A NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO COM RECURSO AO "SOFTWARE" GEOGEBRA

Pedro Mateus, Marlene Alves Dias
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
pzulu1010@yahoo.com.br, alvesdias@ig.com.br

Palavras-chave: geogebra, derivada de uma função.
Keywords: geogebra, derivative of a function.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os resultados de uma parte da pesquisa sobre o ensino e aprendizagem das noções de derivadas de funções reais de uma variável e da integral de Riemann. Nosso objetivo é procurar formas de trabalho com os estudantes que possam melhorar e potencializar o ensino e aprendizagem das noções acima citadas, visando alcançar uma aprendizagem baseada no significado e na compreensão. Neste artigo apresentamos apenas o resultado relacionado ao estudo da noção de derivada. Iniciamos com o estudo das praxeologias existentes, que foram analisadas por meio de uma grade de análise construída para esse fim. Após identificar as praxeologias usuais, fizemos algumas modificações nas tarefas para utilizar o Geogebra como elemento de reflexão, com o intuito de atingir o objetivo visado. A aplicação dessas tarefas a um grupo de estudantes permitiu verificar que os mesmos foram motivados a participar ativamente das sessões o que auxiliou a melhorar suas performances.

ABSTRACT

In this work we present the results of a part of research on the teaching and learning of the notions of derivative from real functions of one variable and the Riemann integral. Our goal is to look for ways of work with students who can improve and enhance the teaching and learning of the above notions, in order to achieve a learning based on meaning and understanding. In this article we present only the results related to the study of the concept of derivative. We started with the study of existing praxeology, which were analyzed by an analysis grille built for this purpose. After identifying the usual praxeology, we did some modifications on the tasks to use Geogebra as reflective element, with the aim of achieving the desired goal. The application of these tasks to a group of students showed that they were motivated to actively participate in the sessions which helped to improve their performances.

Introdução

Iniciamos observando que para Skemp (1991, apud Corrêa, 2008, p. 82) o problema com o qual o ensino de matemática se confronta não é o do rigor, mas sim, o de desenvolvimento do significado dos objetos matemáticos. Segundo o autor, o significado se perde quando o ensino consiste simplesmente na transmissão de informação. Acreditamos que o computador pode auxiliar na análise sobre o que verdadeiramente interessa discutir na aula, pois o estudante pode explorar com mais rapidez e sentido diversos exemplos com diferentes representações.

Consideramos para o nosso trabalho as ideias relacionadas às noções de derivadas de funções reais de uma variável real e da integral de Riemann, pois, no contexto moçambicano, nossa prática docente tem mostrado que há sérios problemas no ensino e aprendizagem destes conteúdos nas classes terminais do ensino secundário e nos primeiros anos da universidade. Esses problemas se caracterizam na apresentação descritiva dos assuntos pelo professor e na assimilação passiva desses mesmos conteúdos pelo estudante.

Por exemplo, a tarefa "Dada a função f: IR $\rightarrow$ IR tal que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ determinar sua derivada no ponto x = 3,16 por meio da definição", em geral, é trabalhada tanto no secundário quanto no superior, com o objetivo de definir a noção de derivada como o limite de uma razão incremental. Esse trabalho pode ser realizado por meio da aplicação direta da definição seguida da utilização da noção de limite e de suas propriedades, o que pode ser realizado por muitos estudantes de forma automática sem que o significado da noção de derivada como o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto seja observado.

Acreditamos que uma forma de trabalho diferenciada em que se utiliza como recurso educacional um "software" matemático como o Geogebra possa auxiliar os estudantes a dar o significado esperado para algumas noções matemáticas.

Para tal, a problemática de nossa pesquisa consiste na procura de formas de trabalho com os estudantes que possam melhorar e potencializar o ensino e aprendizagem das noções matemáticas, na perspectiva da aprendizagem baseada no significado e na compreensão.

