB) y el radio de los círculos (ver figura 21), en otras palabras, entre el cateto opuesto y la hipotenusa, por lo tanto se espera que los estudiantes puedan justificar que dichas razones son invariantes debido al concepto de semejanza de triángulos trabajado en la actividad anterior. Además se ha de tener cuidado especial en que el ángulo medido también es la mitad del original.

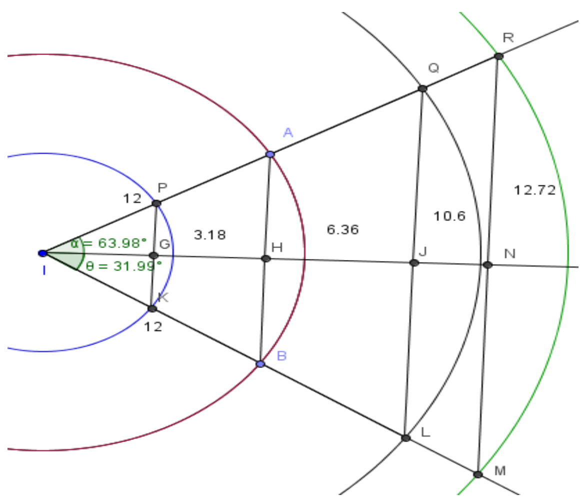


Figura 20. Distancia media entre los puntos y la bisectriz del ángulo.

Cuando los estudiantes usan la calculadora científica para hallar el valor del seno del ángulo trabajado se podrán dar cuenta que éste es el mismo que el de la tabla y aun variando el valor del ángulo, éste coincidirá con el valor de la razón seno, cabe anotar que se introdujo este concepto sin ser previamente definido o mencionado, puesto que las siguientes preguntas conducen a que los estudiantes concluyan que: **el seno de un ángulo**

es el cociente entre el lado opuesto del ángulo sobre el radio de la circunferencia, y como este radio es la hipotenusa del triángulo rectángulo entonces podrán concluir que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Finalmente, para calcular la distancia entre Alicia y Beto que están a la misma distancia de la iglesia será:

$$d = 2(r * \sin \alpha)$$

3.5.2. Situación 2: Explorando el círculo unitario

Esta Situación se centra en la relación que existe entre la longitud de arco y la abertura del ángulo que lo subtiende a lo largo del círculo unitario, dejando en un segundo plano la distancia entre la pareja de amigos trabajada en las anteriores actividades, por ello, el objetivo de esta Situación es proponer una serie de actividades que den coherencia a las múltiples nociones matemáticas relacionada con la función trigonométrica seno, como el periodo, medida en radianes, relación radian- real y por supuesto, la gráfica de la función.

En el tránsito del concepto de razón a función trigonométrica, los estudiantes deben dar cuenta de la conversión y relación entre grados y radianes, por ello la necesidad de la Actividad 1, que relaciona las medidas en grados de un círculo y su perímetro. Aunque este proceso suele ser enseñado de una manera mecánica y así se establece dentro de esta actividad, es necesario realizarlo porque aporta elementos fundamentales en la transición de razón a función trigonométrica y así lograr el objetivo principal de este trabajo.

Posteriormente, en el archivo en Geogebra (ver figura 22) el estudiante puede relacionar el número real con el radian, puesto que se usa el valor numérico de π los estudiantes pueden darse cuenta que los radianes no son más que la longitud de arco del círculo y por ello pueden hacer la conversión de los grados a radianes, a longitudes de arco y viceversa. Además en todo momento se está verificando la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto que, posteriormente, se relacionará con el seno trigonométrico tanto de los grados como de la longitud de arco.

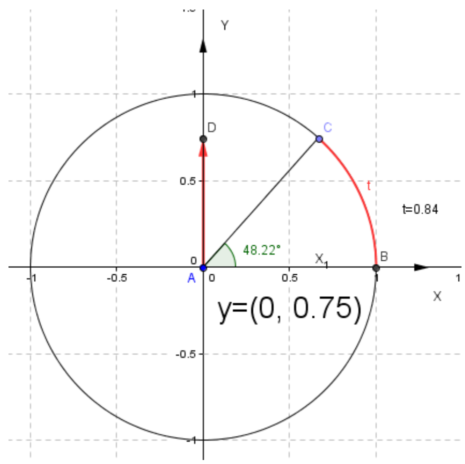


Figura 21. Relación entre grados y longitud de arco.

Las actividades anteriormente desarrolladas se realizan en el primer cuadrante, sin embargo la Actividad 3 permite explorar lo que sucede en los otros cuadrantes, pero sobre todo relacionar el número de referencia $\tilde{t}$ con el valor de la longitud de arco. En primera instancia los estudiantes deben esbozar el grafico del número de referencia $\tilde{t}$ asociado a longitud de arco t ubicado en cada uno de los cuadrantes.

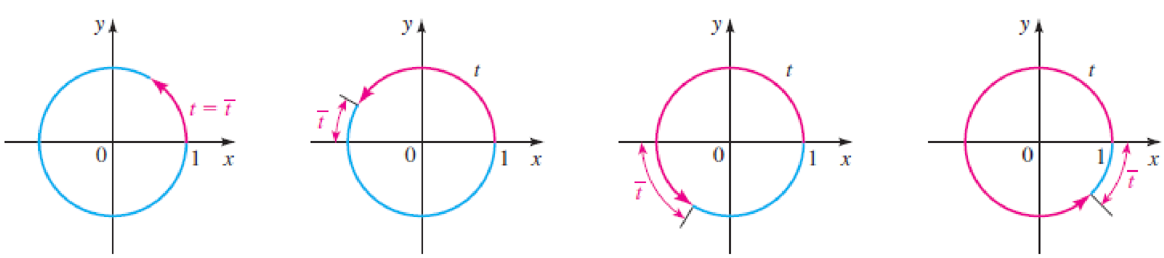


Figura 22. Gráficas para los números de referencia.

Posteriormente, los estudiantes deberán dar cuenta de las ecuaciones que le permitan calcular el valor de $\tilde{t}$ para un valor del arco t ubicado en cualquiera de los cuadrantes anteriormente descritos, dichas ecuaciones son:

- Primer cuadrante: $\tilde{t} = t$.
- Segundo cuadrante: $\tilde{t} = 3{,}14 - t$.

- Tercer cuadrante: $\tilde{t} = t - 3{,}14$.
- Cuarto cuadrante: $\tilde{t} = 6{,}28 - t$.

El objetivo principal de esta actividad está orientado a que el estudiante reconozca una periodicidad en los cuadrantes gracias al número de referencia.

Luego los estudiantes verificarán los diferentes valores que tiene la coordenada $\boldsymbol{y}$ para cada arco de longitud solicitado y podrán verificar que estos valores se repiten o son iguales a los de la primera tabla, exceptuando en el signo para algunos casos, debido a que la variable $\boldsymbol{y}$ es una coordenada, por lo tanto puede tener tanto valores positivos como negativos.

Ahora se introduce al estudiante nuevamente en el uso de la calculadora para verificar la relación trigonométrica seno entre la longitud de arco y la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto terminal de la circunferencia. Para ello con ayuda del docente y la calculadora programada en radianes el estudiante puede comprobar cómo los valores en la calculadora coinciden con los de la tabla. Sin embargo hay que aclarar que estos valores pueden diferir hasta en una centésima y ello se debe a al uso numérico de π, porque solo se trabajaron con dos cifras significativas cuando π tiene infinitas cifras decimales por su naturaleza irracional.

Con la ayuda del docente quien enuncia la definición de función, el estudiante puede establecer la relación entre la longitud de arco y el valor $\boldsymbol{y}$ de la coordenada del punto C como una función trigonométrica:

$$y = \operatorname{sen} t$$

Donde $\boldsymbol{y}$ es la variable dependiente y t la variable independiente.

Hecho lo anterior, el estudiante puede bosquejar la gráfica de la función trigonométrica seno a través del plano cartesiano.

Por último, se indican las definiciones de dominio, rango y periodo para que el estudiante, nuevamente bajo la guía del docente, pueda establecerlos en la función trigonométrica seno donde concluya que:

El periodo de la función se cumple cuando se da una vuelta entera al círculo, es decir, cuando la longitud de arco sea 2π. El dominio de la función seno son todos los números reales, debido a que está relacionado con la variable independiente, es decir, la longitud de arco y ésta puede tener tantos valores como se desee. El rango de la función es el conjunto de números comprendidos entre -1 y 1 inclusive, porque en este intervalo se muestran todas las imágenes de los números reales bajo la función:

$$y = \text{sen}\, t$$

El estudiante entonces, será capaz de calcular el seno de cualquier valor numérico (incluyendo aquellos que son mayores a 6,28).

3.6. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Este apartado hace referencia a los resultados de las actividades realizadas por los estudiantes y a sus respectivos análisis que pueden emerger en la secuencia didáctica. Ello permite contrastar o verificar los resultados esperados y de esa manera determinar en donde los estudiantes tienen fortalezas y debilidades en el momento de aprender un concepto en matemáticas y evaluar las actividades diseñadas de las situaciones didácticas del presente proyecto.

Los resultados de cada actividad son presentados a través de una tabla y posteriormente se realizan los respectivos análisis.

Situación 1: Distancia entre dos personas

Descripción general de la Situación 1.

La situación 1 fue aplicada en dos sesiones, la primera tuvo una duración de dos horas en donde se desarrollaron a cabo las actividades 1, 2 y 3; y en la segunda sesión se trabajó durante una hora la actividad 4 finalizando así la Situación 1.

Esta situación fue aplicada a un grupo de ocho (8) estudiantes de grado noveno seleccionados a discreción por el docente del área, se trabajó en la sala de sistemas del colegio donde contaba con el programa Geogebra previamente instalado. Para desarrollar las diferentes actividades planteadas en la secuencia, los estudiantes primero trabajaron de forma individual las preguntas, el docente se acercaba a solucionar inquietudes o dudas del manejo del programa Geogebra y de las actividades sin que éste diera de manera explícita las soluciones de las preguntas, posteriormente se realizó una socialización general de cada actividad, donde los estudiantes manifestaban los resultados hallados y el proceso para obtener los resultados así como sus dificultades.

Los estudiantes están culminando grado noveno porque pertenecen al calendario B del programa de educación básica del MEN y no se escogieron del grado décimo porque ya han trabajado las razones y funciones trigonométricas y las situaciones planteadas pretenden una exploración de la función trigonométrica seno para ayudar a la construcción de este concepto. Además los estudiantes han tenido un acercamiento previo al programa Geogebra en años lectivos anteriores, ello ayudó a que la secuencia se desarrollara con menor dificultad respecto al manejo del software.

Resultados de la actividad 1

Las tablas que se presentan a continuación muestran los diferentes tipos de respuestas obtenidos por los estudiantes a lo largo de la actividad 1

Pregunta 1: Realiza diferentes gráficos en que muestres las posibles posiciones	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que realizan una circunferencia sin una representación clara de las posibles posiciones de Alicia y Beto	4
Estudiantes que realizan una circunferencia con representaciones icónicas (flechas, diagramas, puntos) las posibles posiciones de Alicia y Beto	4

Tabla 7. Respuesta pregunta 1 Actividad 1

Pregunta 2: ¿Qué posiciones permiten obtener la distancia entre ellos con cálculos aritméticos y por qué?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que no explicitan las posiciones pero realizan cálculos numéricos	4
Estudiantes que ubican las posiciones y hacen cálculos numéricos	3
Estudiantes que ubican las posiciones, argumentan el porqué de ellas y realizan cálculos numéricos	1

Tabla 8. Respuesta pregunta 2 Actividad 1

Análisis de la actividad 1

El objetivo de esta actividad es identificar por medio de diagramas las cuatro (4) posibles posiciones en las que se puedan encontrar Alicia y Beto tal como se especificó en los análisis a priori y determinar cuáles de estas se pueden calcular mediante métodos aritméticos y cuáles no.

Respecto a la pregunta 1 los estudiantes comprenden la consigna a partir de diferentes representaciones y se puede concluir que las distintas posiciones de la pareja de amigos teniendo la iglesia fija y al variar ellos forma una circunferencia. Sin embargo ninguno de los estudiantes pudo explicitar de manera general las posiciones de Alicia y Beto cuando forman: ángulo agudo, ángulo recto, ángulo llano y ángulo obtuso. Esto se infiere a partir de las gráficas realizadas por los 4 estudiantes que hicieron representaciones icónicas debido a que no fijaron a uno de los dos amigos para así movilizar el otro sino que ambos eran movilizados obteniendo diferentes posiciones para ellos. Ello no implica que no puedan identificar que en cualquier momento Alica y Beto forman estos cuatro ángulos.

Por otra parte, resulta interesante la manera en que emplean la circunferencia como la mejor opción para representar las múltiples posiciones de Alicia y Beto, ello significa que los estudiantes tienen interiorizado el concepto de circunferencia y algunas propiedades que pertenecen a él como por ejemplo que todo punto sobre ella equidista a un punto fijo llamado centro.

Con relación a la pregunta 2 ésta buscaba identificar de las cuatro posiciones generales entre la pareja de amigos cuáles de estas permitían calcular la distancia entre ellos dos por medios de métodos aritméticos, en la cual no se pretendía que realizaran dicho cálculos, sin embargo los ocho estudiantes los realizaron. Ello significa que los estudiantes conocen implícitamente que las posiciones de Alicia y Beto que forman ángulo recto y ángulo llano son las que se pueden calcular, demostrando así que los estudiantes tiene interiorizado el teorema de Pitágoras y puntos colineales.

Por otro, un análisis interesante es determinar las distancias de Alicia y Beto cuando su posiciones son diferentes a las anteriormente nombradas, porque permite movilizar en los estudiantes otros conceptos matemáticos necesarios para hallar su solución. Este es el objetivo de fondo de esta pregunta porque conlleva a la necesidad de construir el concepto de razón trigonométrica seno.

