RESOLVIENDO PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. ESTRATEGIAS Y HERRAMIENTAS

Giovanni Ruiz Faúndez, Andrea Seoane, Alejandro Lois, Liliana Milevicich

Universidad Tecnológica Nacional. (Argentina)

gruizfaundez@yahoo.com.ar, seoane_andrea@yahoo.com.ar, alelois@hotmail.com, liliana_milevicich@yahoo.com.ar

Palabras claves: resolución de problemas, nuevas tecnologías, aprendizaje significativo

Key words: problem solving, new technologies, meaningful learning

RESUMEN

Este trabajo surge del dictado del taller sobre resolución de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, estrategias y herramientas, durante RELME 28. En la elaboración de la propuesta y posterior desarrollo del mismo, se tuvo en cuenta que la posibilidad de resolver un problema depende, mayormente, de la adopción de un modo apropiado de encarar el mismo, y que esta característica ofrece un amplio campo de estudio del problema desde distintas perspectivas.

Los objetivos son: en primer lugar, corroborar si los docentes integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas; y en segundo lugar, comprobar si los procesos de conjeturación, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas.

ABSTRACT

This paper stems from the workshop about Differential and Integral Calculus Solving problems, strategies and tools, dictated during RELME 28. In developing the proposal it was taken into account that the possibility of solving a problem depends, mostly, of an appropriate way of dealing with it, and that this feature offers a wide field of study of the problem from different perspectives.

The objectives are: first, to verify if teachers integrate different representations (graphical, numerical and algebraic) to solve problems; and secondly, to check whether processes of conjecturing, testing, simulation and verification are performed in solving problems with computer tools.

Antecedentes

El presente artículo se enmarca en los trabajos realizados como parte de nuestra línea de investigación sobre la resolución de problemas en la Educación Superior, con incorporación de tecnología informática. En ese sentido, se han presentado propuestas en la modalidad de cursos y talleres en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa de los años 2013 y 2014. A saber:

- Taller en la RELME XXVI en Belo Horizonte, Brasil referido a Enseñar matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico. (Lois, Milevicich, Rodríguez y de la Villa, 2013)
- Curso Corto, en el recién mencionado congreso, denominado: La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas. El nuevo paradigma. ¿Es una oportunidad de cambio o un simple engaño? (Lois, Milevicich, Rodríguez y de la Villa, 2013)
- Taller en RELME XXVIII en Buenos Aires, Argentina, denominado: Ecuaciones diferenciales ordinarias en Ingeniería: soluciones utilizando un CAS (Lois, Milevicich, Rodríguez y de la Villa, 2014)

Introducción

Ausubel (2001) propone que una de las primera tareas nuestras como profesores, es promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje, de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, la utilización de recursos computacionales, amplía las posibilidades de selección de nuevas propuestas de actividades que tengan en cuenta las dificultades y la habitual desmotivación de los alumnos, de modo que les ayude a superarlas y propiciar condiciones favorables para el aprendizaje significativo.

Numerosos estudios indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza del Cálculo en la Educación Superior, fuertemente orientada hacia la solución analítica, generan un aprendizaje mecánico, sin que el alumno perciba su potencial y su importancia como una herramienta matemática para resolver problemas prácticos. Los recursos computacionales disponibles en la actualidad permiten ir más allá de la mera aplicación de técnicas para resolución, eso puede ayudar a los alumnos a centrarse más en la interpretación de las soluciones en relación a los fenómenos que pretenden representar.

El mismo concepto o la misma proposición pueden expresarse de diferentes maneras a través de diferentes registros, equivalentes en términos de significados. Así, un aprendizaje significativo no puede depender del uso exclusivo de determinados signos en particular (Ausubel, 2001).

En ese sentido, en consonancia con las observaciones de Ausubel, Novak y Hanesian, (1980):

- El contenido a ser aprendido debe ser potencialmente significativo, relacionado con experiencias, hechos u objetos.
- El alumno debe poseer conocimientos relevantes que sirvan de "anclaje" para los nuevos conocimientos.
- El alumno debe elegir relacionar intencionalmente el material nuevo con la estructura que ya posee.

Este trabajo surge del dictado del taller sobre resolución de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, estrategias y herramientas, durante RELME 28. En la elaboración de la propuesta y posterior desarrollo del mismo, tuvimos en cuenta que la posibilidad de resolver un problema depende, mayormente, de la adopción de un modo apropiado de encarar el mismo, y que esta característica ofrece un amplio campo de estudio del problema desde distintas perspectivas.

