

## REFLEXIÓN SOBRE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS-MATEMÁTICOS EMERGENTES DE TAREAS FORMATIVAS

**Patricia M. Konic, Juan D. Godino, Walter F. Castro, Mauro Rivas**

Universidad Nacional de Río Cuarto. (Argentina)

Universidad de Granada. (España)

Universidad de Antioquia. (Colombia)

Universidad de los Andes, (Venezuela)

[pkonic@gmail.com](mailto:pkonic@gmail.com), [jgodino@ugr.es](mailto:jgodino@ugr.es), [wfcastro82@gmail.com](mailto:wfcastro82@gmail.com), [rmauro@ula.ve](mailto:rmauro@ula.ve)

**Palabras clave:** tareas formativas, decimales, razonamiento algebraico

**Key words:** training tasks, decimals, algebraic reasoning

### RESUMEN

Incluir el razonamiento algebraico en la escuela primaria, así como reconocer y tratar las dificultades sobre la concepción de número y su distinción de las formas de representación, requiere de una formación específica en los profesores para que puedan reconocer estos aspectos y promover una enseñanza efectiva en la escuela. El propósito de este taller fue poner en debate conocimientos específicos para la enseñanza de la matemática en la formación de futuros profesores. El diseño de las tareas, su implementación e interpretación fue apoyado en las categorías de análisis de los conocimientos didáctico – matemáticos propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. El tipo de problemas presentados y la gestión llevada a cabo, generó en los presentes un debate en el que se discutieron aspectos epistémicos, cognitivos, didácticos del conocimiento matemático emergente, y conflictos de significado asociados a ellos. Este trabajo puso en evidencia su potencialidad en el desarrollo de competencias para el análisis didáctico-matemático.

### ABSTRACT

Including elementary algebraic reasoning in the primary school as well as recognizing and dealing with the difficulties linked to the number conception and recognizing the differences among the number and its representations requires an specific education for the teachers to recognize the difficulties and to promote an effective teaching at school. The purpose of this workshop was putting, specific mathematics knowledge for teaching, to the test in the education of pre-service teachers. The task design as well as their implementation and interpretation was informed by the categories of didactic analysis proposed by the Onto-semiotic approach to cognition and instruction. The type of tasks presented and the activity carried out, promoted the participation of the teachers attending the workshop who discussed epistemic, cognitive and didactic features of the emerging mathematics knowledge, as well as meaning conflicts linked to the tasks. This work unveiled its potentiality in the development of teachers' competencies for the didactic analysis.

## ■ Introducción

El diseño y gestión de la clase de matemáticas por parte del profesor es una tarea compleja que requiere un sistema de conocimientos y competencias de análisis didáctico. En particular el diseño de tareas para el logro de objetivos de aprendizaje sobre temas específicos requiere que el profesor sea capaz de seleccionar tareas apropiadas, analizar la trama de objetos matemáticos implicados en su resolución y conocer las dificultades y conflictos que pueden surgir en el aprendizaje. Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores de matemáticas sobre la cual se centró el diseño e implementación de este taller.

Las actividades de reflexión y análisis didáctico que se realizaron en el taller estuvieron centradas en dos contenidos matemáticos relevantes: introducción al razonamiento algebraico elemental y comprensión de los números racionales. La introducción del álgebra en primaria es recomendada en diversas propuestas curriculares (NCTM, 2000), y se han realizado múltiples investigaciones que tratan de explicar y resolver las dificultades de los estudiantes en el tránsito desde la aritmética al álgebra (Wagner y Kieran, 1989; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Carraher y Schliemann, 2007). Para el caso de los números racionales, contenido central en la enseñanza elemental, se pueden mencionar diversas investigaciones que informan de dificultades de los estudiantes en el control del ámbito de validez de propiedades, el problema de la distinción entre número y representación, así como el uso del número racional en situaciones de la vida real. (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Yang, Reys y Wu, 2010).