Algunas evidencias de la actividad 1

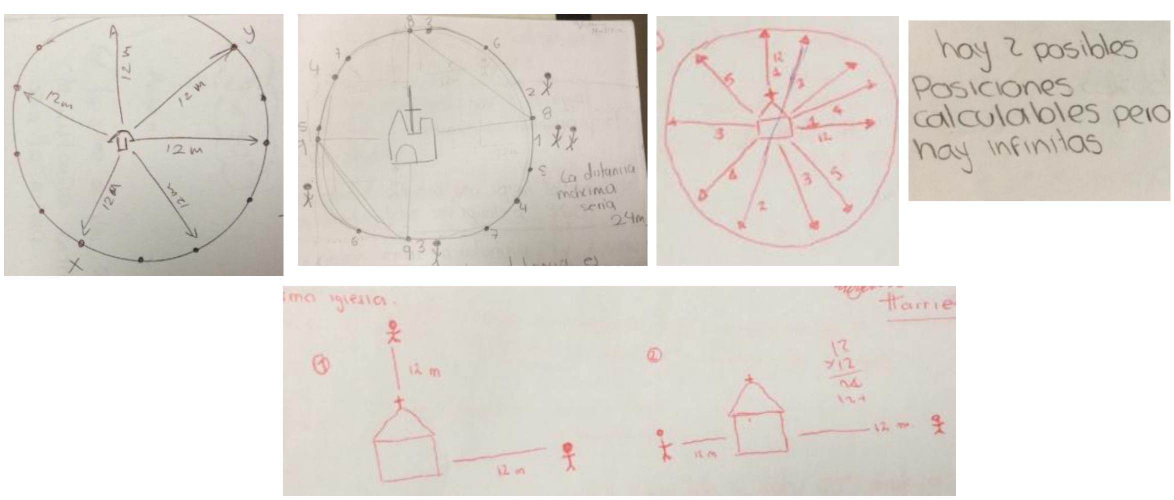


Figura 23. Evidencias Actividad 1 Situación 1

Resultados de la actividad 2

Las tablas que se presentan a continuación muestran los diferentes tipos de respuestas obtenidos por los estudiantes a lo largo de la actividad 2.

Pregunta 1: ¿Qué relación encuentras entre los ángulos y las distancias entre Alicia y Beto? ¿Cómo es esta relación?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que identifican la relación de la siguiente manera escrito algebraicamente: el ángulo es 5 veces la distancia	7
Entre más grande sea el ángulo mayor es la distancia	1

Tabla 9. Respuesta pregunta 1 Actividad 2

Pregunta 2: ¿Existe alguna relación para iguales distancias con ángulos mayores a 180° y menores a 180°? ¿Cómo es la relación?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Si, cuando la suma de los ángulos es $360°$ entonces las distancias son iguales.	8

Tabla 10. Respuesta pregunta 2 Actividad 2

Análisis de la actividad 2

De acuerdo a los resultados de la pregunta 1, se puede determinar que los estudiantes en su mayoría tienden a establecer una linealidad entre el ángulo y la distancia entre los puntos A y B, haciendo explicito que solo se cumple hasta el ángulo de $90°$, esto se debe a que cinco veces la parte entera del decimal que representa la distancia entre A y B es el valor del ángulo formado por AIB. Lo que evidencia que los estudiantes tienen ciertos conocimientos sobre la función lineal, pero esta no es objeto de estudio a lo largo de la actividad. El objetivo de la pregunta es identificar dicha relación como directamente correlacionada hasta $180°$, tal como se indicó en el análisis a priori. No obstante, un estudiante logro establecer la relación sin especificar el límite, demostrando de esta manera que la consigna fue clara puesto que se logró movilizar el concepto de magnitudes directamente correlacionadas.

Respecto al resultado de la pregunta 2 por parte de los estudiantes, se puede evidenciar que estos reconocen en una circunferencia la propiedad de la medida angular en un giro completo.

Algunas evidencias de la actividad 2

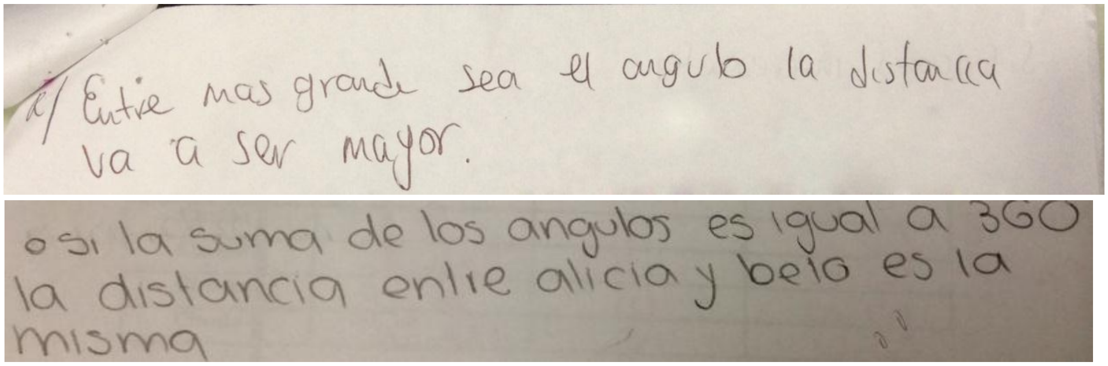


Figura 24. Evidencias Actividad 2 Situación 1

Resultados de la actividad 3

Las tablas que se presentan a continuación muestran los diferentes tipos de respuestas obtenidos por los estudiantes a lo largo de la actividad 3

Pregunta 1: ¿Encuentras algún patrón en la última columna? A qué crees que se deba esto	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que contestan que la razón entre las dos columnas es igual	2
Estudiantes que contestan que la razón entre las columnas es igual y se debe a que el ángulo es constante	6

Tabla 11. Respuesta pregunta 1 Actividad 3

Pregunta 2: ¿Qué relación existe entre las nuevas distancias entre los puntos A y B a la distancia inicial?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que argumentan la relación como directamente proporcional	8

Tabla 12. Respuesta pregunta 2 Actividad 3

Análisis de la actividad 3

El objetivo de esta actividad es establecer que la razón entre los lados proporcionales de triángulos semejantes es constante y depende exclusivamente del ángulo formado por los puntos AIB. La mayoría de los estudiantes al registrar la consigna establecen justamente que la razón es invariante y que solo depende del valor de ángulo, de aquí se puede inferir que hay un concepto implícito en el estudiante de dependencia conllevando de esta manera a movilizar algunos aspectos propios el pensamiento variacional como la covariación.

Un concepto importante en esta actividad es el de semejanza de triángulos porque es el que permite que las razones entre sus segmentos y los radios de las circunferencias sean invariantes, ello también explica el por qué los lados del triángulos son directamente proporcionales y que el valor numérico de la razón es la constante de proporcionalidad. Sin embargo ningún estudiante manifestó la existencia de triángulos semejantes tal como se esperaba en los análisis a priori.

Algunas evidencias de la actividad 3

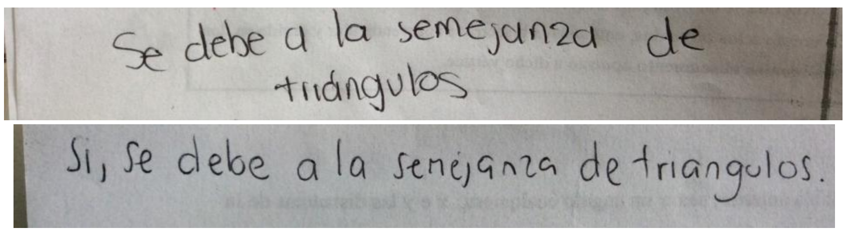


Figura 25. Evidencias Actividad 3 Situación 1

Resultados de la actividad 4

Las tablas que se presentan a continuación muestran los diferentes tipos de respuestas obtenidos por los estudiantes a lo largo de la actividad 4

Pregunta 1: ¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas este hecho?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Triángulo rectángulo. Si la bisectriz del triángulo es perpendicular al segmento opuesto, es decir, lo corta en un ángulo de 90°.	8

Tabla 13. Respuesta pregunta 1 Actividad 4

Pregunta 2: ¿Encuentras algún patrón en la última columna? A qué crees que se deba esto	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que argumentan que son directamente proporcionales	5
Estudiantes que argumentan que los triángulos son semejantes	3

Tabla 14. Respuesta pregunta 2 Actividad 4

Nota: La pregunta 3 hace referencia a una comprobación de los resultados hallados en la pregunta 2, por tanto no registra en la tala de resultados.

Pregunta 4: Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para los ángulos empleados en la tabla 3. ¿Qué observas?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que argumentan que el seno trigonométrico es igual a la razón entre las columnas 1 y 2.	8

Tabla 15. Respuesta pregunta 4 Actividad 4

Pregunta 5: En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de las columnas 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico como una ecuación que involucre las 3 medidas	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que logran identificar la razón seno como sen $\alpha = x/y$	8

Tabla 16. Respuesta pregunta 5 Actividad 4

Pregunta 6: Usa el triángulo y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que identifican sen $\theta = \text{cat. opuesto}/\text{hipotenusa}$	8

Tabla 17. Respuesta pregunta 6 Actividad 4

Pregunta 7: Finalmente responde, ¿Cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que argumentan la ecuación usando lenguaje natural	2
Estudiantes que argumentan la ecuación usando lenguaje matemático	2
Estudiantes que intentan dar respuesta a la expresión	1
Estudiantes que no responden	3

Tabla 18. Respuesta pregunta 7 Actividad 4

Análisis de la actividad 4

De acuerdo al resultado de la pregunta 1, ésta evidencia que en efecto los estudiantes reconocieron, de manera implícita, que los triángulos construidos en Geogebra son isósceles, debido a que dos de los lados del triángulo son el radio de una circunferencia, por ello hubo una claridad en la consigna de la definición, es así como los estudiantes identifican que la perpendicularidad implica un ángulo de 90° y ello conlleva a argumentar que el triángulo es rectángulo. Esta pregunta permitió observar en los estudiantes tienen algunos conocimientos claros respecto a la geometría de plano y por tanto facilitó el desarrollo de la actividad.

Con relación a los resultados en la pregunta 2 un grupo de estudiantes reconocen la semejanza de triángulos como el concepto de fondo por el cual los valores de las razones entre los segmentos involucrados registrados en la tabla (IA y AH, donde Hes el punto medio de AB) son invariantes, esto quiere decir que los estudiantes tuvieron una apropiación del concepto trabajado gracias a la experiencia en la actividad anterior; por otra parte el resto de estudiantes que justifican que la razón de dichos segmentos se mantiene invariante debido a que la relación es directamente proporcional, se basan en el hecho que existe una constante, lo cual la asocian con el término de constante de proporcionalidad, mostrando de esta manera que no lograron identificar el concepto principal que subyace esta actividad.

Posteriormente en las preguntas 4 a 6 y con el uso de la calculadora los estudiantes pudieron establecer que el seno trigonométrico es una razón entre los segmentos de un triángulo rectángulo, logrando expresarlo tanto en lenguaje natural como en lenguaje algebraico, y que el valor numérico de este depende del ángulo y no del tamaño del triángulo, cumpliendo así con el objetivo principal de la Situación 1.

Finalmente, en la última pregunta se obtienen diferentes tipos de respuestas que son interesantes, debido a que existe una claridad en la consigna para hallar en cualquier posición la distancia entre la pareja de amigos, se emplean la bisectriz del triángulo isósceles y la razón seno, considerando además que dicha bisectriz genera dos triángulo rectángulos. Esto demuestra una aprehensión del concepto de la razón seno por parte de los estudiantes. Sin embargo, es necesario aclarar que los estudiantes no consideraron que el ángulo que forman la pareja de amigos respecto a la iglesia al ser bisecado este se divide a la mitad.

Algunas evidencias de la actividad 4

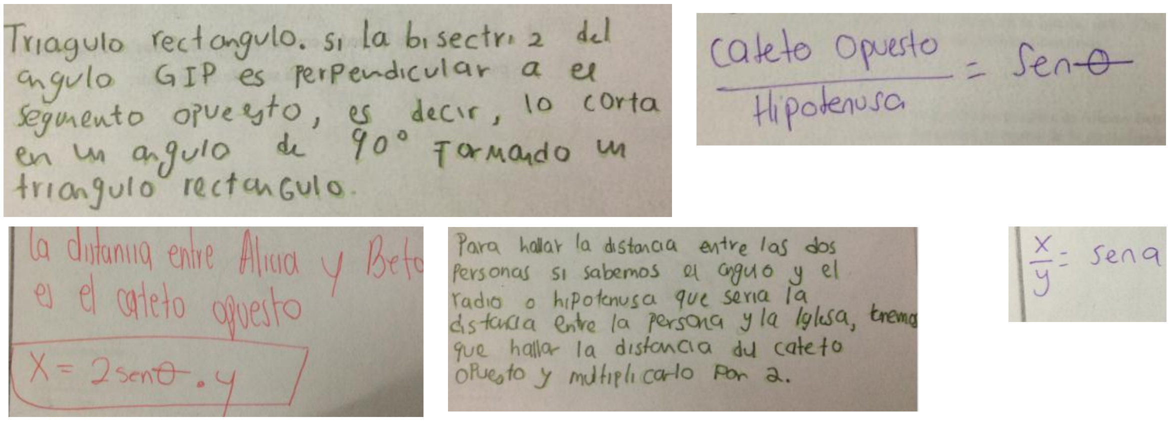


Figura 26. Evidencias Actividad 4 Situación 1

Algunas conclusiones sobre la implementación de la Situación 1

El papel del docente es fundamental es el proceso de aprendizaje, su rol no debe ser el de un espectador sino que debe ayudar al estudiante a encontrar las respuestas, para ello debe realizar preguntas, ayudar a construir el concepto, comunicar o en otros momentos abstenerse de comunicar a los estudiantes, por eso se propone un acompañamiento directo en las actividades de la secuencia. En ningún momento se espera que la Situación remplace el rol del docente en el aula de clases, por el contrario, es el docente quien potencializa el alcance que puede tener las actividades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes tomando así un rol definitivo y activo durante el desarrollo de las actividades. Esto se pudo vivenciar en la Actividad 3 cuando los estudiantes empezaron a comparar los resultados obtenidos con la de sus compañeros; el docente en este caso hizo una intervención haciendo preguntas que conllevaran a los estudiantes a reflexionar y concluir el porqué de este fenómeno y de esa manera obtener la respuesta esperada.

Además el papel del estudiante y su actitud respecto al trabajo a desarrollar, hacen también parte esencial de su desempeño matemático. Se contó con un grupo siempre dispuesto a colaborar con la aplicación de la situación logrando de esta manera construir los conceptos propuestos en las actividades. Asimismo, los estudiantes ya habían tenido un acercamiento previo al software Geogebra en años lectivos anteriores lo que facilitó el desarrollo de cada actividad.