Nesse trabalho específico, tratamos apenas a noção de derivada de uma função real a valores reais para os pontos de vista *geométrico*, isto é, a derivada como o declive da reta tangente ao gráfico da função em um ponto dado, se o gráfico tiver uma reta tangente nesse ponto, *taxa de variação*, ou seja, a derivada como taxa de variação instantânea de $f(t)$ se t for o tempo, *microscópico*, isto é, a derivada de uma função como o limite do que se vê sob um microscópio ampliando cada vez mais e *simbólico*, ou seja, a derivada como resultado de certa manipulação simbólica. Esses pontos de vista são definidos por Thurston (1995) e consideramos que a utilização de um "software" matemático é um recurso didático importante para que se possa considerar para uma mesma tarefa a articulação de diferentes pontos de vista. Para tal, escolhemos para o nosso estudo o "software" Geogebra que permite articular representações simbólicas e representações gráficas, auxiliando na passagem de uma para a outra. Isso nos conduziu a colocar as seguintes questões de pesquisa:

- De que forma o Geogebra pode ser usado na promoção de um ensino e aprendizagem baseados no significado e na compreensão da noção de derivada de funções reais de uma variável real?
- Como o uso do computador pode significar um contexto que justifica a construção de noções matemáticas, neste caso, de derivada de funções reais a valores reais?

Assim, o objetivo da pesquisa é motivar a necessidade de operar mudanças no paradigma moçambicano de ensino e aprendizagem do Cálculo para um processo em que se incentive a passagem de um ensino instrucionista para o ensino centrado na reflexão, no qual o computador é elemento de co-construção de conhecimentos dos estudantes.

Para atingir o objetivo acima consideramos como referencial teórico central a Teoria Antropológica do Didático - TAD de Chevallard (1992, 1994, 1998, 2002) e Bosch e Chevallard (1999), as noções de quadro e mudança de quadro segundo definição de Douady (1984), níveis de conhecimento esperado dos estudantes conforme definição de Robert (1998) e a teoria da instrumentação de Rabardel (1995).

Referencial teórico

Iniciamos apresentando as noções de relação institucional e pessoal utilizadas na pesquisa. A partir das noções fundamentais objeto (o), pessoa (x) e instituição (I) Chevallard (1992) define *relação pessoal* e *relação institucional* ao objeto o, ou seja, a relação pessoal ao objeto o existe quando esse objeto existe para uma pessoa x, diremos que x conhece o, a relação $R(x, o)$ especificando a maneira que x conhece o, da mesma forma a relação institucional existe quando um objeto o existe para uma instituição I, diremos que o é um objeto de I, a relação $R(I, o)$ especificando a maneira que o existe para I.

Consideramos ainda a noção de *praxeologia* que segundo Chevallard (1998) é constituída de um bloco prático técnico [*tipo de tarefa, técnica*] e de um bloco tecnológico-teórico [tecnologia, teoria]. O bloco [tecnologia, teoria] é, normalmente, identificado com um *saber* e o bloco [*tipo de tarefa, técnica*] como um *saber fazer*.

Para a execução da técnica são necessárias as representações externas e internas que na TAD são definidas por meio das noções de objetos ostensivos e não ostensivos. Bosch e Chevallard (1999) definem os *ostensivos* como os objetos que têm para nós uma forma material, sensível e os *não ostensivos*, ao contrário dos objetos ostensivos, são aqueles que denominamos usualmente de noções, conceitos, ideias, etc. Os autores observam que os não ostensivos não podem ser manipulados, eles só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados.

Como referencial teórico de apoio utilizamos as noções de quadro e mudança de quadros definidas por Douady (1984), níveis de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert (1998) e a teoria da instrumentação de Rabardel (1995).

Segundo Douady (1984) um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. A autora define ainda as mudanças de quadro como meios de obter formulações diferentes de um problema, que mesmo não sendo equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação.

Já os níveis de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert (1998) são os níveis técnico, mobilizável e disponível, que permitem diferenciar a proposta de trabalho com os estudantes, pois o nível técnico corresponde à aplicação direta de definições e teoremas, o nível mobilizável é aquele no qual já existe uma justaposição de saberes e o nível disponível é aquele em que os saberes são organizados e para o qual as tarefas propostas aos estudantes exigem que os mesmos disponham de situações de referência que poderão auxiliá-los na solução da tarefa.