Una de tales perspectivas, de suma importancia, a nuestro juicio, tiene que ver con la habilidad de cambiar de "registro de representación" (Duval, 1999; Milevicich, 2008) en situaciones de resolución de problemas, ya sea porque otra presentación de los datos encaja mejor con un modelo ya conocido, o porque se deben poner en juego dos registros diferentes.

Desarrollo

En relación con el dictado del taller sobre resolución de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, estrategias y herramientas, que dio origen al presente trabajo, se plantearon los siguientes objetivos:

1. Trabajar con los participantes en la resolución de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, integrando las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica).
2. Analizar grupalmente la incorporación de los procesos de conjeturación, experimentación, simulación y verificación, en la resolución de problemas con herramientas informáticas.
3. Comparar diferentes estrategias de resolución utilizadas por diferentes grupos.

Se utilizó el paquete Mathematica como CAS. A la vista de la heterogeneidad de los participantes, en cuanto a su conocimiento, se acordó organizar el trabajo en pequeños grupos y dedicar unos minutos iniciales para que pudieran habituarse al uso del manual de ayuda disponible con el software y al acceso directo a la estructura de cada comando.

El taller tuvo una asistencia de 14 participantes, que se desempeñan como docentes de Matemática del nivel secundario y universitario.

Se contó con dos sesiones de trabajo de 90 minutos. Se conformaron 4 grupos de 3 ó 4 integrantes, todos trabajaron sobre los mismos problemas con una puesta en común al cierre de cada sesión.

El propósito del presente trabajo es:
En primer lugar, corroborar si los docentes integran las diferentes representaciones (gráfica, numérica y algebraica) en la resolución de problemas.

En segundo lugar, comprobar si los procesos de conjeturación, experimentación, simulación y verificación, se llevan a cabo en la resolución de problemas con herramientas informáticas.

Luego de la presentación de cada problema, se solicitó a cada grupo que trabajara sobre:

1. La propuesta de diferentes estrategias que pudieran ser útiles en la resolución del problema.
2. La selección de las estrategias más adecuadas.
3. La resolución del problema utilizando las estrategias propuestas.
4. La verificación de los resultados obtenidos y finalmente, la puesta en común y la obtención de conclusiones.

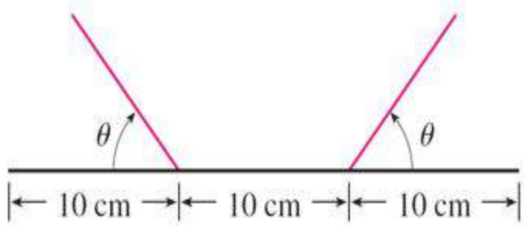
A modo de ejemplo se presenta, por razones de espacio, el proceso desarrollado en sólo uno de los problemas sobre los cuales se trabajó. El enunciado:

Se debe construir un canalón para lluvia a partir de una lámina metálica que tiene 30 cm de ancho, doblando la tercera parte de la lámina de cada lado hasta que forme un ánguloθ. ¿Cómo debe elegirse θ para que el canalón lleve la cantidad máxima de agua?

Estrategias posibles

1. Un esbozo gráfico del problema permite circunscribir el problema, identificar datos e incógnitas, tal como se observa en la figura 1.

Figura 1. Gráfico de la lámina metálica doblada en 3 partes iguales con la indicación del ángulo θ, incógnita del problema.



2. El modelo matemático se asocia al planteo de una función que represente el área, a partir de una sección transversal del canalón. Dicha función debe depender de la variable del problema:θ. Entonces: $A(\theta)=(10+10+2*10*\cos(\theta))*10*\sin(\theta)/2$
3. La determinación del dominio de la función está asociado a la acotación de valores mínimo y máximo para el ángulo θ. (θ debe ser mayor que 0 para que circulación de agua sea posible y debe ser menor o igual que 120° de tal manera que tenga sentido el triángulo, equilátero, de lado 10 cm., que de forma al tocarse los bordes).
4. La aproximación numérica (Figura 2) permita indagar el comportamiento de la función en su dominio y acotar el intervalo solución. Se observa que el valor máximo de la función corresponde a un valor próximo a $\pi/3$

Figura 2. Tabla de valores para $A[\theta]=5(20+20\text{Cos}[\theta])\text{Sin}[\theta]$ en el intervalo [0, 2/3 π]