Por otra parte, las situaciones problemas llevadas al aula de clase son el eje central en estas actividades, debido a que éstas permean los conceptos matemáticos involucrados que fueron descritos en el apartado Diseño de la Situación y permite que sean aprendidos por los estudiantes. Se inicia con la formulación de un problema cotidiano y a partir del desarrollo de las actividades se resuelven los problemas y se verifican los resultados hallados, además las preguntas planteadas permiten que los estudiantes puedan generalizar sus soluciones y así llegar a diferentes conclusiones que harán visible el aprendizaje en el aula.

Se determina entonces que son varios los aspectos que influyen, en lo que se considera, un buen funcionamiento de la Secuencia Didáctica, es un trabajo que debe ser analizado de manera conjunta, para que el artefacto efectivamente sea convertido un instrumento, por parte del estudiante y el desarrollo de sus esquemas de uso.

Durante el desarrollo de la Situación, no se hizo mención alguna a lo que es la razón seno, las actividades 1, 2, 3 y 4 develan la construcción del seno trigonométrico, sin embargo éste aparece durante el desarrollo de la última actividad de la Situación cuando los estudiantes operan el seno mediante la calculadora y dan cuenta que es igual al valor de las distancia de dos segmentos en un triángulo rectángulo.

Situación 2: Explorando el círculo unitario

Para continuar la exploración de la función trigonométrica a partir de la Situación anterior (problema de distancias) se puede extrapolar el problema de Alicia y Beto en puntos específicos del plano cartesiano, es decir, Alicia y Beto son puntos de coordenada (x, y) en el plano y la iglesia es el origen del plano de coordenadas. En este momento, la distancia entre la pareja de amigos pasa a un segundo plano y la atención se dirige a la relación entre el ángulo que se forma en el triángulo rectángulo y la longitud de arco entre el punto $(1,0)$ y la posición del punto (x, y)

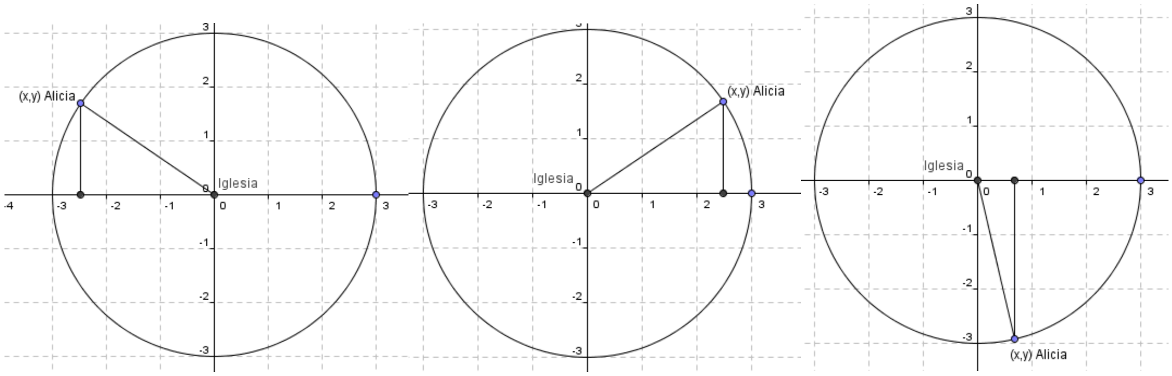


Figura 27. Localización de la Situación 1 en el plano cartesiano

Para lograr ello, se siguió el camino que toma Stewart (2009) al definir función trigonométrica como la relación entre la longitud de arco entre el vértice $(1,0)$ y un punto (x, y) sobre el círculo y la coordenada y de dicho punto. Además, Moore (2012) reporta resultados significativos cuando explora el círculo unitario y diseña actividades en torno a él, que va desde la medición angular hasta la graficación de las funciones. Por eso, se consideró esta alternativa como un camino que puede dar luces al problema tratado en todo este trabajo.

Descripción general de la Situación 2.

La Situación 2 fue aplicada en 2 sesiones, cada una tuvo una duración de una hora y media, donde se desarrollaron las actividades 1, 2, 3, y 4.

Esta situación fue aplicada al mismo grupo de estudiantes de grado noveno puesto que se pretendía dar continuidad al proceso que se venía desarrollando en ellos y además se adoptó la misma dinámica de trabajo aplicada en la Situación 1 con excepción de un estudiante que se encontraba fuera de la ciudad.

Resultados de la actividad 1

Pregunta 1: Medición en grados: Una vuelta completa de una circunferencia equivale a 360 grados. A cuántos grados equivalen: un doceavo, un octavo, un sexto y un cuarto de vuelta	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que expresan el número de grados como una fracción	2
Estudiantes que omiten el proceso pero escriben los resultados	3
Estudiantes que argumentan en lenguaje natural el proceso realizado y escriben los resultados	2

Tabla 19. Respuesta pregunta 1 Actividad 1

Pregunta 2: Medición en radianes: La longitud de una circunferencia unitaria mide 2π. Halla las longitud de una circunferencia para: un doceavo, un octavo, un sexto y un cuarto de vuelta	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que expresan la longitud en términos de π	4
Estudiantes que expresan la longitud en números decimales	3

Tabla 20. Respuesta pregunta 2 Actividad 1

Pregunta 3: Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además muestra con ejemplos el paso de un sistema a otro	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que establecen la relación icónicamente sin usar ejemplos	1
Estudiantes que establecen la relación algebraicamente usando ejemplos	6

Tabla 21. Respuesta pregunta 3 Actividad 1

Pregunta 3: Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además muestra con ejemplos el paso de un sistema a otro	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que establecen la relación icónicamente sin usar ejemplos	1
Estudiantes que establecen la relación algebraicamente usando ejemplos	6

Tabla 22. Respuesta pregunta 4 Actividad 1

Análisis de la actividad 1

El objetivo de esta actividad es que el estudiante pueda establecer la relación que existe entre los grados y los radianes, y a partir de esta se puedan hacer conversiones entre un sistema a otro. Por ello se solicitaba que los estudiantes fueran explícitos en los procesos que realizaban. Aunque este proceso es mecánico se necesita que los estudiantes reconozcan el cambio de un sistema a otro para comprender la transición razón a función trigonométrica. En lo que concierne a la respuestas de las preguntas de la actividad, se videncia una claridad de la consigna porque que los estudiantes, en su mayoría, pueden hacer la transición entre un sistema medido en grados y otro en radianes debido a las propiedades de proporciones que establecen en el valor de π.

Algunas evidencias de la actividad 1

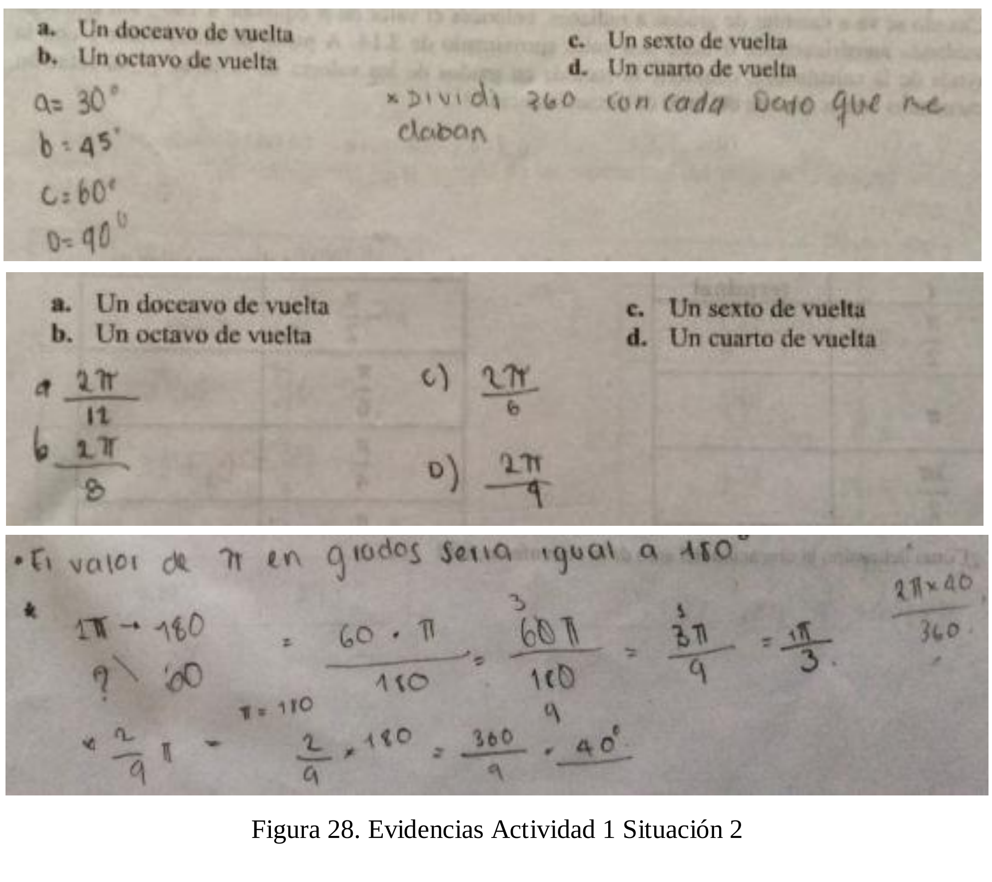


Figura 28. Evidencias Actividad 1 Situación 2

Resultados de la actividad 2

Pregunta 1: ¿Qué relación encuentras entre la medida de circunferencia t y la medida en radián?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que relacionan una igualdad entre la medida del arco de circunferencia y su medida en radián de manera implícita	4
Estudiantes que relacionan una igualdad entre la medida del arco de circunferencia y su medida en radián de manera explícita	3

Tabla 23. Respuesta pregunta 1 Actividad 2

Pregunta 2: Deslice el punto C que está sobre la circunferencia en Geogebra, ¿cómo determinas la ubicación del arco de la circunferencia?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que usan el valor numérico de π	3
Estudiantes que hacen un cambio de registro	4

Tabla 24. Respuesta pregunta 2 Actividad 2

Análisis de la actividad 2

El objetivo de esta actividad consiste en que el estudiante verifique la equivalencia entre la medida de un ángulo dado en grados y la medida de longitud del arco dado en reales que lo subtiende. Los estudiantes verifican dicha equivalencia al usar el valor numérico aproximado de π como 3,14 y de estos resultados se puede inferir que los estudiantes identifican la abertura como la medida en grados y la longitud de arco de dicha abertura como la medida en radianes

Por otra parte, el propósito de la pregunta 2 consiste en hacer a un lado las medidas en grados y operar con su equivalente en radianes puesto que el objetivo de esta situación es obtener la función trigonométrica seno que es una función de variable real, sin embargo en algunos resultados obtenidos aún se evidencia que los estudiantes usaron la equivalencia obtenida en la actividad 1 y no el valor numérico de π, esto posiblemente se deba a que los estudiantes interiorizaron la equivalencia entre π y $180°$ por el trabajo realizado en la situación 1 sobre la abertura de ángulos.

Algunas evidencias de la actividad 2

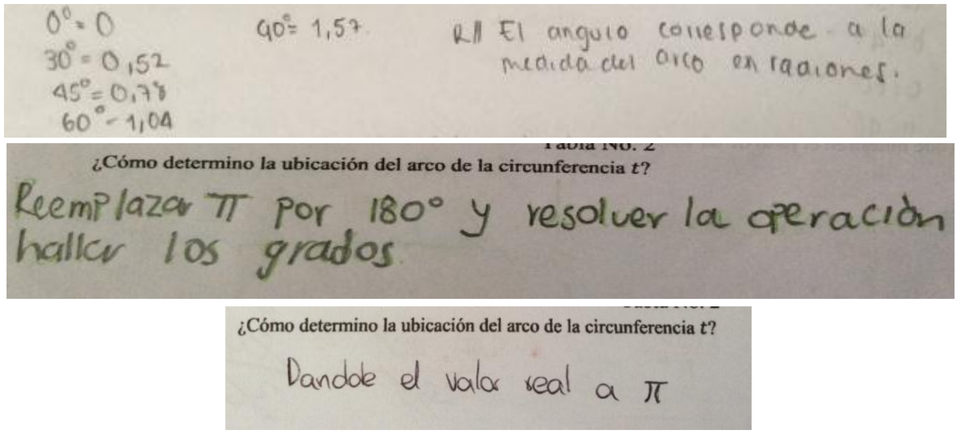


Figura 29. Evidencias Actividad 2 Situación 2

Resultados de la actividad 3

Pregunta 1: Esboce un gráfico que represente, cuál es la distancia de $\bar{t}$, si el punto terminal t está en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante(Emplea un gráfico para cada cuadrante)	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que representan gráficamente la distancia $\bar{t}$ en diferentes cuadrantes	7

Tabla 25. Respuesta pregunta 1 Actividad 3

Pregunta 2: ¿Cómo puedes determinar el valor de $\bar{t}$?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que determinan el valor de $\bar{t}$ empleando las siguientes expresiones: *Primer cuadrante:* $\bar{t} = t$ *Segundo y tercer cuadrante:* $\bar{t} = \pi - t$ *Cuarto cuadrante:* $\bar{t} = 2\pi - t$	5
Estudiantes que determinan el valor de $\bar{t}$ empleando las siguientes expresiones: *Primer cuadrante:* $\bar{t} = t$ *Segundo cuadrante:* $\bar{t} = \pi - t$ *Tercer cuadrante* $\bar{t} = t - \pi$ *Cuarto cuadrante:* $\bar{t} = 2\pi - t$	2

Tabla 26. Respuesta pregunta 2 Actividad 3

Pregunta 3: ¿Qué relación encuentras entre $\bar{t}$ y los valores de la tabla 1?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que logran identificar una igualdad entre los valores de $\bar{t}$ con los valores de t en el primer cuadrante	7

Tabla 27. Respuesta pregunta 3 Actividad 3

Pregunta 4: ¿Qué relación encuentras entre los valores de la coordenada y de las tablas 1 y 4? y en qué difieren?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que logran identificar una igualdad entre los valores de la coordenada y y establecen la diferencia en el signo dependiendo de la ubicación de la longitud t en los distintos cuadrantes.	7