A teoria da instrumentação trata de investigar a ação com instrumentos no campo social, científico e também na educação. Para Rabardel (1995), existe uma diferença entre artefato e instrumento: um “artefato” pode ser um dispositivo material ou simbólico utilizado como meio de ação e o “instrumento” uma construção do sujeito ao longo de um processo no qual um artefato transforma-se progressivamente em instrumento, ou seja, quando o sujeito se apropria do artefato a ponto de integrá-lo em sua atividade.

■ Metodologia

Trata-se de um projeto de pesquisa sobre as possíveis formas de tratamento das noções matemáticas de maneira a motivar a necessidade de operar mudanças no paradigma moçambicano de ensino e aprendizagem do Cálculo para um processo em que se incentive a passagem de um ensino instrucionista para o ensino centrado na reflexão, no qual o computador é elemento de co-construção de conhecimentos do estudante.

Para tal utilizamos inicialmente a técnica da pesquisa documental conforme definição de Ludke e André (1986) para identificar as relações institucionais existentes. Em seguida, a partir das relações identificadas, construímos um instrumento a ser aplicado com os estudantes do primeiro ano do curso de formação de professores de matemática. Nesse instrumento as tarefas propostas aos estudantes são as encontradas na análise das relações institucionais com modificações que possibilitavam a inserção do “software” Geogebra para a sua execução. Essas tarefas foram analisadas por meio de uma grade de análise na qual identificamos as praxeologias institucionalizadas, os ostensivos e não ostensivos em jogo, as necessidades de mudanças de quadros e o nível de conhecimento esperados dos estudantes.

Na sequência aplicou-se um teste diagnóstico para um grupo de 20 estudantes, para o mesmo grupo fez-se uma intervenção composta de um conjunto de tarefas que permitiam identificar as dificuldades dos estudantes e discutí-las e para as quais era necessária a utilização do “software” Geogebra.

Finalmente, aplicou-se o mesmo teste para verificar o progresso dos estudantes que participaram das atividades de intervenção que foram realizadas durante 12 sessões de 2 horas cada, sendo 1 sessão para a aplicação do teste diagnóstico (pré teste), 10 sessões para a intervenção com o auxílio do “software” Geogebra e a última sessão para reaplicar o teste diagnóstico (pós teste).

Resultados encontrados

Nesse artigo iremos discutir apenas os resultados associados à tarefa "Dada a função *f*: IR → IR tal que *f*(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ determinar sua derivada no ponto x = 3,16 utilizando a definição de derivada". Observamos que se trata de um tipo de tarefa usual da relação institucional para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Moçambique, conforme as análises dessa relação efetuada.

Para utilizar essa tarefa com o objetivo de construir a noção de derivada de uma função f em um ponto x_0 de seu domínio como limite da razão incremental foi necessário algumas adaptações. Na figura 1 abaixo, encontra-se a mesma tarefa usual, mas com as adaptações necessárias para a intervenção.

Figura 1: Tarefa sobre a noção de derivada

Considerar a função *f*: IR → IR dada por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

a) Com recurso ao Geogebra

i) esboce o gráfico de *f*

ii) determine um ponto A = (3,16; f(3,16)) sobre o gráfico de f .

iii) com o seletor, determine a = [3,16009; 4]. Coloque no seletor a = 4 e determine o ponto B = (a, f(a)) sobre o gráfico de f .

iv) Determine a reta secante AB: $y = \dfrac{f(a) - f(3,16)}{a - 3,16}(x - 3,16) + f(3,16)$

b) Anote o valor de $\dfrac{f(a) - f(3,16)}{a - 3,16}$. Movimentando o ponto B em direção ao ponto A, anote os diferentes valores de $\dfrac{f(a) - f(3,16)}{a - 3,16}$ em cada posição de B.

Complete: $\lim\limits_{a \to 3,16} \dfrac{f(a) - f(3,16)}{a - 3,16} = \ldots.$

c) O que é que este limite significa para nós?