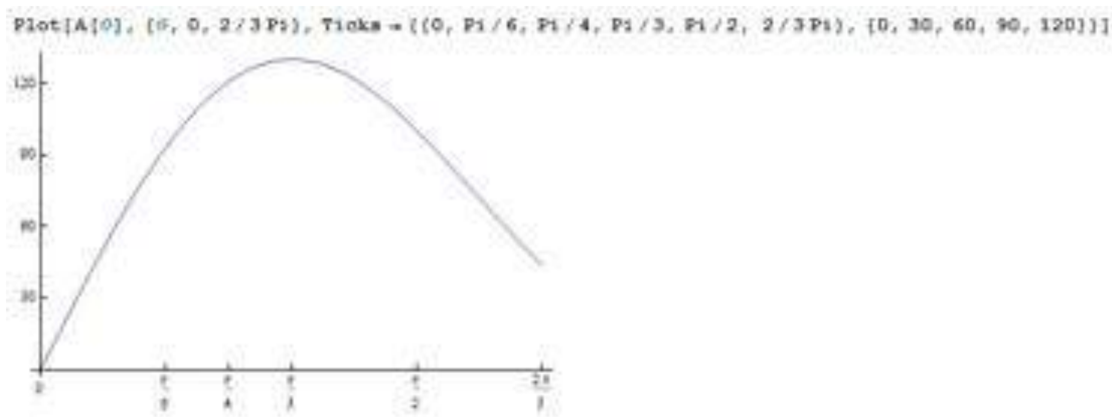
```
TableForm[Table[{θ, (10 + 10 + 2 * 10 * Cos[θ]) * 10 * Sin[θ] / 2 // N}, {θ, 0, 2 / 3 π, π / 6}],
 TableHeadings → {None, {"θ", "A[θ]"}}]
```

//TableForm=

θ	A[θ]
0	0.
$\frac{\pi}{6}$	93.3013
$\frac{\pi}{3}$	129.904
$\frac{\pi}{2}$	100.
$\frac{2\pi}{3}$	43.3013

5. El gráfico de la función área permita corroborar los valores numéricos obtenidos (figura 3).

Figura 3. Gráfico de $\mathbf{A[\theta] = 5(20 + 20Cos[\theta])Sin[\theta]}$ en el intervalo [0, 2/3 π]



6. La resolución analítica consiste en la determinación de todos los puntos críticos en el domino de la función. Dado que se trata de una suma y producto de funciones senos y cosenos, su derivada existe y en el dominio de la función [0, 2/3 π] existe un único punto crítico, que es en donde la derivada se anula. Determinar este punto y verificar que se trata de un máximo lo podemos observar en la figura 4.

Figura 4. Cálculo del punto crítico y verificación que se trata de un máximo local mediante el método de la derivada segunda.

```
FindRoot[A'[θ] == 0, {θ, 1}]
{θ → 1.0472}

A''[1.0472]
-259.807
```

■ Reformulación del problema inicial

Si se dispone de la lámina metálica que tiene 30 cm de ancho pero no se fijan condiciones sobre la forma que debe tener el canalón, es posible pensarlo de manera circular, tal como se observa en la figura 5.

Figura 5. Sección transversal correspondiente a un canalón semicircular.

El análisis sobre cuál de las dos secciones encierra mayor área, conduce al cálculo del área correspondiente al semicírculo. La longitud de la mitad de la circunferencia es 30 cm, con lo cual π. r = 30 cm, de donde: r = 30 cm / π.

Luego el área de medio círculo es 900/2 Pi = 143.24 cm^2, valor mayor que A[π/3] = 129.9 cm^2

El problema analizado forma parte de un conjunto de problemas en el contexto de nuestra línea de investigación sobre la resolución de problemas, con incorporación de tecnología informática. En ese sentido, la introducción de cada problema es precedida por la presentación de un contexto que da sentido al mismo y propicia condiciones favorables para el aprendizaje significativo.

Así, la recolección de agua de lluvia se enmarca en un problema en el que inciden factores económicos, sociales y técnicos; los cuales conviene analizar con los alumnos, previo al planteo del problema.

Se describe, de manera resumida, este análisis:

- La captación de agua de lluvia es un medio fácil de obtener agua para consumo humano y/o uso agrícola.
- En muchos lugares del mundo con alta o media precipitación y en donde no se dispone de agua en cantidad y calidad necesaria para consumo humano, se recurre al agua de lluvia como fuente de abastecimiento.
- El agua de lluvia es interceptada, colectada y almacenada en depósitos para su posterior uso.
- En la captación del agua de lluvia con fines domésticos se acostumbra a utilizar la superficie del techo como captación, conociéndose a este modelo como SCAPT (Sistema de captación de agua pluvial en techos).