Tabla 28. Respuesta pregunta 4 Actividad 3

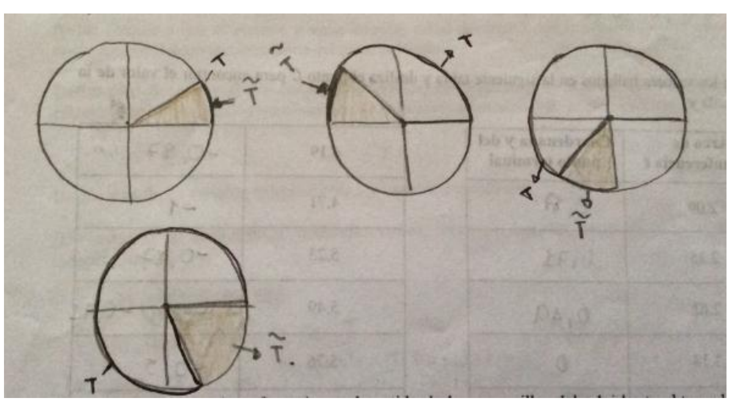
Análisis de la Actividad 3

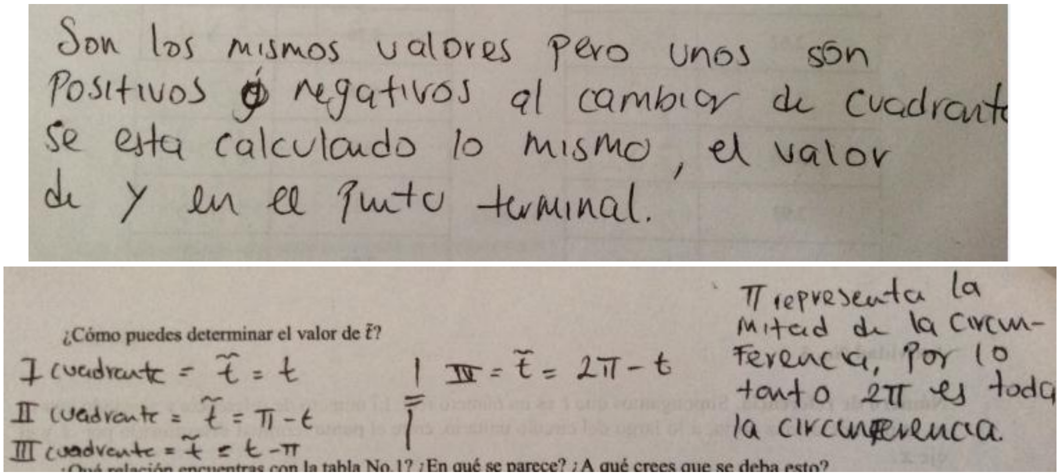
El propósito de esta actividad es lograr que los estudiantes identifiquen la relación de los valores de t y $\bar{t}$ en los cuatro cuadrantes. De acuerdo a los resultados de la primera pregunta se puede concluir que hubo una comprensión por parte de los estudiantes sobre la definición de número de referencia y logran establecer la longitud de arco que representa este número en la circunferencia unitaria.

Por otro lado, en lo que corresponde a las preguntas 2 y 3, se logró identificar las ecuaciones que permiten los cálculos de $\bar{t}$ en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Además lo estudiantes de una manera implícita determinan que la función es periódica porque tiene un ciclo, pues en la explicaciones dadas por ellos de forma oral se aludían a que los valores $\bar{t}$ se repetían a lo largo de los cuatros cuadrantes.

En cuanto a la pregunta 4, los estudiantes argumentan que debido a un ciclo o vuelta, los valores de la coordenada y se repiten numéricamente en la circunferencia unitaria en los cuatro cuadrantes, a excepción del signo, cuando el punto terminal se encuentra en los cuadrantes III y IV.

Algunas evidencias de la actividad 3





Son los mismos valores pero unos son positivos ó negativos al cambiar de cuadrante se esta calculando lo mismo, el valor de y en el punto terminal.

¿Cómo puedes determinar el valor de $\tilde{t}$?

I cuadrante = $\tilde{t} = t$

II cuadrante = $\tilde{t} = \pi - t$

III cuadrante = $\tilde{t} = t - \pi$

IV = $\tilde{t} = 2\pi - t$

π representa la mitad de la circunferencia, por lo tanto 2π es toda la circunferencia.

¿Qué relación encuentras con la tabla No.1? ¿En qué se parece? ¿A qué crees que se deba esto?

Figura 31. Evidencias Actividad 3 Situación 2

Resultados de la Actividad 4

Pregunta 1: Con el uso de la calculadora, verifica el seno trigonométrico del valor de las longitudes de arco t registrados en la tabla 4. Compara estos resultados con los obtenidos en la coordenada y de las tablas, ¿qué concluyes?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que logran identificar una igualdad entre el seno trigonométrica y el valor de la coordenada y	7

Tabla 29. Respuesta pregunta 1 Actividad 4

Pregunta 2: De acuerdo con la definición anterior de variables dependientes e independientes, identifícalas en la actividad realizada	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que identifican a "y" y $\bar{t}$ como dependiente y a t como independiente	7

Tabla 30. Respuesta pregunta 2 Actividad 4

Pregunta 3: Realiza la gráfica de la función trigonométrica seno en el plano cartesiano	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que esbozan la gráfica del seno	5
Estudiantes que no logran esbozar la gráfica del seno	2

Tabla 31. Respuesta pregunta 3 Actividad 4

Pregunta 4: Determina el dominio, rango y periodo de la función seno	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que esbozan la gráfica del seno	5
Estudiantes que no logran esbozar la gráfica del seno	2

Tabla 32. Respuesta pregunta 4 Actividad 4

Pregunta 5: Determina el dominio, rango y periodo de la función seno	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que determinan el dominio como "infinito" Estudiantes que determinan el rango como los valores entre -1 y 1 Estudiantes que determinan el periodo como 2π o $6{,}28$	6
Estudiantes que determinan el dominio como "infinito" Estudiantes que determinan el rango como los valores mayores que 1 y menores a 1 Estudiantes que determinan el periodo como 2π	2

Tabla 33. Respuesta pregunta 5 Actividad 4

Pregunta 6: Compara la gráfica realizada con la gráfica del seno en Geogebra. ¿Qué concluyes?	
Tipo de Respuesta	**Cantidad de estudiantes**
Estudiantes que logran establecer una semejanza entre las gráficas	6
Estudiantes que no responden la pregunta	2

Tabla 34. Respuesta pregunta 6 Actividad 4

Nuevamente la calculadora es usada para verificar que el seno de los valores la longitud de arco registrados en las tablas de la actividad 3 son iguales a la coordenada y del punto terminal. Debido a que en esta Situación se trabajó con radianes entonces generó en los estudiantes una inquietud sobre el modo de uso de la calculadora. Al preguntarles sobre si la forma adecuada era en grados, manifestaron que no porque nunca se midió aberturas de ángulos sino longitudes de arcos y que por tanto su modo debía ser en radianes. Concluyendo que el seno de la longitud de arco es aproximado a la coordenada y del punto terminal.

Respecto a la segunda pregunta, los estudiantes logran identificar que las variables y y $\bar{t}$ dependen de la longitud del arco t en la circunferencia unitaria, de esta manera se abre camino a las variables que intervienen en la función trigonométrica seno y se identifica una función como una relación de dependencia en donde existe una covariación entre los valores de $t, \bar{t}$ y y.

De acuerdo a los resultados de la pregunta tres, los estudiantes hacen un bosquejo aproximado de la gráfica de la función seno y en ella se pude evidenciar características propias como los puntos máximos y mínimos 1 y -1, ondulaciones, esto debido a que ellos tienen interiorizados las formas en que se repiten los valores de las variables dependientes en el círculo unitario.

Además, se puede evidenciar en las respuestas de la pregunta 4 que los estudiantes identifican que no hay restricción alguna en el dominio de la función seno puesto que t puede tomar cualquier valor a lo largo de la circunferencia incluyendo además los valores negativos, esto dependiendo del sentido en que se gire el punto terminal. Por el contrario los estudiantes sí encontraron una restricción en el rango de la función seno puesto que ésta solo toma valores comprendidos entre -1 y 1 debido a los valores que toma la coordenada y del punto terminal cuando t es movilizado a lo largo de la circunfenferecia, además ya han identificado a y como un variable que depende de los valores de t, en este caso se puede inferir que las parejas ordenadas de la función seno son de la forma (t, y)

En lo que corresponde al periodo de la función seno, los estudiantes logran identificarlo con el valor numérico $6{,}28$ o lo que es equivalente 2π, no obstante ya lo habían identificado anteriormente a lo largo de esta situación, sin embargo aludían a él como un ciclo.

Finalmente, en la última pregunta los estudiantes tienen la posibilidad de comparar la gráfica obtenida en la pregunta 3 con la gráfica realizada en Geogebra, donde a partir de ésta confirman los resultados obtenidos en las preguntas anteriores, como lo son el domino, el rango, el periodo y que la función tiene un comportamiento ondulatorio extendiéndose hasta los números negativos.

Algunas evidencias de la actividad 4

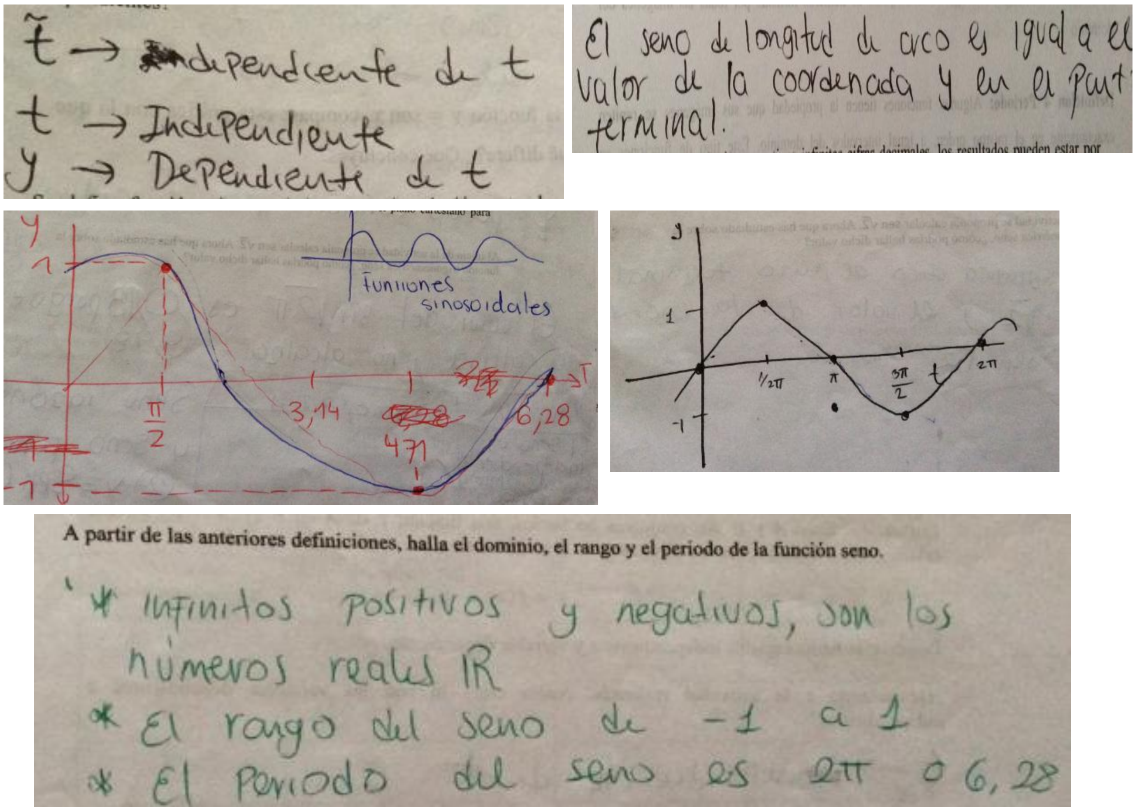


Figura 31. Evidencias Actividad 4 Situación 2

Algunas Conclusiones de la implementación de la Situación 2

Las actividades propuestas condujeron a los estudiantes a analizar las diferentes nociones matemáticas relacionadas con el concepto de función trigonométrica, en el que un número está relacionado con otro único número mediante una relación, en este caso, la relación entre longitud de arco y la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto terminal.

Los estudiantes desde el principio de las actividades pudieron describir ciertos patrones que se repetían a lo largo de los cuatro cuadrantes en las diferentes relaciones existentes entre la longitud de arco t con $\tilde{t}$ y la longitud de arco t con el valor de la coordenada y del punto terminal, se pudo establecer que lo que sucede en un cuadrante sucederá en otro, con la diferencia en algunos casos del signo y que, todo se vuelve a repetir cuando el punto C "de otra vuelta". Este concepto se pudo aterrizar en la última actividad cuando se estudió el concepto de periodo, donde los estudiantes comprendieron que el periodo o el ciclo de la función seno es 2π o 6.28.

Los estudiantes tienen un buen acercamiento a lo que es la gráfica de la función seno, si bien es incorrecta en algunos de ellos, en ella se pueden detallar implícitamente las características principales como las curvas de crecimiento, decrecimiento, los picos o crestas, entre otros. Con más sesiones y actividades se podría fortalecer en ellos la gráfica de la función seno y estudiar el seno generalizado $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$ donde podrá evidenciar el significado de cada variable: a, b, c, d como lo ha propuesto González (2011).

4. CONCLUSIONES FINALES

En relación con el primer objetivo específico se puede concluir que:

1. Fundamentar el trabajo desde diferentes aspectos teóricos como didácticos, curriculares y matemáticos ayudaron a la comprensión del concepto de razón y función trigonométrica, desde lo didáctico porque evidenció la importancia del desarrollo de un pensamiento variacional para la comprensión de fenómenos asociados a procesos de variación o cambios; desde lo curricular porque dio una visión global e integral de la razones y funciones trigonométricas en el sistema educativo colombiano y desde lo matemático porque permitió analizar la naturaleza del objeto matemático.

2. Se considera como pilar del diseño de las situaciones didácticas los referentes teóricos estudiados, esto porque además de mostrar algunas de las dificultades, los errores u obstáculos didácticos que han existido a lo largo de la enseñanza de la trigonometría también vislumbra cuáles podrían ser los caminos que deben seguir los docentes para realizar trabajos en el aula de clase, con el objetivo del desarrollo de un pensamiento algebraico.

3. La tecnología en el aula puede ser usada como un catalizador de conocimiento matemático gracias a las múltiples posibilidades de interacción y exploración que pueden existir entre el objeto matemático y el estudiante, sin embargo los resultados de su implementación estarán condicionados en la medida que se tenga presente además de la complejidad del concepto a trabajar, los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el diseño e implementación de situaciones didácticas que, teniendo en cuanta las restricciones y dificultades de los estudiantes y programas de software, aprovechen la tecnología para crear espacios en que los estudiantes puedan potenciar su conocimiento matemático. En particular, Geogebra puede favorecer el aprendizaje de las matemáticas porque permite descifrar procesos complejos como los fenómenos de variación y de cambio con el

uso del arrastre, además la medida en radianes sobre el eje x hace efectiva la interpretación del número real.