Esta escolha corresponde à forma tradicional de estudar a variação de uma função f em um ponto x de seu domínio, isto é, encontrar uma secante ao gráfico de f nos pontos A e B. Depois, mover o ponto B para A (fixo). A discussão visa destacar os acontecimentos (ao recorrer ao Geogebra), evidenciado o saber visado.

Artigue (1991) ao averiguar a compreensão dos estudantes para a noção de derivada de funções reais a variavel real, verificou que as derivadas são interpretadas pelos alunos como as aproximações de declives de retas tangentes em vez de as interpretar como iguais aos próprios declives.

Portanto, os itens a) e b) da tarefa da figura 1 são pertinentes neste caso, pois na sequência da resolução da atividade o estudante vai notar que o declive da secante tende para o declive da tangente e este é igual a 1,037. Por outro lado, o procedimento algébrico resulta igualmente em 1,037. O item c) visa aflorar alguns dos vários significados da derivada de uma função em um ponto, a saber: como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em x = a (ponto de vista geométrico), como taxa instantânea de variação de f em x = a (ponto de vista taxa de variação), como velocidade instantânea de um movimento em x = t_0, em que f é uma função horária do movimento (ponto de vista taxa de variação), como uma aproximação linear de *f* nas proximidades de x = a (ponto de vista taxa de variação).

Para compreender o resultado da intervenção sobre um tipo de tarefa como a apresentada acima, descrevemos a seguir o resultado dos estudantes ao teste diagnóstico aplicado antes da intervenção e comparamos com as respostas dos estudantes para o mesmo teste após a intervenção.

Resultados do teste diagnóstico.

Na figura 2 apresentamos a tarefa sobre derivada de uma função polinomial e o número e a porcentagem de estudantes que resolveram a tarefa segundo um determinado ponto de vista. Observamos aqui que para o teste diagnóstico foram consideradas as respostas dos 20 estudantes que iniciaram o estudo proposto. A indicação, por exemplo, (9/20) deve ser entendido como sendo 9 estudantes dos 20 deram a resposta considerada.

Figura 2: Pontos de vista utilizados pelos estudantes na solução da tarefa antes da intervenção

Tarefas	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de vista simbólico	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de vista geométrico	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de taxa de variação
A equação de movimento de uma partícula é $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, em que s(t) é dado em metros e t em segundos. Encontre: **a)** A velocidade e a aceleração como funções de t. b) A equação da reta tangente ao gráfico de s no instante t = 5s. c) A aceleração depois de 2s. d) A aceleração quando a velocidade for 0. e) Identificar o gráfico de s ou esboce o gráfico de s.	a) (9/20) – 45% e) (13/20) – 65%	b) (5/20) – 25%	c) (6/20) – 30% d) (1/20) – 5%

Como comentário sobre a figura 2 temos a dizer que no geral os estudantes participantes do teste diagnóstico mostraram ter dificuldades na resolução de questões sobre a noção de derivada, especialmente a interpretação da derivada como velocidade instantânea, em particular, como taxa de variação. As causas disso podem ser várias, mas consideramos que a heterogeneidade do grupo seja a causa principal. Alguns participantes do teste referiram que não estudaram Cálculo Diferencial no Ensino Médio, pois pertenciam a filiais que não contemplam essa disciplina. A questão 1d) aparece como a mais difícil, de fato, esta questão requeria outras habilidades matemáticas que ultrapassa a interpretação da derivada como taxa de variação. Era preciso identificar que o que se pedia no problema era o tempo, instante em que a taxa de variação (velocidade) se anula, e a partir desses valores, calcular a aceleração correspondente. Outro resultado destacado da figura 2 é a proeminência da habilidade de combinar corretamente o gráfico da função s com o da sua derivada. Nesse aspecto os estudantes mostram ter alguma ideia no relacionamento entre o comportamento de uma função f e as características da sua derivada.