## ■ Marco teórico

Las actividades que se desarrollaron en el taller, su justificación, análisis a priori e interpretación de los resultados, están basadas en el modelo de conocimientos didáctico - matemáticos propuesto en Godino (2009), y en la noción de competencia de análisis didáctico - matemático (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012). Al considerar que las categorías del modelo “Mathematical Knowledge for Teaching” (MKT) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) son genéricas y poco desarrolladas, Godino (2009) propone clasificar los conocimientos del profesor de matemáticas en las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Así mismo, utiliza la tipología de objetos y procesos introducidos en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) del conocimiento y la instrucción matemáticos para desglosar las facetas epistémica y cognitiva. Este modelo de conocimientos del profesor de matemáticas es usado para introducir la noción de competencia de análisis epistémico y cognitivo. Para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe: a) tener el nivel de competencia matemática suficiente para llevar a cabo la práctica matemática en la etapa donde imparte. Además, el docente debe poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados valorando su eficacia y su coste (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

## ■ Desarrollo de la propuesta

Las investigaciones específicas que hemos realizado en los temas mencionados (Castro, 2010; Konic, 2011; Rivas, 2013), ofrecen indicadores para el proceso reflexivo que nos propusimos realizar. Durante el

taller se plantearon situaciones/problemas para promover el debate sobre el conocimiento didáctico-matemático puesto en juego, sus limitaciones, bondades y posibles reformulaciones. En tal sentido se propusieron situaciones/problemas, en los que se activaron diversos objetos matemáticos, se evaluaron procesos de significación y se identificaron posibles conflictos semióticos, ello en relación tanto con algunos aspectos de la teoría de números como con el desarrollo del álgebra temprana.

Por limitaciones de espacio, describiremos el desarrollo de una situación/problema tratada en cada sesión del taller.

### ■ Primera sesión

Una de las situaciones/problemas que se presentó en la primera sesión (Fig. 1), se discutió en dos momentos y bajo las siguientes consignas:

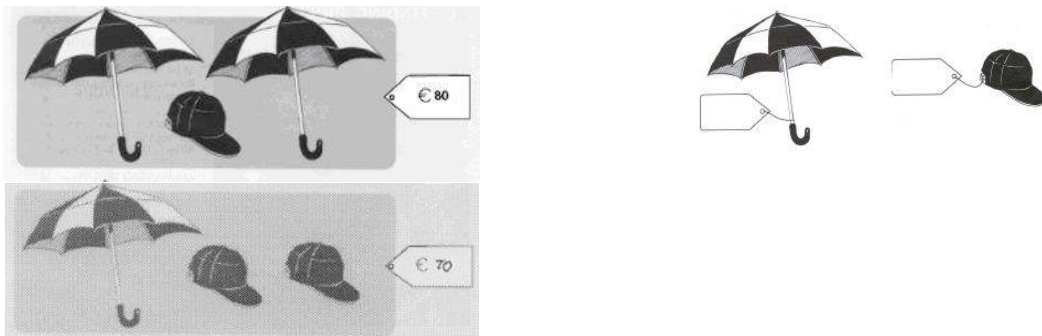
Primer momento: Resolver la situación/problema.

Segundo momento: Resolver la situación/problema para explicarla a niños de escuela elemental.

Se da inicio a la discusión observándose que algunos participantes han propuesto soluciones representadas con simbología algebraica. Ello posibilita iniciar la discusión acerca de los elementos típicamente algebraicos allí presentes.