En relación con el segundo objetivo específico se puede concluir que:

4. es rescatable el intento que se realizó a lo largo de este proyecto la en cuanto a la integración, a través de una secuencia didáctica, los conceptos de razón y función trigonométrica, no siendo estudiados como una añadidura sino como un solo entorno de construcción geométrica, sin embargo se considera que se hace necesario ampliar y profundizar las actividades de las situaciones presentadas y así lograr favorecer el paso de la razón a la función trigonométrica.

5. La propuesta metodológica del presente trabajo mostró la importancia de innovar en situaciones que permitan al estudiante analizar, reflexionar, inferir y conjeturar conceptos trigonométricos y romper con el esquema tradicional de la enseñanza de las razones y funciones trigonométricas de una manera aislada, por lo que sí es posible trabajar en el aula de una manera integrada los conceptos de razón y función trigonométrica usando incluso contextos cotidianos para los estudiantes; y de la misma forma se podría en futuros proyectos la extensión hasta las otras cinco funciones.

6. El diseño de las situaciones permitió observar que el concepto de variación fue movilizado a través de algunas actividades, en tanto que las evidencias presentadas por los estudiantes dan muestras que hay una dependencia entre algunos objetos matemáticos y otros, lo que implicó que los estudiantes las describieran como relaciones, donde reconocer las variables dependientes e independientes hacen parte fundamental para la aprehensión del concepto de función.

En relación con el tercer objetivo se puede concluir que:

7. La aplicación y el análisis de las situaciones didácticas del presente proyecto se evidenció que los estudiantes pudieron identificar uno de los conceptos claves en el paso de la razón a la función, el cual es la periodicidad de la función trigonométrica seno mediante la variación de los parámetros y la ampliación del dominio; de esta manera los estudiantes pudieron establecer una relación entre ángulo, radián y número real lo que contribuye al paso de la magnitud a la medida y al número.

8. Las actividades mostraron cómo pudo emerger en los estudiantes el pensamiento geométrico y variacional por medio de las evidencias escritas por parte de ellos a lo largo de ambas situaciones, por ejemplo cuando lograron establecer: la razón seno en los triángulos rectángulos, la dependencia del ángulo y la medida de los lados del triángulo rectángulo, la dependencia de la coordenada y respecto a la valor de la longitud del arco t en el círculo unitario, el reconocimiento de la periodicidad de la función seno y la construcción de la gráfica de dicha función. Todas estas evidencias juntas pueden llevar a concluir que hay una aprehensión del concepto de función trigonométrica.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T (1980) Calculus Volumen I. Editorial Reverté. Barcelona España

Artigue, M. (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una empresa docente*. Grupo Editorial Iberoamericana. Bogotá

Ballesteros, E. (2013). *Actividades de aprendizaje en matemática, mediadas por recursos de la Web 2.0. I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe CEMACYC*. Santo Domingo, República Dominicana.

Brosseau, G. (1986). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática.* Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Cantoral, R. M. (2004). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. *Construyendo la Noción de Función Trigonométrica: Estrategias de Aprendizaje*, (págs. 371-376). México, DF.

Carranza, M. (2011). *Exploración del Impacto Producido por la Integración del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Geogebra en la Enseñanza de los Cursos de Matemáticas de Primer Semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira.* Palmira: Universidad Nacional de Colombia.

González, H. (2011). *Una Propuesta para la Enseñanza de las Funciones Trigonométricas Seno y Coseno Integrando Geogebra.* Cali: : Universidad del Valle.

Grabovskij, M. &. (1971). *The use of Kinematic Models in the Study of Trigonometric Functions.* Dordrecht: Educational Studies in Mathematics.

Kendal, M. &. (1998). *Teaching Trigonometriy. Australian Mathematics Teacher.* Melbourne: University of Melbourne.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Santefe de Bogotá.

MEN. (2013). *Secuencias Didácticas en Matemáticas.* Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Santafe de Bogotá.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* México, DF: Instituto Politécnico Nacional.

Montiel, G. (2013). *Dsarrolo del Pensamiento Trigonométrico.* México DF: Institu Politécnico Nacional.

Santa Cruz, O. (2005). *Las Funciones Trigonométricas y el Pensamiento Variacional: El Caso de las Textos Escolares y las Concepciones de los Maestros.* Cali: Universidad del Valle.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal.* Editorial Reverté, S.A.

Stewart, J. (2009). *Precálculo.* Belmont, Ca: Thomson.

Vasco, C. (2006). *El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías.* Santafe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Webber, K. (2005). *Student`s Understanding of Trigonometric Functions.* New Brunswick: Mathematics Education Research.

ANEXO: Algunas muestras de las situaciones implementadas.

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

SITUACIÓN NO.1: DISTANCIA ENTRE DOS PERSONAS

Actividad No. 1

Alicia y Beto están en un parque en distintos lugares, pero separados a la misma distancia de la iglesia (12 m).

Realiza diferentes gráficos en que muestres las posibles posiciones

¿Qué posiciones permiten obtener la distancia entre ellos con cálculos aritméticos y por qué?

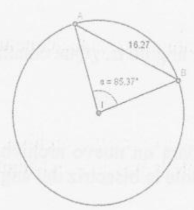
Actividad No. 2

Para generalizar todos los casos donde Alicia y Beto se puedan encontrar necesitamos variar sus posiciones. Por ejemplo, una circunferencia con centro en la iglesia, radio 12m y Alicia y Beto situados sobre la misma, permitiría explorar todas las posibles situaciones.

Realiza los siguientes pasos:

Con ayuda del programa Geogebra muestra las posiciones posibles de Alicia y Beto, recuerda que el radio del círculo debe ser de 12 unidades. Renombra el centro de la circunferencia con la letra *I* (iglesia) y los puntos sobre la circunferencia con las letras *A* (Alicia) y *B* (Beto).

Forma el triángulo *AIB* por medio de segmentos, halla la distancia entre los puntos *A* y *B*. Asimismo, halla el ángulo que se forma entre ellos y la iglesia.



Completa la siguiente tabla

y	**Ángulo**	10°	20°	15°	30.42°	40° ~~45°~~	60°	50°	100°
x	**Distancia entre Alicia y Beto**	2.09m	4,17	3,14	6.3m	8,21	12	10,14	18,1

130° 21,75

270° 16,97

200° 23,63

5

¿Qué relación encuentras entre los ángulos y las distancias entre Alicia y Beto? ¿Cómo es esta relación? Puedes confirmar tus hallazgos calculando más ángulos o distancias.

Si los ángulos son mayores a 180°, por ejemplo 200° o 300°, ¿su distancia es igual, para qué ángulos menores que 180°? ¿Existe alguna relación para iguales distancias con ángulos mayores que 180° y menores que 180°? ¿Qué tipo de relación es?

Actividad No. 3

Si la distancia entre la iglesia y la pareja de amigos aumenta o disminuye, esto es, supongamos que en lugar de 12m sea de 24m o 6m ¿Qué relación existe entre la nueva distancia de Alicia y Beto a la inicial? Para ayudarte a contestar esta pregunta, se te dará un archivo, (archivo No.1) en Geogebra que contiene la construcción para diferentes distancias en las que pueden estar Alicia (punto A) y Beto (punto B). Las distancias mostradas son las siguientes: radio 6 cm, 12 cm, 18cm, 20cm.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia de los Segmentos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	3,16	6	0,52
Círculo 2	6,31	12	0,52
Círculo 3	9,47	18	0,52
Círculo 4	12,62	24	0,52

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

¿Qué relación existe entre las nuevas distancias de Alicia y Beto a la distancia inicial (12m)?

¿Cómo es esta relación?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

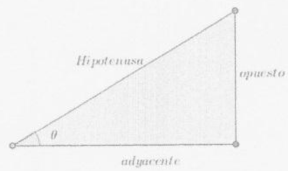
Repite el paso 2 para cualquier ángulo α. ¿Qué concluyes?

Actividad No. 4

En esta actividad el docente dará un nuevo archivo, (archivo No.2) en Geogebra que contiene la construcción anterior añadiéndole la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB

Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice

En el archivo No.2 de Geogebra encontraras las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa.

Con base al archivo No.2 de Geogebra, responde las siguientes preguntas, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
Círculo 4			

¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

Uso de la calculadora

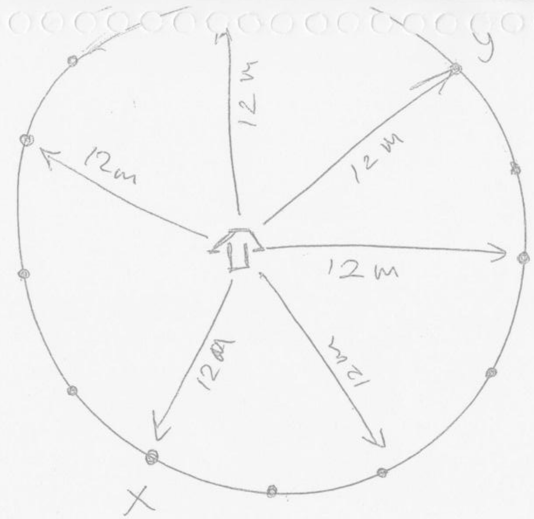
Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para el ángulo empleado en la tabla anterior.

¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor

En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

Usa el triángulo dado al inicio de la actividad y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.

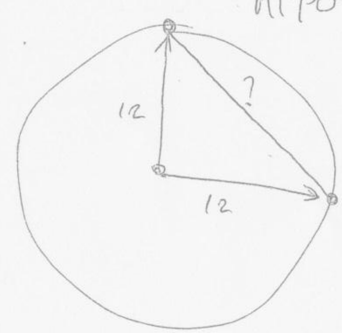
¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?



- Si x y Y se encuentran de frente la maxima distancia seria 24 al sumar la distancia que hay entre cada uno y la iglesia.

- Si la ubicación de x y Y forma un triangulo rectangulo la distancia se puede calcular usando el teorema de pitagoras para hallar el valor de la hipotenusa:

* Existen infinitas posiciones
* La maxima distancia entre las dos personas es 24 m.



$12^2 + 12^2 = h^2$

$144 + 144 = h^2$

$288 = h^2$

$\boxed{h = 16,97}$

Sofia Otálora

R/ Entre mas grande sea el angulo la distancia va a ser mayor. la relación entre cada angulo y distancia esta en que la distancia 5 veces es el valor de la distancia, aunque esta relación solo se cumple con los angulos agudos y recto

$$5x = y$$

distancia

Angulo (Recto ó Agudo)

$$5(6,3) = 30,44$$

$$y < 90°$$

Angulo

R/ la suma de dos angulos que sea igual 360° la distancia entre las dos personas x y Y sera la misma.

$$39,97° + 320,06° = 360°$$

Distancia = 8,2

Actividad No. 4

A continuación se dará un nuevo archivo en Geogebra que contiene la construcción anterior y la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB

Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz es perpendicular y divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice.

En el archivo de Geogebra que se anexa contiene las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	x **Distancia media entre la pareja de amigos**	y **Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	3.18	6	0,53
Círculo 2	6.36	12	0,53
Círculo 3	10.6	20	0,53
Círculo 4	12.72	24	0,53

1. ¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

Triagulo rectangulo. si la bisectriz del angulo GIP es perpendicular a el segmento opuesto, es decir, lo corta en un angulo de 90° formando un triangulo rectangulo

2. ¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿a qué crees que se deba esto?

Los valores de la razón entre la columna 1 y 2 es la misma por que las dos columnas crecen de forma proporcional.

3. En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

Angulo= ~~[illegible]~~ 25.01°

	Distancia media entre la Pareja	Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R	Razon entre columna 1 y 2
1	2.54	6	0,42
2	5.07	12	0,42
3	8.46	20	0,42
4	10.15	24	0,42

Uso de la calculadora

Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para los ángulos empleados en la tabla anterior.

4. ¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor.

Sen = 0,42

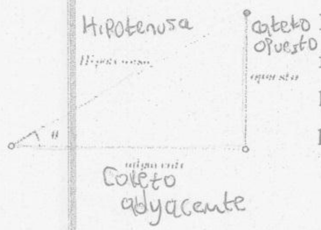
Sen 25.01° = 0,42

El seno trigonometrico es igual a la razon entra la columna 1 y 2

5. En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

$x / y = \operatorname{sen} a$

6. Usa el siguiente triángulo y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa

Cateto opuesto / hipotenusa = sen θ

7. ¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?

Para hallar la distancia entre las dos Personas si sabemos el angulo y el radio o hipotenusa que seria la distancia entre la persona y la iglesa, tenem que hallar la distancia del cateto opuesto y multiplicarlo Por 2.

Despejar la ecuación del seno trigonométrico para hallar el valor del cateto opuesto y despues encontrar la distancia total entre las 2 personas.

cateto opuento / hipotenusa = sen θ

cateto opuesto = sen θ · hipotenuso

distancia = cateto opuesto . 2

Isabella Duarte S.

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

SITUACIÓN NO.1: DISTANCIA ENTRE DOS PERSONAS

Actividad No. 1

Alicia y Beto están en un parque en distintos lugares, pero separados a la misma distancia de la iglesia (12 m).

Realiza diferentes gráficos en que muestres las posibles posiciones

¿Qué posiciones permiten obtener la distancia entre ellos con cálculos aritméticos y por qué?

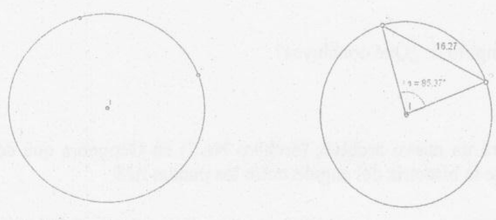
Actividad No. 2

Para generalizar todos los casos donde Alicia y Beto se puedan encontrar necesitamos variar sus posiciones. Por ejemplo, una circunferencia con centro en la iglesia, radio 12m y Alicia y Beto situados sobre la misma, permitiría explorar todas las posibles situaciones.

Realiza los siguientes pasos:

Con ayuda del programa Geogebra muestra las posiciones posibles de Alicia y Beto, recuerda que el radio del círculo debe ser de 12 unidades. Renombra el centro de la circunferencia con la letra I (iglesia) y los puntos sobre la circunferencia con las letras A (Alicia) y B (Beto).

Forma el triángulo AIB por medio de segmentos, halla la distancia entre los puntos A y B. Asimismo, halla el ángulo que se forma entre ellos y la iglesia.