Resultados

Todos los participantes trabajaron en la resolución de 3 problemas de cálculo diferencial e integral. En cuanto a las diferentes representaciones fue predominante la integración numérica-algebraica. La representación gráfica de los modelos propuestos y la corroboración de los valores numéricos obtenidos no fueron realizadas por ninguno de los grupos.

Los 4 grupos realizaron propuestas referidas a la conjeturación, experimentación y simulación en cada uno de los problemas propuestos. En cuanto a la verificación de resultados, se optó por el uso de herramientas informáticas.

Las estrategias de resolución utilizadas por los diferentes grupos siguieron, de manera general, los principios de resolución de problemas (Polya, 1965):

- Abordar el problema (leer el problema, identificar datos e incógnitas, dibujar una figura de análisis, introducir una notación apropiada)
- Elaborar un plan (relacionar datos e incógnitas, reconocer patrones, usar analogías, relacionar la situación con sus conocimientos).
- Llevar a cabo el plan.
- Mirar retrospectivamente (revisar la solución, analizar su coherencia y revisar posibles errores).

En el problema de la construcción de un canalón que transporte la mayor cantidad de agua posible, cabe observar que:

- Todos los grupos realizaron un gráfico/esbozo de la situación y plantearon un modelo matemático en relación con el área de una sección transversal.
- Un solo grupo planteó la necesidad de determinar el dominio, es decir el rango de valores para el ángulo incógnita.
- Todos los grupos realizaron, con mayor o menor cantidad de valores, una tabla a efectos de indagar el valor máximo del ángulo buscado
- Ninguno de los grupos construyó un gráfico de la función.
- Todos los grupos resolvieron analíticamente el problema.
- Todos los grupos consideraron valiosa la reformulación del problema inicial y participaron en su desarrollo.
- La presentación de un posible contexto donde enmarcar el problema, generó diferentes nuevas propuestas que pudieran contribuir con un aprendizaje significativo.

■ Conclusiones

Una vez concluida la puesta en común, se solicitó a los participantes que escribieran sus conclusiones en relación con la propuesta inicial. A continuación se enumeran las observaciones y comentarios presentados por, al menos, el 50 % de los participantes.

- La resolución de problemas constituye una herramienta poderosa en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Educación Superior. Retomando los conceptos de Ausubel (2001), es importante que el profesor diseñe su clase atendiendo a los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos.
- El contenido debe estar enmarcado en un contexto que dé sentido al problema y genere de interés para el alumno. En ese sentido, los problemas multidisciplinares ayudan a que se establezca una interacción continua entre profesor y alumno, de esta manera logran compartir significados.
- El uso de un CAS propicia la interacción con una representación del modelo matemático que describe el fenómeno de interés y contribuye en un aprendizaje significativo. A través de esta interacción, el alumno dispone de la oportunidad de observar, explorar y conjeturar acerca de cómo se comportan los modelos matemáticos en estudio.

- Los alumnos necesitan relacionar lo nuevo con sus propios conceptos y experiencias previas, es por ello que los problemas propuestos deben tener niveles de complejidad creciente (Robert y Speer ,2001; Milevicich y Lois, 2011).
- Si bien no hay una receta rígida para la resolución de problemas, creemos que preestablecer una guía de estrategias permite facilitar el abordaje del problema, de modo que siguiendo estas estrategias el alumno puede aprender significativamente mediante la resolución de problemas.
- Los procesos de conjeturación y experimentación se desarrollaron sin dificultades y frente a todos los problemas propuestos.
- Los procesos de simulación y verificación no fueron llevados a cabo de manera aceptable.

■ Referencias bibliográficas

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1980). Psicología educacional. Rio de Janeiro, Brasil: Interamericana.

Ausubel, D. (2001). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali. Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (2013). La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: el nuevo paradigma ¿es una oportunidad de cambio o un simple engaño? En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1867-1876. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (2013). Enseñar Matemática: un reto en el nuevo paradigma tecnológico. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1859-1866. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lois, A., Milevicich, L., Rodríguez, G. y de la Villa, A. (2014). Ecuaciones diferenciales ordinarias en ingeniería: soluciones utilizando un CAS. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27, 2215-2222. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Milevicich, L. (2008). La construcción de los objetos matemáticos del Cálculo diferencial e integral a través de las representaciones semióticas. Primer encuentro de Docentes e Investigadores de Estadística en Psicología. Universidad de Buenos Aires. Noviembre de 2008.

Milevicich, L. y Lois. A. (2011). La representación de los objetos matemáticos en la resolución de problemas con herramientas informáticas. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 1188-1197. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, 283-299. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.