

LA INCIDENCIA DE UN SOFTWARE EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO MULTIVARIABLE, UN ESTUDIO DE CASO

Giovanni Ruiz Faúndez, Andrea Seoane, Alejandro Lois, Liliana Milevicich

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco.(Argentina)

gruizfaundez@yahoo.com.ar, seoane_andrea@yahoo.com.ar, alois@frgp.utn.edu.ar lmilevicich@frgp.utn.edu.ar

Palabras clave: cálculo multivariable, recursos tecnológicos, estrategias.

Keywords: multivariable calculus, technological resources, strategies.

RESUMEN

En nuestra investigación vinculada a la incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería, abordamos un estudio de caso longitudinal con enfoque mixto, sobre la incidencia del software en las producciones de los alumnos. Nuestros objetivos fueron: describir las estrategias vinculadas al uso de un Sistema Algebraico Computacional que utilizan los alumnos en la resolución de problemas; y analizar el nivel de incidencia de su uso en las producciones de los alumnos. La toma de datos en dos etapas, nos permitió analizar la evolución de cada grupo y observar que la decisión sobre la utilización o no-utilización del software estuvo vinculada a la necesidad del mismo como herramienta. Esto nos permite afirmar que no se observa una dependencia ni automatización en el uso del mismo.

ABSTRACT

In our research related to the incorporation of new technologies in the teaching of Mathematics in engineering careers, we carried out a longitudinal case and mixed study on the impact of the software in student productions. Our objectives were to describe the strategies involving the use of a computer algebra system used by students in solving problems; and analyze the level of incidence of use in student productions. The data collection in two stages, allowed us to analyze the evolution of each group and note that the decision about using or not using the software was linked to the need for it as a tool. This allows us to state that it is not observed an automation or dependence on the use of the tool.

■ Introducción

En el marco de los trabajos que nuestro equipo de investigación viene desarrollando, vinculados a la incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería, abordamos un estudio de caso longitudinal (tres meses de diferencia entre las etapas para la toma de datos) con un enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo), en relación con el modo en que los alumnos utilizan el software.

Inicialmente se planteó un problema de investigación: *¿Cuál es la incidencia del software en las producciones de los alumnos?* En ese sentido planteamos los siguientes objetivos:

1. Describir las estrategias que utilizan los alumnos en la resolución de problemas, vinculadas al uso de un Sistema Algebraico Computacional (CAS).
2. Analizar el nivel de incidencia del uso de un CAS en las producciones de los alumnos.

■ Antecedentes

Existen diversos estudios referidos al problema de incorporar nuevos recursos tecnológicos, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior (Milevicich y Lois, 2008, 2011a y 2011b). Pero, resultan escasos los estudios referidos al modo en que aprenden los alumnos y cómo hacen uso de los recursos tecnológicos.

Mencionamos aquí, algunas teorías y trabajos focalizados en la importancia del entorno y los modos de incorporación de profesores y alumnos en los nuevos contextos tecnológicos, en los cuales se enmarca la presente investigación.

- La tecnología podría ser un puente entre una pedagogía innovadora y las prácticas actuales, esto es: una herramienta que permite crear un nuevo marco de acción para el profesor y para el alumno, actuando como un nuevo lenguaje que redefine el acto de enseñar y de aprender (Hinostroza, García y Laval, 2003; Milevicich, 2012).
- Centrándose en el acto de aprender, las tendencias actuales coinciden en argumentar que el alumno realice actividades, resuelva problemas que le permitan comprender los procesos y principios subyacentes. Plantean la importancia de mantener el foco en el conocimiento generativo, es decir, aquel que permite a las personas interactuar con el mundo (Perkins, 1992). Estas tendencias implican que no basta con presentar un conjunto de actividades asociados al uso de un software para su resolución. Por el contrario, es necesario promover el desarrollo de actividades diversas, que tengan sentido para los alumnos en sus propios contextos y que propendan al desarrollo de habilidades superiores. Este escenario implica que el proceso de aprendizaje requiere de un conjunto de actividades que se complementan con el uso de un software para lograr un aprendizaje efectivo, el cual debe ser utilizado por los alumnos según sus necesidades (Milevicich, 2012).

■ Metodología

Nuestro campo de estudio ha sido la cátedra Análisis Matemático II de la carrera de Ingeniería Eléctrica de la Facultad Regional General Pacheco (FRGP) y nuestra unidad de análisis, los alumnos que cursan tal asignatura, y que provienen de los dos cursos de Ingeniería Eléctrica de primer año. Un curso o comisión ha cursado Análisis Matemático I con la incorporación de un Sistema Algebraico Computacional (CAS)

como herramienta, no sólo para la resolución de las guías de trabajos prácticos, sino en las evaluaciones parciales de la materia. La segunda comisión cursó la materia de manera tradicional.