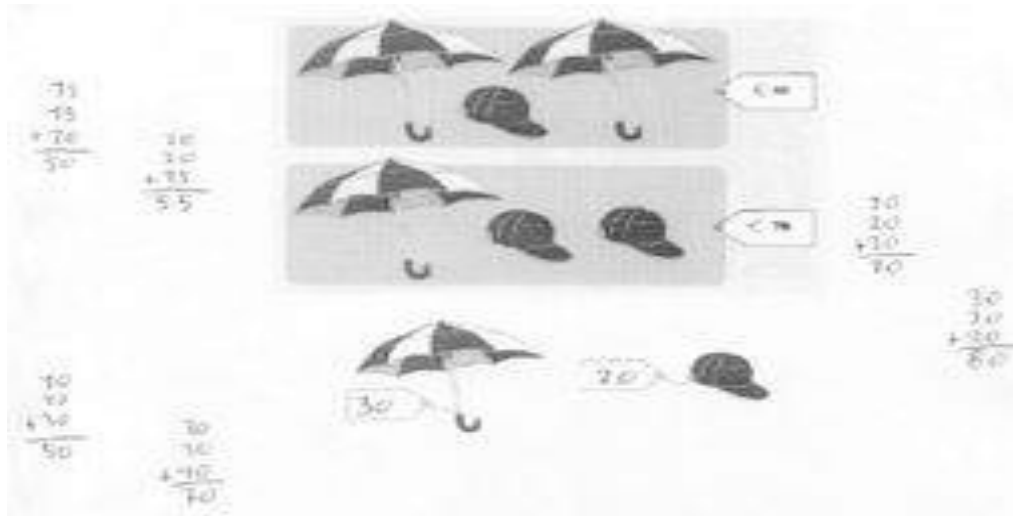
¿Cuánto vale una sombrilla y una gorra?

Figura 1. Problema de gorras y sombrillas



A continuación se ilustra, a los asistentes, un ejemplo de una tarea algebraica, resuelta por niños de escuela elemental (quinto grado). Se muestran dos soluciones dadas por los niños y se propone, a manera de ejemplo, algunos elementos de naturaleza algebraica que se han identificado. Estos elementos no son los únicos que se podrían identificar. (Fig. 2 y Fig. 3).

Figura 2. Solución numérica



Para resolver el problema el niño ha tenido que poner en juego objetos matemáticos y asignar significados que son propios del álgebra, entre estos podemos mencionar:

*Incógnita:* Costo de una sombrilla y una gorra, valores desconocidos.

Se aprecia que la incógnita, valor desconocido, se encuentra a partir de “ensayo y error”. Los precios de las gorras y las sombrillas se cambian sistemáticamente hasta encontrar “los precios” correctos. Se aprecia la variación para encontrar los números. La variable ayuda a encontrar la incógnita.

*Variable:* Los costos desconocidos de la sombrilla y la gorra se reemplazan por números. Los costos se cambian sistemáticamente hasta encontrarlos.

*Ecuaciones:* Los precios combinados de gorras y sombrillas suman un valor fijo. Se identifican dos condiciones simultáneas, matemáticamente, dos ecuaciones que se expresan mediante dos viñetas.

*Sistemas de ecuaciones:* Los precios combinados de gorras y sombrillas cumplen dos condiciones. Las gorras son diferentes, pero sus precios son los mismos. Las sombrillas son diferentes, pero los precios son los mismos.

*Signo igual como resultado:* Los precios combinados de gorras y sombrillas deben ser iguales a dos números fijos, que son el resultado de efectuar las sumas de los precios.

En la Figura 3 se muestra una solución dada por un niño, en donde utilizó ecuaciones.

Figura 3. Solución numérica – algebraica

Handwritten work showing equations and calculations:

$$2s = 80 - g \quad g = 7 \quad 2s = 79 \quad s = 39,5 \quad g = 20 \quad 2s = 60 \quad s = 30$$

$$s = 70 - 2g \quad g = 30 \quad s = 50$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 30 \\ + 20 \\ \hline 80 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 20 \\ + 20 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$2s = 80 - g \quad g = 1 \quad 2s = 79 \quad s = 39,5 \quad g = 20 \quad 2s = 60 \quad s = 30$$

$$s = 70 - 2g \quad g = 10 \quad s = 50 \quad 30 + 30 + 30 = 60 \quad 30 + 20 + 20 = 70$$

Para asignar números a sombrillas y gorras, el niño ha tenido que atribuir el significado de incógnita a las viñetas que representan sombrillas y gorras; ha representado tales objetos gráficos en términos de valores desconocidos. Además ha interpretado el conjunto de viñetas y precio, como una ecuación que debía ser resuelta por dos valores numéricos; números que representan precios.