Após a análise do teste diagnóstico iniciamos a intervenção e de comum acordo com os participantes, as discussões ocorriam nos sábados, geralmente das 9:00 às 11:00 horas. Os estudantes trabalhavam em duplas, contudo manifestou-se uma tendência de trabalhar individualmente, para experimentar sozinho as construções exigidas.

Na figura 3 apresentamos apenas os resultados de 8 estudantes que participaram de pelo menos 8 intervenções.

Figura 3: Pontos de vista utilizados pelos estudantes na solução da tarefa após a intervenção

Tarefas	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de vista simbólico	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de vista geométrico	Número e porcentagem de estudantes que resolveram pelo ponto de taxa de variação
A equação de movimento de uma partícula é $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, em que s(t) é dado em metros e t em segundos. Encontre: **a)** A velocidade e a aceleração como funções de t. b) A equação da reta tangente ao gráfico de s no instante t = 5s. c) A aceleração depois de 2s. d) A aceleração quando a velocidade for 0. e) Identificar o gráfico de s ou esboce o gráfico de s.	a) (6/8) – 75% e) (6/8) – 75%	b) (6/8) – 75%	c) (6/8) - 75% d) (1/8) – 12,5%

Comparando os resultados das figuras 2 e 3, vemos que, em geral, houve um progresso significativo na relação dos estudantes com a noção de derivada nos seus três pontos de vista: ponto de vista simbólico, geométrico e taxa de variação. Assim sendo consideramos que a experimentação atendeu ao objetivo proposto. No início houve dificuldades inerentes ao domínio das ferramentas básicas do "software" Geogebra para realizar as tarefas recomendadas. Pouco a pouco essas dificuldades foram se superando na medida em que os estudantes foram se apropriando do artefato a ponto de integrá-lo em sua atividade matemática. Salientamos que não houve progresso na tarefa 1d) que requeria outras habilidades matemáticas que ultrapassam a interpretação da noção de derivada como taxa de variação ou como velocidade. Esse resultado chama-nos atenção para um olhar um pouco mais amplo para a necessidade de articulação de vários aspectos na abordagem de um conteúdo matemático mesmo perante um meio computacional.

Por outro lado, notamos que os estudantes que assumiram uma postura positiva nas sessões, isto é, discussão do que faziam e tentativa de entender o significado dos resultados obtidos melhoraram suas performances, mas para os que não participaram ativamente, como é o caso de 3 estudantes que faltaram a três sessões, as dificuldades encontradas no pré teste se mantiveram no pós teste.

■ Conclusão

Observamos que não houve necessidade de grandes mudanças nas tarefas usuais que correspondem às relações institucionais para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral para a construção de tarefas em que se utiliza o "software" Geogebra como ferramenta para auxiliar os estudantes a encontrarem o significado e a compreensão da noção de derivada de uma função real a valores reais.

Com as mudanças apresentadas na tarefa de intervenção que exigia a utilização do "software" foi possível verificar que os estudantes ampliam suas relações pessoais ao objeto derivada de uma função real a valores reais, pois são capazes de utilizar diferentes pontos de vista.

A pesquisa tende a mostrar que a partir das relações institucionais existentes podemos construir sequências didáticas com o auxilio de um "software" matemático, no caso o Geogebra, que com pequenas alterações efetuadas pelos professores possibilitam desenvolver o significado e a compreensão das noções matemáticas. Esperamos trabalhar com grupos de formação contínua de professores para auxiliá-los na elaboração dessas sequências didáticas.

■ Referências bibliográficas

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer.

Bosch, M. e Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques 19(1),* 77-123.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.* Recuperado em 15 agosto de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Chevallard, Y. (1998). *Organisations Didactiques: 1. Les Cadres Général*. Recuperado em 15 agosto de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'etude 3. Ecologie & Regulation*. Recuperado em 10 agosto de 2014 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Corrêa, I. M. P. (2008). *Como se fala matemática? Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de Mato Grosso. Brasil.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*.Tese de doutorado não publicada. Université de Paris VII. França.

Lüdke, M. e André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitives des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2),* 139-190.

Thurston, W. P. (1995). Preuve et progress en Mathématiques. *REPERES-IREM 21*, 7-25.