En pos de un mejor control sobre la experiencia y una mayor confiabilidad de los resultados, se optó por formar dos grupos: los alumnos que tenían experiencia previa en el uso del software (Grupo I) y los que no contaban con esta experiencia (Grupo II). Ambos grupos resultaron similares en la cantidad de alumnos: el Grupo I estuvo formado por 12 alumnos y el Grupo II por 8 alumnos.

Cabe observar que los alumnos pudieron utilizar un CAS, integrado a todas las actividades de la materia, tanto para la resolución de las guías de trabajos prácticos, como para realizar las evaluaciones. La cátedra recomienda la utilización del software Mathematica, pero cada alumno es libre de elegir el software que considere más pertinente, utilizar calculadoras de pantalla gráfica e, inclusive, resolver la guía de trabajos prácticos en su totalidad sin el uso de ningún software.

■ Recolección de datos

Los instrumentos para la recolección de datos fueron las evaluaciones correspondientes a las unidades temáticas Funciones Vectoriales e Integrales Múltiples, unidad 1 (U1) y unidad 3 (U3) respectivamente. Entre la primera y la tercera evaluación hubo una diferencia temporal de tres meses. Además de las producciones escritas (papel y lápiz), se consideraron también los archivos electrónicos de cada alumno.

En relación con los objetivos de la investigación, la descripción de las estrategias vinculadas al uso de un CAS, adoptamos tres categorías que consideramos representativas y permitieran clasificar las estrategias utilizadas por los alumnos en sus producciones. Estas son emplear la computadora: como graficadora (gráficas en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas o esféricas, en 2 o 3 dimensiones), como calculadora (para realizar operaciones aritméticas) y como sistema algebraico computacional (para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones, calcular derivadas, integrales o la norma de vectores).

A medida que se avanzó en el análisis de datos de la U3, surgió un nuevo interrogante: *¿Cuáles son las razones por las cuales algunos alumnos deciden no utilizar el software para la resolución de los ejercicios?* Por esta razón, se indagó por escrito sobre los motivos de tal decisión a aquellos que no hicieron uso del software en estos problemas, de manera de indagar cualitativamente sobre estas razones.

■ Descripción de los instrumentos

Problemas de la Unidad I: Funciones vectoriales.

Ejercicio 1

a) Encuentre una función vectorial que represente la curva intersección entre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1 + y$.

En primera instancia el alumno puede utilizar el software para graficar las superficies y visualizar la situación planteada en el ejercicio, tal como se observa en la figura 1.

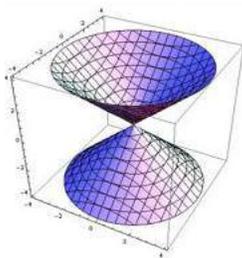
Para hallar la curva intersección solicitada, los alumnos pueden resolver el sistema de ecuaciones

compatible indeterminado $\begin{cases} z = 1 + y \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$, donde a partir de la parametrización del sistema ($x = t$), la

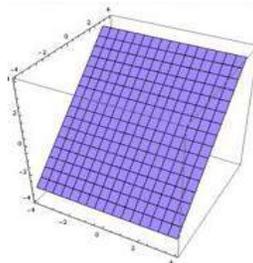
solución corresponde a la curva $r(t) = \left\langle t, \frac{t^2 - 1}{2}, \frac{t^2 + 1}{2} \right\rangle$

Para verificar que esta curva es realmente la intersección pedida, el alumno puede graficarla individualmente o junto con las superficies intersecadas, tal como se observa en la figura 2.

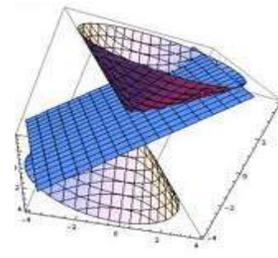
Figura 1. (a) corresponde a la gráfica del cono. (b) corresponde a la gráfica del plano. (c) corresponde a la gráfica de ambas superficies.



(a)

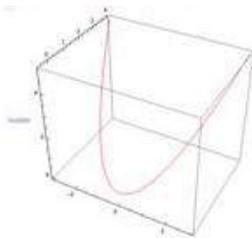


(b)

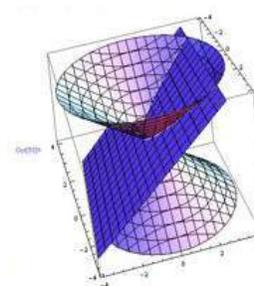


(c)

Figura 2. (a) corresponde a la gráfica de la curva $r(t)$, intersección entre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1 + y$. (b) corresponde a la superposición de la gráfica de la curva $r(t)$ con la intersección de las superficies.