Es cierto que la solución escrita por el niño plantea dos ecuaciones; sin embargo, aún en el caso en que tales ecuaciones no estuvieran presentes (Figura 3) y tan solo lo estuvieran los números que dan evidencia de un proceso de “ensayo y error”, aún podríamos considerar que el niño resolvió el ejercicio usando características netamente algebraicas. Esto es así porque ha debido efectuar una atribución de significado a gorras y sombrillas como números desconocidos, los cuales representan precios que deben ser hallados y que están sometidos a dos condiciones.

Aún en el caso en que los niños reconozcan las dos condiciones por separado, es decir, que los precios de gorras y sombrillas deben cumplir solo una de las condiciones, se estaría, también atribuyendo los significados algebraicos de incógnita y de variable.

### ■ Discusión de la implementación de la tarea

Durante el proceso desarrollado en la sesión los asistentes dan muestras de aprobación en relación a que la “naturaleza” algebraica o matemática de algunas tareas se hace evidente por las acciones que los sujetos desarrollan, y no exclusivamente por los símbolos o iconos que pueden usar, algunos de los cuales no representan nada para su entorno, solo para los niños. La presentación y uso del recurso “análisis epistémico y cognitivo” para indagar significados fue reconocida por los asistentes como interesante más allá del cuestionamiento a las dificultades temporales para desarrollar tal actividad de manera sistemática, y que resulte compatible con el extenso diseño curricular vigente.

### ■ Segunda sesión

En lo que respecta a la segunda sesión los objetivos específicos se centraron en:

- La detección de conflictos semióticos por mal uso o abuso del lenguaje.
- Evidenciar la necesidad de “cuestionar” las situaciones/problemas de los libros de texto.
- Reconocer la posibilidad de realizar reformulaciones adecuadas a una situación/problema en función de objetivos didácticos y matemáticos específicos.

Se inicia la sesión con una situación/problema extraída del libro de texto para cuarto grado de la escuela primaria (Peña, Aranzubía y Santaolalla, 2008), con la intención de ser resuelta por los asistentes:

*Averigua de qué número se trata:*

*La parte entera es 16.*

*Las centésimas es la mitad de la parte entera.*

*Las décimas es la mitad de las centésimas.*

En este problema se solicita encontrar un número dadas ciertas condiciones que deben cumplir las cifras que lo componen. El “tipo” de problema es rico, puesto que da la posibilidad al alumno de construir un número a partir de la interpretación que le ha dado a cada posición y el significado que tiene el valor de la cifra según su posición. No obstante, se puede evidenciar un uso “abusivo” de lenguaje que da lugar a conflictos epistémicos y cognitivos. En Konic (2011), a esta situación/problema se le adaptaron dos cuestiones quedando transformada en la siguiente:

En un libro de texto para 4º grado encontramos el siguiente problema:

*Averigua de qué número se trata:*

*La parte entera es 16.*

*Las centésimas es la mitad de la parte entera.*

*Las décimas es la mitad de las centésimas.*

Pedro da como respuesta 16,48, indicando que el número pedido tiene 8 centésimas y 4 décimas. Pero María dice que el problema está mal planteado por la siguiente razón: La mitad de la parte entera son 8 unidades, que no pueden ser centésimas, porque una centésima es cien veces más pequeña que la unidad.

- a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.
- b) Escribe el enunciado de la tarea de una forma diferente para evitar el conflicto de interpretación entre Pedro y María.