Completa la siguiente tabla

Ángulo y	10°	20°	15°	30.43°	15°46	60°
Distancia entre Alicia y Beto x	2.09m	4.17	3.13	6.3m	8.27	12

18
x5

¿Qué relación encuentras entre los ángulos y las distancias entre Alicia y Beto? ¿Cómo es esta relación? Puedes confirmar tus hallazgos calculando más ángulos o distancias.

Si los ángulos son mayores a 180°, por ejemplo 200° o 300°, ¿su distancia es igual, para qué ángulos menores que 180°? ¿Existe alguna relación para iguales distancias con ángulos mayores que 180° y menores que 180°? ¿Qué tipo de relación es?

Actividad No. 3

Si la distancia entre la iglesia y la pareja de amigos aumenta o disminuye, esto es, supongamos que en lugar de 12m sea de 24m o 6m ¿Qué relación existe entre la nueva distancia de Alicia y Beto a la inicial? Para ayudarte a contestar esta pregunta, se te dará un archivo, (archivo No.1) en Geogebra que contiene la construcción para diferentes distancias en las que pueden estar Alicia (punto A) y Beto (punto B). Las distancias mostradas son las siguientes: radio 6 cm, 12 cm, 18cm, 20cm.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia de los Segmentos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	3.12	6	0.52
Círculo 2	6.24	12	0.52
Círculo 3	9.37	18	0.52
Círculo 4	12.49	24	0.52

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

¿Qué relación existe entre las nuevas distancias de Alicia y Beto a la distancia inicial (12m)?

¿Cómo es esta relación?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

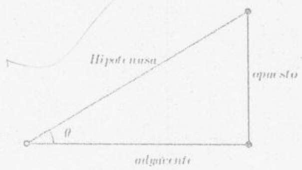
Repite el paso 2 para cualquier ángulo α. ¿Qué concluyes?

Actividad No. 4

En esta actividad el docente dará un nuevo archivo, (archivo No.2) en Geogebra que contiene la construcción anterior añadiéndole la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB

> Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice

En el archivo No.2 de Geogebra encontraras las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa.

Con base al archivo No.2 de Geogebra, responde las siguientes preguntas, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
Círculo 4			

¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

Uso de la calculadora

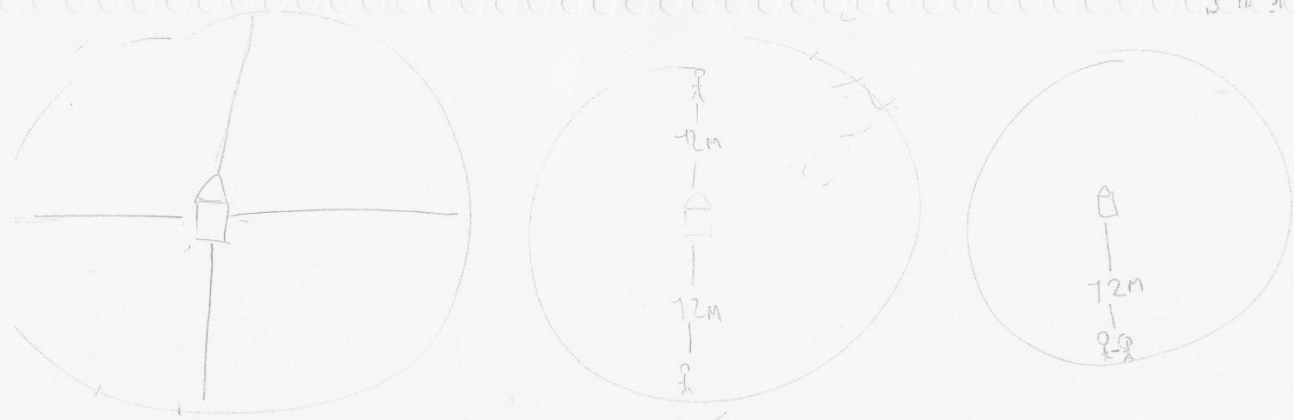
Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para el ángulo empleado en la tabla anterior.

¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor

En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

Usa el triángulo dado al inicio de la actividad y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.

¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?



La distancia maxima entre las dos personas serian 24m.
Hay muchas formas de ubicar a las personas en el circulo.

- x = Alicia
- y = Beto

$x + y \geq 24$

- $12^2 + 12^2 = h^2$: $144 + 144 = h^2$ $\cdot 288 = h^2$ = $\boxed{h = 16.97}$

- La distancia se calcula segun el angulo (Agudo, llano, recto, obtuso)

Actividad #2: [illegible] 9A

Fue dificil ubicar el angulo exacto pero de nuestra lo que planteamos en la actividad 1.

x = distancia
y = Angulo

$\boxed{x \cdot 5 = y}$ ← Esta regla solo se cumple cuando se forma un angulo agudo.
(No se cumple con mas de 90°).

Angulo	300	60	150°	210°	266
distancia	12	12	23.78	23.78	?

Si la suma de dos angulos es igual a 360 la distancia entre estos va a ser la misma.

3).
La razon siempre es la misma la división del segmento y la distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, … dan lo mismo (segun el angulo)

6 ⟶ 3.72
0.52 ⟶

x = Radio
y = Distancia

$6x = 41,4$

$\frac{41,4}{6} = x$

$\boxed{6,9 = x}$

$\boxed{x = 6,9}$ -> Esta es una relación directament Proporcional

* fue interesante relacionar las propiedades de una circunferencia con un problema de la vida cotidiana y como cada dato tiene una relación que le da sentido a la solución

Actividad No. 4

A continuación se dará un nuevo archivo en Geogebra que contiene la construcción anterior y la bisectriz del ángulo entre los puntos *AIB*

Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz es perpendicular y divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice.

En el archivo de Geogebra que se anexa contiene las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto *I* a los puntos *P, Q, A, R***	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	3.78	6	0.53
Círculo 2	6.36	12	0.53
Círculo 3	10.6	20	0.53
Círculo 4	12.72	24	0.53

Sen 0.53
Angulo: 32

1. ¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

Es un triangulo rectangulo.
Cuando se señala la distancia entre ~~tas~~ Alicia y Beto desde diferentes puntos forma un triángulo que al trazar bisectriz es perpendi-cular a la iglesia

2. ¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿a qué crees que se deba esto?

Si hay un patron, ya que este es directamente proporcional al angulo.

3. En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

	Distancia Media	Distancia desde el punto I	Razon
Circulo 1	3	6	0,50
Circulo 2	6	12	0,50
Circulo 3	10.01	20	0,500
Circulo 4	12.01	24	0,50

Angulo: 30.02°

Uso de la calculadora

Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para los ángulos empleados en la tabla anterior.

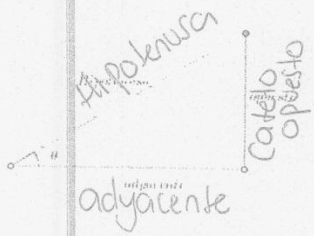
4. ¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor.

Sen 0,500
Angulo: 30.02°

5. En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

$$\frac{x}{y} = \operatorname{sen} a$$

6. Usa el siguiente triángulo y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa

$$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \text{Sen}\,\cancel{\theta}$$

7. ¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?

Isabella Duarte Salgado

Si, se debe a la semejanza de triangulos.

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

SITUACIÓN NO.1: DISTANCIA ENTRE DOS PERSONAS

Actividad No. 1

Alicia y Beto están en un parque en distintos lugares, pero separados a la misma distancia de la iglesia (12 m).

Realiza diferentes gráficos en que muestres las posibles posiciones

¿Qué posiciones permiten obtener la distancia entre ellos con cálculos aritméticos y por qué?

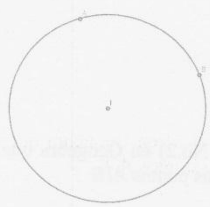
Actividad No. 2

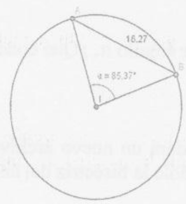
Para generalizar todos los casos donde Alicia y Beto se puedan encontrar necesitamos variar sus posiciones. Por ejemplo, una circunferencia con centro en la iglesia, radio 12m y Alicia y Beto situados sobre la misma, permitiría explorar todas las posibles situaciones.

Realiza los siguientes pasos:

Con ayuda del programa Geogebra muestra las posiciones posibles de Alicia y Beto, recuerda que el radio del círculo debe ser de 12 unidades. Renombra el centro de la circunferencia con la letra I (iglesia) y los puntos sobre la circunferencia con las letras A (Alicia) y B (Beto).

Forma el triángulo AIB por medio de segmentos, halla la distancia entre los puntos A y B. Asimismo, halla el ángulo que se forma entre ellos y la iglesia.





Completa la siguiente tabla

Ángulo	10°	20°	15°	30.42°	46°	60°
Distancia entre Alicia y Beto	2.09m	4,17	3,13	6.3m	8,21	12

¿Qué relación encuentras entre los ángulos y las distancias entre Alicia y Beto? ¿Cómo es esta relación? Puedes confirmar tus hallazgos calculando más ángulos o distancias.

Si los ángulos son mayores a 180°, por ejemplo 200° o 300°, ¿su distancia es igual, para qué ángulos menores que 180°? ¿Existe alguna relación para iguales distancias con ángulos mayores que 180° y menores que 180°? ¿Qué tipo de relación es?

Actividad No. 3

Si la distancia entre la iglesia y la pareja de amigos aumenta o disminuye, esto es, supongamos que en lugar de 12m sea de 24m o 6m ¿Qué relación existe entre la nueva distancia de Alicia y Beto a la inicial? Para ayudarte a contestar esta pregunta, se te dará un archivo, (archivo No.1) en Geogebra que contiene la construcción para diferentes distancias en las que pueden estar Alicia (punto A) y Beto (punto B). Las distancias mostradas son las siguientes: radio 6 cm, 12 cm, 18cm, 20cm.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia de los Segmentos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	4,14	6	0,69
Círculo 2	8,29	12	0,69
Círculo 3	12,43	18	0,69
Círculo 4	16,58	24	0,69
	13,82	20	0,69

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

¿Qué relación existe entre las nuevas distancias de Alicia y Beto a la distancia inicial (12m)?

¿Cómo es esta relación?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

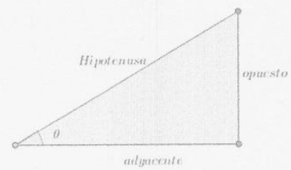
Repite el paso 2 para cualquier ángulo α. ¿Qué concluyes?

Actividad No. 4

En esta actividad el docente dará un nuevo archivo, (archivo No.2) en Geogebra que contiene la construcción anterior añadiéndole la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB

> Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice

En el archivo No.2 de Geogebra encontraras las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa.

Con base al archivo No.2 de Geogebra, responde las siguientes preguntas, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
Círculo 4			

¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿A qué crees que se deba esto?

En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

Uso de la calculadora

Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para el ángulo empleado en la tabla anterior.

¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor

En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

Usa el triángulo dado al inicio de la actividad y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.

¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?

Juan G. Lopez

- Radio = 12 m
  Max Distancia = 24 m
  $x + y = 24\,m$

- $12^2 + 12^2 = h^2$

  $144 + 144 = 288^2$

  $\sqrt{288} = 16{,}97$

Actividad # 2

* Fue dificil ubicar los angulos y la distancia entre A y B aunque familiarizarse con el programa e utilizarlo fue facil, pues es un programa muy practico

---

* La distancia multiplicada por 5, es el angulo, segun esto aplica para angulos menores a 90°

$x + 5 = y$

x - Distancia
y - Angulo } ≥ 90°

* ~~La distancia~~ La suma de dos angulos es 360°, la distancia entre A y B va ser la misma en ambos angulos, y su resultado

* La fraccion entre el segmento y la distancia de I siempre dara el mismo resultado, variando el resultado por el angulo.

* $\frac{x}{y} = 0,69$

x = Radio
y = Distancia entre A y B.

$6x = 41,4$
$x = 41,4$
$\boxed{6,9}$

* Se expresa como una relación directamente proporcional.

Reflexiones - Fue interesante la busqueda de una relación proporcional, en la cual, recordamos problemas anteriores.

Juan G. Lopez

Actividad No. 4

A continuación se dará un nuevo archivo en Geogebra que contiene la construcción anterior y la bisectriz del ángulo entre los puntos AIB

> Recuerda que si un triángulo isósceles es bisecado en el vértice donde su ángulo es diferente a los otros dos, entonces la bisectriz es perpendicular y divide en dos partes iguales el segmento opuesto a dicho vértice.

En el archivo de Geogebra que se anexa contiene las distancias entre la intersección de la bisectriz y las distancias entre las posiciones de la pareja de amigos.

Responde las siguientes preguntas con base a la construcción hecha, en caso de ser necesario usa el zoom de acercamiento para observar mejor la figura construida.

Dejando el ángulo α constante completa la siguiente tabla

$\alpha = 31{,}99^{\circ}$

	Distancia media entre la pareja de amigos	**Distancia desde el punto I a los puntos P, Q, A, R**	**Razón entre columna 1 y 2**
Círculo 1	3,18	6	0,53
Círculo 2	6,38	12	0,53
Círculo 3	10,6	20	0,53
Círculo 4	12,72	24	0,54

1. ¿Qué clase de triángulo se obtiene cuando se traza la bisectriz? ¿Cómo verificas dicho tipo de triángulo?

   Se forma un triangulo rectangulo, lo podemos verificar, si la intercepción entre A e I es perpenticular a la bisectriz.

2. ¿Encuentras algún patrón en la última columna? ¿a qué crees que se deba esto?

• las distancias son directamente proporcionales

3. En una nueva tabla similar a la anterior, registra los datos para un ángulo diferente (por ejemplo $\alpha = 50°$) ¿Qué observas?

$\alpha = 115°/2 = 57,5$

	Distancia media entre las parejas	Distancia desde el punto I a P,Q,A,R	Razón entre columna 1 y 2
1-	5,06	6	0,84
2-	10,12	12	0,84
3-	16,87	20	0,84
4-	20,24	24	0,84

Uso de la calculadora

Con la ayuda de una calculadora científica halla el valor del seno trigonométrico para los ángulos empleados en la tabla anterior.

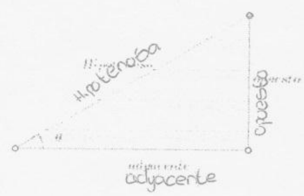
4. ¿Qué observas? Puedes confirmar tus resultados completando la tabla anterior para otro ángulo y hallando el seno de dicho valor.