(a)



(b)

b) Para $0 \leq t \leq 2\pi$ explique si la curva es suave.

En este caso se debe derivar la curva $r(t)$ hallada en el ítem anterior y analizar si es continua y si su norma es diferente de cero. El software puede utilizarse para calcular la derivada, la norma y resolver la desigualdad.

Ejercicio 2

Identifique la curva $r(t) = \left\langle \text{Cos}(t), \text{Sen}(t), \frac{t}{4} \right\rangle$, y encuentre su longitud entre los puntos $(1,0,0)$ y $(-1,0,\pi/4)$.

Para hallar la longitud pedida, se necesita calcular la derivada de la curva, su norma y la integral definida de la misma. El software puede ser útil en la identificación de la curva a través de su gráfica y también para derivar la función vectorial, calcular su norma y hallar el valor de la integral.

Problema de la Unidad III: Integrales múltiples

Ejercicio 1

Encuentre el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $y = 3x$, $y = 0$, $z = 0$.

En este problema se puede utilizar el software para graficar las superficies y visualizar la región a la cual se le debe calcular el volumen. Esto facilita la identificación del dominio de integración para plantear la integral a resolver mediante el software.

■ Pregunta posterior

Por último, se realizó una breve encuesta a los alumnos luego del análisis de los exámenes. Se les preguntó sobre *las razones por las cuáles no habían utilizado el software para graficar las superficies en 3 dimensiones en la resolución del examen*.

■ Análisis de datos y resultados

Luego del análisis de las producciones de los alumnos, pudimos realizar las siguientes observaciones:

En relación con el examen de la Unidad I:

- Ningún alumno del Grupo I y del Grupo II resolvió el sistema de ecuaciones correspondiente al ejercicio 1 con ayuda del software.
- Todos los alumnos del Grupo I utilizaron el software en al menos una resolución, mientras que en el Grupo II, dos alumnos no lo usaron en ninguno de los ejercicios analizados.
- Ningún alumno del Grupo II graficó las superficies en 3 dimensiones del ejercicio 1 con ayuda del software. En cambio, en el Grupo I tres alumnos graficaron estas superficies con ayuda del software y otros dos alumnos graficaron la curva intersección buscada. Sin embargo, ningún alumno realizó el dibujo de las superficies en simultáneo con la curva (ver figura 2.b), lo cual permitía verificar, de manera gráfica, si la curva encontrada analíticamente era la correcta.
- En el ejercicio 2, donde era necesario derivar, hallar una norma e integrar; seis alumnos del Grupo I utilizaron el software en algunas operaciones y otras las resolvieron con lápiz y papel, lo cual podría indicar la ausencia de una automatización en el uso del software en estos alumnos. En el Grupo II un alumno realiza el proceso de dos modos diferentes, manual y con software. Los restantes integrantes del grupo II eligieron un único camino, algunos utilizaron resolución sólo manual y otros, sólo software.

En relación con el examen de la Unidad III:

- La mayoría de los alumnos de ambos grupos no utiliza el software para graficar, ni las curvas en el plano ni las superficies en 3 dimensiones.
- Tampoco utilizan el software para realizar operaciones algebraicas (resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones) ni aritméticas.
- Sin embargo, todos los alumnos resuelven las integrales con ayuda del software.

En Relación con la pregunta posterior:

Un alumno afirmó que no usó el software para graficar superficies porque no es de su agrado la utilización de las herramientas informáticas. El resto de los encuestados, explicó que no fue necesario su uso, debido a que los ejercicios propuestos permitían la realización del gráfico con lápiz y papel en forma más rápida y sencilla.

■ **Cuadro de análisis**

A partir del análisis de los exámenes de ambas unidades, se confeccionó la tabla 1 donde aparecen las categorías antes descriptas en relación con el uso del software.

De acuerdo a lo que se observa en la Tabla 1, se pueden establecer distintas comparaciones, calculando los porcentajes en base al total de alumnos de cada grupo, 12 y 8 respetivamente para los grupos I y II:

- **Comparación entre los exámenes U1 y U3 correspondientes al Grupo I:** se observa una disminución en el uso del software como graficadora (del 100% en la U1 al 33% en la U3) y como calculadora (del 25% en la U1 al 0% en la U3) y un incremento en su uso como herramienta de cálculo algebraico (del 83% en la U1 al 100% en la U3).
- **Comparación entre los exámenes U1 y U3 correspondientes al Grupo II:** se observa una importante disminución en el uso del software como graficadora (del 63% en la U1 al 0% en la U3). Del mismo modo en su uso como calculadora (del 38% en la U1 al 0% en la U3). Sin embargo se observa un leve aumento en su utilización como sistema algebraico (del 63% en la U1 al 100% en la U3)
- **Comparación entre los Grupos I y II respecto del examen de la Unidad 1:** todos los alumnos del Grupo I y un porcentaje importante en el Grupo II utiliza el software para graficar (100% en Grupo I y 63% en el Grupo II) y como CAS (83% en Grupo I y 63% en el Grupo II). Muy pocos alumnos lo usan para realizar operaciones aritméticas (25% en Grupo I y 38% en el otro).
- **Comparación entre los Grupos I y II respecto del examen de la Unidad 3:** se puede ver que el 33% de los alumnos utilizó el software como graficadora en el Grupo I y el 0% en el Grupo II. En ninguno de los dos grupos se utiliza el software para resolver operaciones aritméticas. Todos los alumnos de ambos grupos lo usan como un sistema algebraico.

Tabla 1. Uso del software en función de las categorías en las unidades I y III

Uso del software			Grupo I (experiencia previa con CAS en primer año)		Grupo II (sin experiencia previa con CAS en primer año)	
			Unidad 1	Unidad 3	Unidad 1	Unidad 3
Graficadora	Sí	Visualización	10	4	4	0
		Verificación	2	0	1	0
	No		0	8	3	8
Calculadora (Operaciones aritméticas)	Sí		3	0	3	0
	No		9	12	5	8
Sistema Algebraico (Derivación, Integración, Cálculo de la norma de un vector, resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones)	Sí		10	12	5	8
	No		2	0	3	0

■ Conclusiones y trabajos futuros

En los problemas de la U1, es posible que la decisión sobre el uso o no uso del software haya estado vinculada a la experiencia y pericia en el uso del mismo. De allí la diferencia entre el Grupo I, habituado a su uso, y el Grupo II, recién iniciados en él. Tres meses después, para resolver los problemas de la U3 ambos grupos optaron, por la incorporación del software al momento de tener que resolver integrales dobles y triples.

El software fue escasamente utilizado para graficar, ya sea para visualizar el problema propuesto o bien verificar la solución obtenida. Los resultados obtenidos a partir del cuadro de análisis y lo expresado por los alumnos en la encuesta, permiten afirmar que la visualización del problema mediante el software no ha sido necesaria para la resolución en ningún caso. En relación con el contexto, la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior, es posible que los alumnos no confíen en los resultados gráficos y privilegien los procesos de resolución analítica.

No se ha utilizado el software como calculadora o bien, se ha utilizado escasamente. Los alumnos prefirieron las herramientas tradicionales: lápiz, papel y/o una calculadora sencilla para los cálculos aritméticos.

La toma de datos en dos etapas y con tres meses de diferencia, nos ha permitido analizar la evolución de cada grupo. Si bien la “amigabilidad” con el software es un condicionante siempre presente, la decisión sobre su utilización o no, estuvo vinculada a la necesidad del mismo como herramienta. Concluimos que no se observa una dependencia ni automatización en el uso del software.

En relación con la continuidad de esta investigación:

Sería necesario replicar la experiencia en un contexto similar, y quizás, con un mayor número de alumnos.

En segundo lugar, ampliar la toma de datos a tres o más etapas, de tal modo que se puedan obtener nuevas conclusiones o bien reforzar las obtenidas, sobre la evolución en el uso del software.

■ Referencias bibliográficas

Hinostroza, E., García Huidobro C. y Laval, E. (2003). Developing educational software: A professional tool perspective. *Education and Information Technologies*, 5 (2), 1-15.

Milevicich, L. y Lois, A. (2008). La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral desde la perspectiva del nuevo paradigma de la sociedad del conocimiento. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47 (5), 1-15.

Milevicich, L. y Lois, A. (2011a). *El aprendizaje de los conceptos matemáticos en entornos virtuales. Repositorio de la Universidad Nacional de la Plata. SEDICI.*

Recuperado el 30 de noviembre de 2011 de:

http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/18422/Documento_completo__.pdf?sequence=1.

Milevicich, L. y Lois, A. (2011b). La educación a distancia como recurso adicional para cursos iniciales de ingeniería. *Repositorio de la Universidad Nacional de la Plata. SEDICI.*

Recuperado el 30 de noviembre de 2011 de:

<http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/18421>

Milevicich, L. (2012). *Enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Una propuesta para cursos iniciales en la universidad.* Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

Perkins, A. (1992). En B. Eyzaguirre (Ed.). Una mirada a la reforma curricular. *Revista de Estudios Públicos*, 26, 263- 296.