Se trata de una tarea en la que el contenido involucrado se centra en la representación de un número racional, a través del manejo de los conceptos de posición, valor y relaciones entre ellos y que permite discutir cómo representar con precisión las ideas matemáticas. Además, se focaliza en la comprensión que los profesores tienen sobre cómo los estudiantes aprenden un contenido y en cómo solucionar los conflictos de los estudiantes.

Se continúa entonces la sesión con la presentación de la primera parte de la tarea reformulada (apartado a)). Con la introducción de este apartado se pretende provocar la aparición de conflictos potenciales, especialmente la ambigüedad en el lenguaje utilizado en la consigna, lo que por otro lado deriva en la discusión sobre, *¿Qué es un decimal?*

El cuestionamiento que precede al interrogante del apartado a) genera en los asistentes un extenso debate lo que permite poner en juego conocimientos didácticos-matemáticos emergentes en ambos casos. Finalmente, se presenta una tercera cuestión en el apartado b) con el propósito de “garantizar” la comprensión del conflicto producido en el apartado a).

### ■ Discusión de la implementación de la tarea

Tanto la situación/problema reformulada como el modo en que se gestionó la presentación, el desarrollo y el debate surgido a propósito de la misma, permitieron a los asistentes iniciar un proceso reflexivo. Dicho proceso se generó como producto del conflicto semiótico “latente” en la primera parte de la situación/problema el que se hace “visible” y “explícito” por el agregado del apartado a) y el modo en que se presenta a los asistentes.

Cabe destacar que en primera instancia, por unanimidad, se responde que el número solicitado es 16,48. Solo con la presentación a posteriori de la situación el interrogante del apartado a) se genera un debate que obliga a analizar los objetos matemáticos presentes en el enunciado original (*lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos*). Como consecuencia se observan prácticas esencialmente diferentes ante la ausencia o presencia de la segunda parte de la situación/problema. La inserción de un apartado con la intención de provocar *conflicto de significados* (confusión cifra y valor posicional) en relación con lo establecido en la situación original obliga a un proceso reflexivo que contribuye a la capacidad de cuestionamiento de las concepciones matemáticas involucradas, competencia necesaria para lograr un conocimiento especializado del contenido para ser enseñado (Hill, Ball y Schilling, 2008). El agregado del apartado b) (nueva redacción del problema) obliga a hacer uso del “rigor” usual en la matemática con un sentido semántico: precisar los objetos matemáticos insertos en la situación/problema y la relación entre ellos.

### ■ Conclusiones

Con el desarrollo del taller nos propusimos contribuir al desarrollo de aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático para profesores de primaria. Esta pretensión se halla sustentada en los resultados de diversas investigaciones llevadas a cabo en el marco del EOS, así como en resultados de las investigaciones realizadas por los autores, en las que se reconoce que un análisis epistémico y cognitivo sobre la práctica desarrollada al resolver un problema matemático provee amplias condiciones para la reflexión y toma de decisiones (Castro, 2010; Godino et al., 2012; Konic, 2011; Rivas, 2013).

**Reconocimiento:** Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

### ■ Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Lubienski, S. T. & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (1), 1-20.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning 2*, (pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.



- Castro, W. F. (2010). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. Granada: Universidad de Granada (España). Recurso electrónico disponible en, <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/17704/1/19656257.pdf>
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J, Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7 (2), 1-21.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (4), 372-40
- Konic, P. (2013). Factores condicionantes del conocimiento para enseñar: el caso de los números decimales. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 625-634. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Granada: Universidad de Granada (España). Recuperado de <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/20680004.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). *Matemáticas 4*. Madrid: Ediciones SM.
- Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria*. Granada: Universidad de Granada (España). Recuperado de <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/21849559.pdf>.
- Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.
- Wagner, S. y Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, N. J: Lawrence Erlbaum.
- Yang, D-C., Reys, R.E. y Wu, L-L. (2010). Comparing the development of fractions in the fifth-and sixth-graders' textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics*, 110 (3), 118-127.