5. En base a la tabla anterior, sea α un ángulo cualquiera, x e y las distancias de la columna 2 y 3 respectivamente. Plantee el seno trigonométrico por medio de una ecuación que involucre las 3 medidas.

$x / y = \text{Sen } \alpha$

$$\frac{x}{y} = \text{Sen } \alpha$$

6. Usa el siguiente triángulo y plantea en él el seno trigonométrico para el ángulo θ.



Nota: En todo triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa

$$\frac{\text{opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \text{Sen } \theta$$

7. ¿Finalmente responde, cómo hallarías la distancia entre Alicia y Beto si se conoce el ángulo que forman ellos con la iglesia y la distancia entre ellos y la iglesia?

la distancia entre A y B se calcula

$x = 2 \text{sen } \theta \cdot \text{Hipotenusa}$

* la hipotenusa corresponde al radio

* $\text{Sen } \theta = \frac{x}{y}$

Manuela Sanchez

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

¿Cómo calcularías sen $\sqrt{2}$?

No tengo idea

SITUACION No. 2: EXPLORANDO EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

Actividad No.1

1. **Medición en grados.** Una vuelta completa de una circunferencia medida en grados equivale a 360°, a partir de este enunciado, responda explicitando el proceso realizado: A cuántos grados equivalen:

a. Un doceavo de vuelta 30°
b. Un octavo de vuelta 45°
c. Un sexto de vuelta 60°
d. Un cuarto de vuelta 90°

2. **Medición en radianes** La longitud de una circunferencia unitaria, es decir radio $r = 1$, mide 2π (para una circunferencia cualquiera de radio r su longitud es $2\pi r$). A partir de este enunciado halla la longitud de circunferencia para los siguientes ejercicios:

a. Un doceavo de vuelta 0,52
b. Un octavo de vuelta $\frac{2\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$
c. Un sexto de vuelta $\frac{2\pi}{6}$ $\frac{\pi}{3}$
d. Un cuarto de vuelta $\frac{2\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$

3. Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además establece una ecuación que te permita el paso de un sistema de media a otro. ¿Cuál sería el valor de π medido en grados? De ejemplos que muestren el paso de un sistema a otro.

$\frac{\pi \cdot 40}{180}$

$\pi = \frac{360}{2} = 180°$

$\frac{2}{9}\pi = \pi = 180$

$\frac{\pi}{9}$ y cojo 2 partes únicamente

$90° = \frac{180° \quad \pi}{90° \quad x}$ $180 \cdot x = 90\pi$

$9x = 9\pi - 180$

Actividad No. 2

En esta actividad se dará un archivo en Geogebra (archivo No.1) que contiene la construcción de la Actividad No.1.

Deslice el punto C sobre la circunferencia (denominado punto terminal) en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener los siguientes grados, registre los valores en la siguiente tabla y conteste las siguientes preguntas.

$\frac{\pi \cdot 30}{180} = \frac{1}{6}$

$\frac{\pi \cdot 45}{180} \quad \frac{5}{20} \quad \frac{1}{4}$

$\frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{2}{6} \frac{1}{3}$

$\frac{\pi \cdot 90}{180} = \frac{1}{2}$

Grados	Arco de circunferencia t	Medida en radián	Coordenada y del punto terminal	correccion medida en radian
0°	0	0	0	
30°	0,52	0,52	0,05	$\pi/6$
45°	0,79	0,78	0,0.71	$\pi/4$
60°	1,05	1,04	0,0.87	$\pi/3$
90°	1,57	1,57	0,1	$\pi/2$

Tabla No. 1

Cuando se va a cambiar de grados a radianes, entonces el valor de π equivale a 180°, sin embargo hablando numéricamente π tiene una valor aproximado de 3.14. A partir de dicho valor y con la ayuda de la calculadora, convierte la medida en grados de los valores de la tabla. ¿Qué relación encuentras con la medida del arco de circunferencia t? – es la misma

0° = 0
30° = 0,52
45° = 0,78
60° = 1,04
90° = 1,57

Deslizando el punto C determina los valores de la coordenada y cuando t tiene un valor de:

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

3π	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	0.5
$\frac{\pi}{4}$	0.71
$\frac{\pi}{3}$	0.87

grado = [illegible]

Tabla No. 2

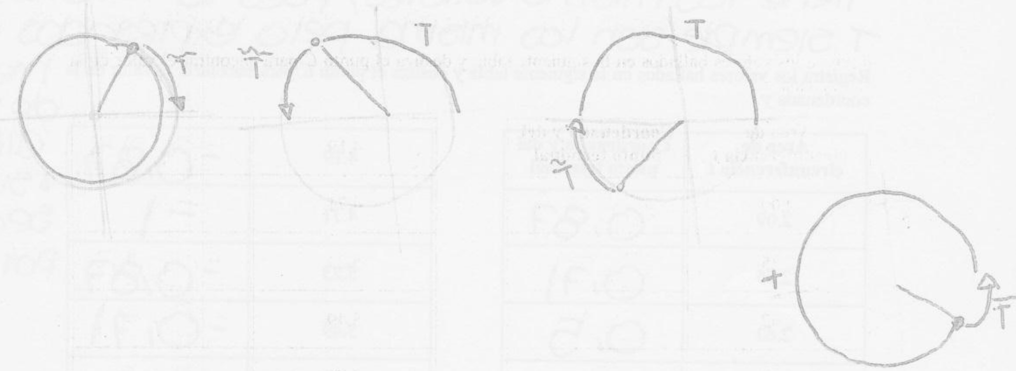
¿Cómo determino la ubicación del arco de la circunferencia t?

Se reemplazo π por 180° y se reemplazo π por 3,14

Actividad No. 3

Número de referencia. Supongamos que t es un número real. El número de referencia $\tilde{t}$ asociado con t, es la distancia más corta, a lo largo del circulo unitario, entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

De acuerdo a la anterior definición, esboce un gráfico que represente, cuál sería la distancia de $\tilde{t}$, si el punto terminal t está en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante (emplea un gráfico para cada cuadrante).



Deslice el punto C sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener las siguientes medidas y halle el valor de $\tilde{t}$.

Arco de circunferencia t	Valor de $\tilde{t}$
2.09	1,05
2.35	0,79
2.62	0,52
3.14	0
3.66	0,52
3.93	0,79
4.19	1,05

4.71	1,57
5.23	1,05
5.49	0,79
5.76	0,52
6.28	0
6.8	0,52
7.33	1,05
7.85	1,57

Tabla No. 3

4 cuadrante $\tilde{T}$ equivale a 2π - el valor de T

T = es la distancia mas corta al eje X

¿Cómo puedes determinar el valor de $\tilde{t}$?

1 cuadrante $\tilde{T}$ equivale a el valor de t
2 cuadrante es $\tilde{T}$ equivale a 3,14 - el valor de T
3 cuadrante $\tilde{T}$ equivale a 3,14 - el valor de t

¿Qué relación encuentras con la tabla No.1? ¿En qué se parece? ¿A qué crees que se deba esto?

obedece un patron - 0. 0,52. 0,79. 1,05. 1,57
Tiene los mismo valores, pues lo valores ~~son~~ T siempre son los mismo pero expresados con metodos de medicion diferentes. siempre se determina por π

Registra los valores hallados en la siguiente tabla y desliza el punto C para encontrar el valor de la coordenada y.

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
2.09	0,87
2.35	0,71
2.62	0,5
3.14	0
3.66	-0,5
3.93	-0,71

4.19	-0,87
4.71	-1
5.23	-0,87
5.49	-0,71
5.76	-0,5
6.28	0

Tabla No. 4

¿Qué relación encuentras con la tabla No 1? ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Por qué crees que se deba esto?

son los mismos valores, hay un Patron evidente, en este caso son negativo puesto que se encuentran abajo de X se relaciona con la columna de la Tabla #1 (coordenada y Punto ....)

Son ... hasta 2π y despues de π)

Actividad No. 4

Uso de la calculadora. Con la ayuda de tu docente, verifica el seno trigonométrico del valor de la longitud de arco t. Compara estos resultados con los obtenidos en la coordenada y de las tablas. ¿Qué concluyes?

que ~~θ~~ es igual o ~~1 decimal~~ aproximado al punto terminal

Nota: Debido a que el número π tiene infinitas cifras decimales, los resultados pueden estar por encima o por debajo una centésima del valor esperado.

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B $(f: A \to B)$ es una relación que asigna a todos los elementos de A un único elemento en B. Suele escribirse así,

$$y = f(x)$$

Donde x se llama variable independiente e y variable dependiente.

¿De acuerdo a la actividad realizada, cuáles crees tú son las variables dependientes e independientes?

T = independiente

T = depende de T

Coordenada y del punto = depende de t

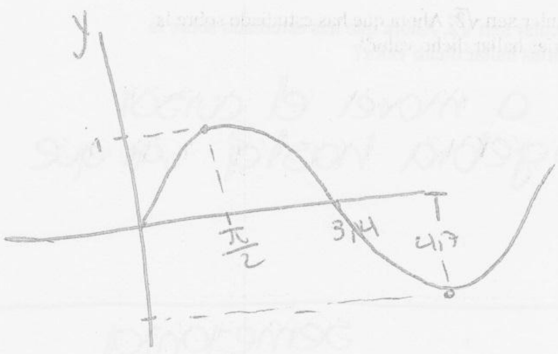
Se define función trigonométrica como la relación entre los valores de t y de y de la siguiente manera.

$$y = \sin(t)$$

Donde t es el valor de la longitud de arco y y la altura que alcanza.

¿Cómo crees que es la gráfica de la función trigonométrica seno? Usa el plano cartesiano para dibujarla.

Punto max = 1



Definición 2 Dominio: El dominio de una función es el conjunto de todos los números reales que puede tomar la variable independiente

Definición 3 Rango: El rango es el conjunto de números formado por todas las imágenes del dominio

Definición 4 Periodo: Algunas funciones tienen la propiedad que sus imágenes se repiten exactamente en el mismo orden, a igual intervalos del dominio. Este tipo de funciones se denominan funciones periódicas

A partir de las anteriores definiciones, halla el dominio, el rango y el periodo de la función seno.

- Dominio: infinito; Pero geogebra solo permite hasta 6,28 (2π)
- rango: $\geq 1 \leq -1$ (Punto maximo)
- Periodo: el periodo es cada 2π

En un archivo en Geogebra, grafica la función $y = \text{sen}\, x$, compara esta gráfica con la que realizaste. ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Qué concluyes?

es la misma, pero me di cuenta que es infinito.

Al inicio de la actividad se proponía calcular sen $\sqrt{2}$. Ahora que has estudiado sobre la función trigonométrica seno, ¿cómo podrías hallar dicho valor?

Con calculadora o mover el cursor grafico en geogebra hasta 1,91 que equivale a 2π

diferencia	semejanza
en la razon es dep	

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

¿Cómo calcularías sen $\sqrt{2}$?

SITUACION No. 2: EXPLORANDO EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

Actividad No.1

1. **Medición en grados.** Una vuelta completa de una circunferencia medida en grados equivale a 360°, a partir de este enunciado, responda explicitando el proceso realizado: A cuántos grados equivalen:

a. Un doceavo de vuelta $\rightarrow 30°$
b. Un octavo de vuelta $\rightarrow 45°$
c. Un sexto de vuelta $\rightarrow 60°$
d. Un cuarto de vuelta $\rightarrow 90°$

2. **Medición en radianes** La longitud de una circunferencia unitaria, es decir radio $r = 1$, mide 2π (para una circunferencia cualquiera de radio r su longitud es $2\pi r$). A partir de este enunciado halla la longitud de circunferencia para los siguientes ejercicios:

a. Un doceavo de vuelta $\rightarrow 0{,}52$
b. Un octavo de vuelta $\rightarrow \frac{2\pi}{8} = 0{,}78$
c. Un sexto de vuelta $\frac{2\pi}{6} = 1{,}04$
d. Un cuarto de vuelta $\rightarrow \frac{2\pi}{4} = 1{,}57$

3. Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además establece una ecuación que te permita el paso de un sistema de media a otro. ¿Cuál sería el valor de π medido en grados? De ejemplos que muestren el paso de un sistema a otro.

$2\pi r = 360°$

$\pi = \frac{360°}{2} = 180°$

Si quiero saber el valor de otros angulos

~~3~~ $\frac{3}{4}\pi = ?$

$\pi = 180$

$180 / 4 = 45 \quad 45 \cdot 3 = \boxed{135°}$

Para pasar de grados a radianes;

$2\pi \quad 360^\circ$
$x \quad 40^\circ$

$\dfrac{2\pi \cdot 40^\circ}{360^\circ} = 0{,}69$

Actividad No. 2

En esta actividad se dará un archivo en Geogebra (archivo No.1) que contiene la construcción de la Actividad No.1.

Deslice el punto C sobre la circunferencia (denominado punto terminal) en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener los siguientes grados, registre los valores en la siguiente tabla y conteste las siguientes preguntas.

Grados	Arco de circunferencia t	Medida en radián	Coordenada y del punto terminal
0°	0	0	0
30°	0,52		0.5
45°	0,79		0,71
60°	1,05		0,87
90°	1,57		1

Tabla No. 1

$\dfrac{\pi \cdot 30}{180} = \dfrac{\pi \cdot 3}{18} = \dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{\pi \cdot 45}{180} = \dfrac{\pi \cdot 9}{36} = \dfrac{3\pi}{12} =$

$\dfrac{\pi \cdot 60}{180} = \dfrac{\pi \cdot 6}{18} = \dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{\pi \cdot 90}{180} = \dfrac{\pi \cdot 9}{18} = \dfrac{\pi}{2}$

Cuando se va a cambiar de grados a radianes, entonces el valor de π equivale a 180°, sin embargo hablando numéricamente π tiene una valor aproximado de 3.14. A partir de dicho valor y con la ayuda de la calculadora, convierte la medida en grados de los valores de la tabla. ¿Qué relación encuentras con la medida del arco de circunferencia t?

$0^\circ \to 0$
$30^\circ \to 0{,}52$
$45^\circ \to 0{,}78$
$60^\circ \to 1{,}04$
$90^\circ \to 1{,}57$

El angulo corresponde a la medida del arco en radianes.

Deslizando el punto C determina los valores de la coordenada y cuando t tiene un valor de:

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

3π	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	0,5
$\frac{\pi}{4}$	0,71
$\frac{\pi}{3}$	0,87

Tabla No. 2

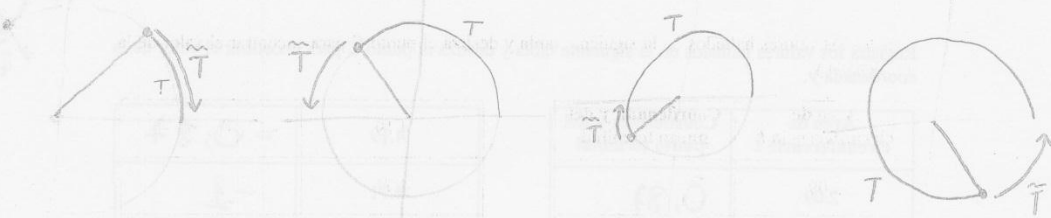
¿Cómo determino la ubicación del arco de la circunferencia t?

Reemplazar π por 180° y resolver la operación para hallar los grados.

Actividad No. 3

Número de referencia. Supongamos que t es un número real. El número de referencia $\tilde{t}$ asociado con t, es la distancia más corta, a lo largo del circulo unitario, entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

De acuerdo a la anterior definición, esboce un gráfico que represente, cuál sería la distancia de $\tilde{t}$, sí el punto terminal t está en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante (emplea un gráfico para cada cuadrante).



Deslice el punto C sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener las siguientes medidas y halle el valor de $\tilde{t}$.

Arco de circunferencia t	Valor de $\tilde{t}$
2.09	1,05
2.35	0,79
2.62	0,52
3.14	0
3.66	0,52
3.93	0,79
4.19	1,05
4.71	1,57
5.23	~~2,09~~ 1,05
5.49	~~2,35~~ 0,79
5.76	0,52
6.28	0
6.8	0,52
7.33	1,05
7.85	1,57

Tabla No. 3

¿Cómo puedes determinar el valor de $\tilde{t}$?

I cuadrante = $\tilde{t} = t$

II cuadrante = $\tilde{t} = \pi - t$

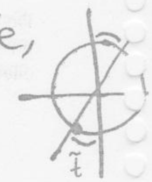
III cuadrante = $\tilde{t} = t - \pi$

IV = $\tilde{t} = 2\pi - t$

π representa la mitad de la circunferencia, por lo tanto 2π es toda la circunferencia.

¿Qué relación encuentras con la tabla No.1? ¿En qué se parece? ¿A qué crees que se deba esto?

$\tilde{t}$ toma los mismos valores de t en cada cuadrante,



Registra los valores hallados en la siguiente tabla y desliza el punto C para encontrar el valor de la coordenada y.

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
2.09	0,87
2.35	0,71
2.62	0,5
3.14	0
3.66	-0,5
3.93	-0,71

4.19	-0,87
4.71	-1
5.23	-0,87
5.49	-0,71
5.76	-0,5
6.28	0

Tabla No. 4

¿Qué relación encuentras con la tabla No 1? ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Por qué crees que se deba esto?

Son los mismos valores pero unos son positivos o negativos al cambiar de cuadrante, se esta calculado lo mismo, el valor de y en el punto terminal.

Actividad No. 4

Uso de la calculadora. Con la ayuda de tu docente, verifica el seno trigonométrico del valor de la longitud de arco t. Compara estos resultados con los obtenidos en la coordenada y de las tablas. ¿Qué concluyes?

El seno de longitud de arco es igual a el valor de la coordenada y en el punto terminal.

Nota: Debido a que el número π tiene infinitas cifras decimales, los resultados pueden estar por encima o por debajo una centésima del valor esperado.

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B $(f: A \to B)$ es una relación que asigna a todos los elementos de A un único elemento en B. Suele escribirse así,

$$y = f(x)$$

Donde x se llama variable independiente e y variable dependiente.

¿De acuerdo a la actividad realizada, cuáles crees tú son las variables dependientes e independientes?

t → ~~Independiente~~ de t

t → Independiente

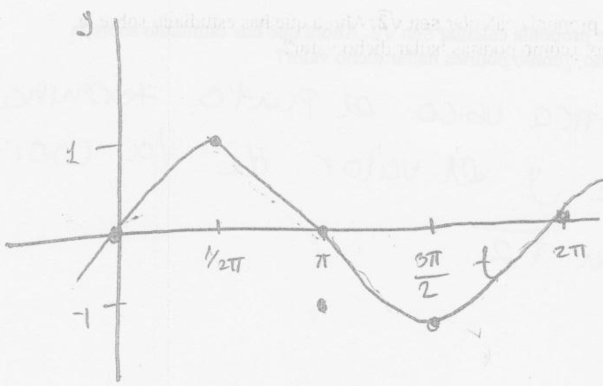
y → Dependiente de t

Se define función trigonométrica como la relación entre los valores de t y de y de la siguiente manera.

$$y = \sin(t)$$

Donde t es el valor de la longitud de arco y y la altura que alcanza.

¿Cómo crees que es la gráfica de la función trigonométrica seno? Usa el plano cartesiano para dibujarla.



Definición 2 Dominio: El dominio de una función es el conjunto de todos los números reales que puede tomar la variable independiente

Definición 3 Rango: El rango es el conjunto de números formado por todas las imágenes del dominio

Definición 4 Periodo: Algunas funciones tienen la propiedad que sus imágenes se repiten exactamente en el mismo orden, a igual intervalos del dominio. Este tipo de funciones se denominan funciones periódicas

A partir de las anteriores definiciones, halla el dominio, el rango y el periodo de la función seno.

* infinitos positivos y negativos, son los números reales $\mathbb{R}$
* El rango del seno de -1 a 1
* El periodo del seno es 2π o 6,28

En un archivo en Geogebra, grafica la función $y = \text{sen}\, x$, compara esta gráfica con la que realizaste. ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Qué concluyes?

Son las mismas, mi grafica solo muestra la grafica en los positivos pero la grafica en geogebra tambien muestra los negativos

Al inicio de la actividad se proponía calcular sen $\sqrt{2}$. Ahora que has estudiado sobre la función trigonométrica seno, ¿cómo podrías hallar dicho valor?

En la grafica ubico el punto terminal en $1,41 = \sqrt{2}$ y el valor de la coordenada y es sen $\sqrt{2}$

Juan G. Lopez

Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Universidad del Valle

Diseñado por:
Christian David Campo Marín
Luigi Alejandro Laso Munares

¿Cómo calcularías sen $\sqrt{2}$?

NO conosco la respuesta

SITUACION No. 2: EXPLORANDO EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.

Actividad No.1

1. **Medición en grados.** Una vuelta completa de una circunferencia medida en grados equivale a 360°, a partir de este enunciado, responda explicitando el proceso realizado: A cuántos grados equivalen:

a. Un doceavo de vuelta 360/12
b. Un octavo de vuelta 360 / 8
c. Un sexto de vuelta 360 / 6
d. Un cuarto de vuelta 360/4

2. **Medición en radianes** La longitud de una circunferencia unitaria, es decir radio $r = 1$, mide 2π (para una circunferencia cualquiera de radio r su longitud es $2\pi r$). A partir de este enunciado halla la longitud de circunferencia para los siguientes ejercicios:

a. Un doceavo de vuelta $2\pi/12 = \pi/6$
b. Un octavo de vuelta $2\pi/8 = \pi/4$
c. Un sexto de vuelta $2\pi/6 = \pi/3$
d. Un cuarto de vuelta $2\pi/4 = \pi/2$

3. Establece una relación para los valores de las preguntas 1 y 2. Además establece una ecuación que te permita el paso de un sistema de media a otro. ¿Cuál sería el valor de π medido en grados? De ejemplos que muestren el paso de un sistema a otro.

* $\frac{180}{\circ} = \frac{\pi}{x} = \frac{180x}{\pi^\circ}$

* $\frac{2\pi \cdot 40}{360^\circ} = \frac{80\pi}{360}$ $\frac{4}{18}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{2\pi}{9}$

* $\pi = 180$
$180 / 4 = 45$

$\boxed{135^\circ}$

Actividad No. 2

En esta actividad se dará un archivo en Geogebra (archivo No.1) que contiene la construcción de la Actividad No.1.

Deslice el punto C sobre la circunferencia (denominado punto terminal) en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener los siguientes grados, registre los valores en la siguiente tabla y conteste las siguientes preguntas.

Grados	Arco de circunferencia t	Medida en radián	Coordenada y del punto terminal
0°	0	0	0
30°	0, 52	$\frac{1}{6}\pi$	0,5
45°	0,79	$\frac{1}{4}\pi$	0,71
60°	1,05	$\frac{1}{3}\pi$	0,87
90°	1,57	$\frac{1}{2}\pi$	1

Tabla No. 1

Cuando se va a cambiar de grados a radianes, entonces el valor de π equivale a 180°, sin embargo hablando numéricamente π tiene una valor aproximado de 3.14. A partir de dicho valor y con la ayuda de la calculadora, convierte la medida en grados de los valores de la tabla. ¿Qué relación encuentras con la medida del arco de circunferencia t?

° = Abertura

Radiales = longitud de "t"

Deslizando el punto C determina los valores de la coordenada y cuando t tiene un valor de:

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
$\frac{\pi}{2}$	1,
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

3π	0
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{6}$	0,49
$\frac{\pi}{4}$	0,07
$\frac{\pi}{3}$	0,86

Tabla No. 2

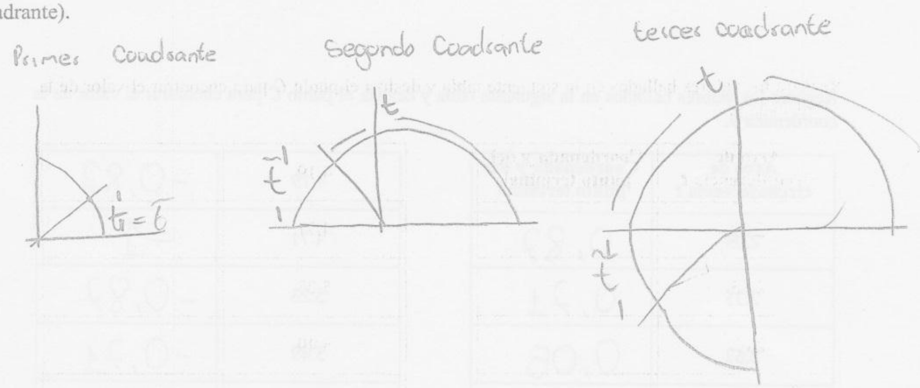
¿Cómo determino la ubicación del arco de la circunferencia t?

Dandole el valor real a π

Actividad No. 3

Número de referencia. Supongamos que t es un número real. El número de referencia $\tilde{t}$ asociado con t, es la distancia más corta, a lo largo del circulo unitario, entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

De acuerdo a la anterior definición, esboce un gráfico que represente, cuál sería la distancia de $\tilde{t}$, si el punto terminal t está en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante (emplea un gráfico para cada cuadrante).



Deslice el punto C sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj hasta obtener las siguientes medidas y halle el valor de $\tilde{t}$.

Arco de circunferencia t	Valor de $\tilde{t}$
2.09	1,05
2.35	0,79
2.62	0,52
3.14	0
3.66	0,52
3.93	1,05
4.19	0,79
4.71	1,57
5.23	1,05
5.49	0,79
5.76	0,52
6.28	0
6.8	0,52
7.33	1,05
7.85	0,79

Tabla No. 3

¿Cómo puedes determinar el valor de $\bar{t}$?

Primer cuadrante - Es el valor de "t"
Segundo y tercer cuadrante - Se resta el valor de "t" a π
Cuarto cuadrante - equivale a 2π menos el valor de t

¿Qué relación encuentras con la tabla No.1? ¿En qué se parece? ¿A qué crees que se deba esto?

Los valores son los mismo, pues todo esta relacionado

Registra los valores hallados en la siguiente tabla y desliza el punto C para encontrar el valor de la coordenada y.

Arco de circunferencia t	Coordenada y del punto terminal
2.09	0,87
2.35	0,71
2.62	0,05
3.14	0
3.66	-0,5
3.93	-0,71

4.19	-0,87
4.71	-1
5.23	-0,87
5.49	-0,71
5.76	-0,5
6.28	0

Tabla No. 4

¿Qué relación encuentras con la tabla No 1? ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Por qué crees que se deba esto?

A partir de 3,14 todos los valores son iguales, ~~al arco de e.~~ a Cordenada y del punto terminal Son negativos pues se encuentran por debajo del eje x

Actividad No. 4

Uso de la calculadora. Con la ayuda de tu docente, verifica el seno trigonométrico del valor de la longitud de arco t. Compara estos resultados con los obtenidos en la coordenada y de las tablas. ¿Qué concluyes?

El θ es igual al punto terminal

Nota: Debido a que el número π tiene infinitas cifras decimales, los resultados pueden estar por encima o por debajo una centésima del valor esperado.

Definición: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B $(f: A \rightarrow B)$ es una relación que asigna a todos los elementos de A un único elemento en B. Suele escribirse así,

$$y = f(x)$$

Donde x se llama variable independiente e y variable dependiente.

¿De acuerdo a la actividad realizada, cuáles crees tú son las variables dependientes e independientes?

Coordenada y del punto -> Dependiente
t -> Independiente
$\tilde{t}$ -> Dependiente de ubicación de t

Se define función trigonométrica como la relación entre los valores de t y de y de la siguiente manera.

$$y = \sin(t)$$

Donde t es el valor de la longitud de arco y y la altura que alcanza.

¿Cómo crees que es la gráfica de la función trigonométrica seno? Usa el plano cartesiano para dibujarla.

Definición 2 Dominio: El dominio de una función es el conjunto de todos los números reales que puede tomar la variable independiente

Definición 3 Rango: El rango es el conjunto de números formado por todas las imágenes del dominio

Definición 4 Periodo: Algunas funciones tienen la propiedad que sus imágenes se repiten exactamente en el mismo orden, a igual intervalos del dominio. Este tipo de funciones se denominan funciones periódicas

A partir de las anteriores definiciones, halla el dominio, el rango y el periodo de la función seno.

El dominio de la grafica es infinito, aunque geogebra no nos permite identificarlo, solo nos permite llegar a 6,28 es decir 2π.

El rango es ≥ 1 y ≤ -1

El periodo de la funcion se repite cada 2π (6,28)

En un archivo en Geogebra, grafica la función $y = \text{sen}\, x$, compara esta gráfica con la que realizaste. ¿En qué se parece? ¿En qué difiere? ¿Qué concluyes?

Al inicio de la actividad se proponía calcular sen $\sqrt{2}$. Ahora que has estudiado sobre la función trigonométrica seno, ¿cómo podrías hallar dicho valor?