PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ESCOLAR

Onto-semiotic perspective of the school algebraic reasoning

Godino, J.D. y Burgos, M.

Universidad de Granada

Resumen

En esta ponencia presentamos una síntesis de las investigaciones realizadas sobre el problema de la naturaleza del álgebra escolar aplicando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. La noción de configuración de prácticas, objetos y procesos se aplica para identificar tipos de objetos y procesos algebraicos, los cuales son usados para elaborar un modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas. Se ejemplifica el modelo con su aplicación al análisis de procesos de resolución de tareas de proporcionalidad. Asimismo, se hace una síntesis de las investigaciones realizadas sobre formación de profesores aplicando el modelo de los niveles de algebrización. Finalmente, se analizan concordancias y complementariedades de este modelo con las etapas del proceso de algebrización propuestas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se formulan algunas cuestiones abiertas.

Palabras clave: *razonamiento algebraico, enfoque ontosemiótico, niveles de algebrización, formación de profesores.*

Abstract

In this paper we describe a synthesis of the research carried out on the nature of school algebra, where theoretical tools of the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction are applied. The notion of configuration of practices, objects and processes is applied to identify types of algebraic objects and processes, which are used to elaborate a model for the algebrization levels of mathematical practices. The model is applied in the analysis of a proportionality task resolution processes. A synthesis of the research carried out on teacher training, where the model of algebrización levels is applied is also described. Finally, we analyze the concordances and complementarities of this model with the stages of algebrization process proposed by the Anthropological Theory of the Didactic and some open questions are formulated.

Keywords: *algebraic reasoning, onto-semiotic approach, algebraization levels, teachers' education.*

INTRODUCCIÓN

En el marco de un proyecto del Plan Nacional de Investigación sobre formación didáctico - matemática de futuros maestros de Educación Primaria, hemos tenido la ocasión de aplicar las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2012; Godino, Batanero y Font, 2007) para analizar la naturaleza del razonamiento algebraico escolar (RAE) y sus implicaciones en la formación de profesores. En particular, la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos ha ayudado a identificar objetos y procesos específicos que se ponen en juego en la realización de prácticas matemáticas usualmente calificadas como algebraicas. El resultado ha sido la elaboración de un modelo de RAE que distingue distintos niveles de algebrización de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas propias de Educación Primaria y Secundaria. El uso que se ha hecho de este

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). Zaragoza: SEIEM.

modelo hasta ahora ha sido para promover en los futuros profesores la reflexión sobre la naturaleza del álgebra y desarrollar en ellos una competencia específica sobre reconocimiento de los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. No se han abordado aún las implicaciones del modelo de niveles RAE sobre la planificación curricular ni tampoco para distinguir posibles niveles de desarrollo cognitivo de los estudiantes.

En esta ponencia hacemos una síntesis del modelo de niveles RAE, su fundamentación y de las aplicaciones que se han realizado sobre formación de profesores. También se describe el uso de la noción de configuración ontosemiótica, junto con la distinción de niveles de algebrización, para identificar significados pragmáticos en el estudio de la proporcionalidad.

El trabajo lo hemos organizado en los siguientes apartados. En primer lugar, se presenta la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, seguida de la descripción de los tipos de objetos y procesos que se consideran como algebraicos. Después se muestra el modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas, el cual se aplica seguidamente para definir significados de la proporcionalidad basados en la distinción de niveles de algebrización. A continuación, se describen brevemente otras investigaciones sobre razonamiento algebraico realizadas en el marco del EOS. En la sección siguiente se reconocen algunas concordancias y complementariedades del modelo de niveles RAE con las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas propuestas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999). Finalmente se mencionan algunas cuestiones abiertas a futuras investigaciones y observaciones finales.

CONFIGURACIÓN DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS

El EOS es un sistema teórico modular e inclusivo que proporciona herramientas para el análisis epistémico y cognitivo de la actividad matemática, asumiendo presupuestos antropológicos y semióticos sobre la naturaleza de las matemáticas (Godino, 2017). La herramienta clave para el análisis epistémico y cognitivo es la de *configuración ontosemiótica*, la cual tiene en cuenta las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas realizadas ante una situación - problema, así como los objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas. Como tipos de objetos primarios se proponen las siguientes categorías, teniendo en cuenta la función o papel que dichos objetos desempeñan en las prácticas matemáticas:

- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.).
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones intra y extra-matemáticas, ejercicios).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media, función, etc.).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo).

Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o dualidades:

1. *Ostensivo / no ostensivo*, que permite distinguir lo material o perceptible (ostensivo) de lo abstracto, ideal o inmaterial (no ostensivos).
2. *Extensivo / intensivo*, que diferencia la función particular de un objeto en un contexto o práctica (extensivo) de la función general en diversos contextos o clases de prácticas (intensivo).
3. *Personal / institucional*, que distingue la perspectiva de los sujetos individuales (personal) de la compartida en una institución o comunidad de prácticas (institucional).

4. *Significante / significado*, es decir, antecedente o consecuente de una función semiótica que relaciona una expresión con un contenido.
5. *Unitario / sistémico*, que diferencia los objetos considerados globalmente como un todo (unitario) de aquellos que son considerados como sistemas formados por componentes estructurados (sistémico).

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios (Font y Rubio, 2017). En consecuencia, se tienen procesos de problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación, etc. En la Figura 1 se sintetizan las relaciones entre las herramientas teóricas que propone el EOS para el análisis de la actividad matemática.

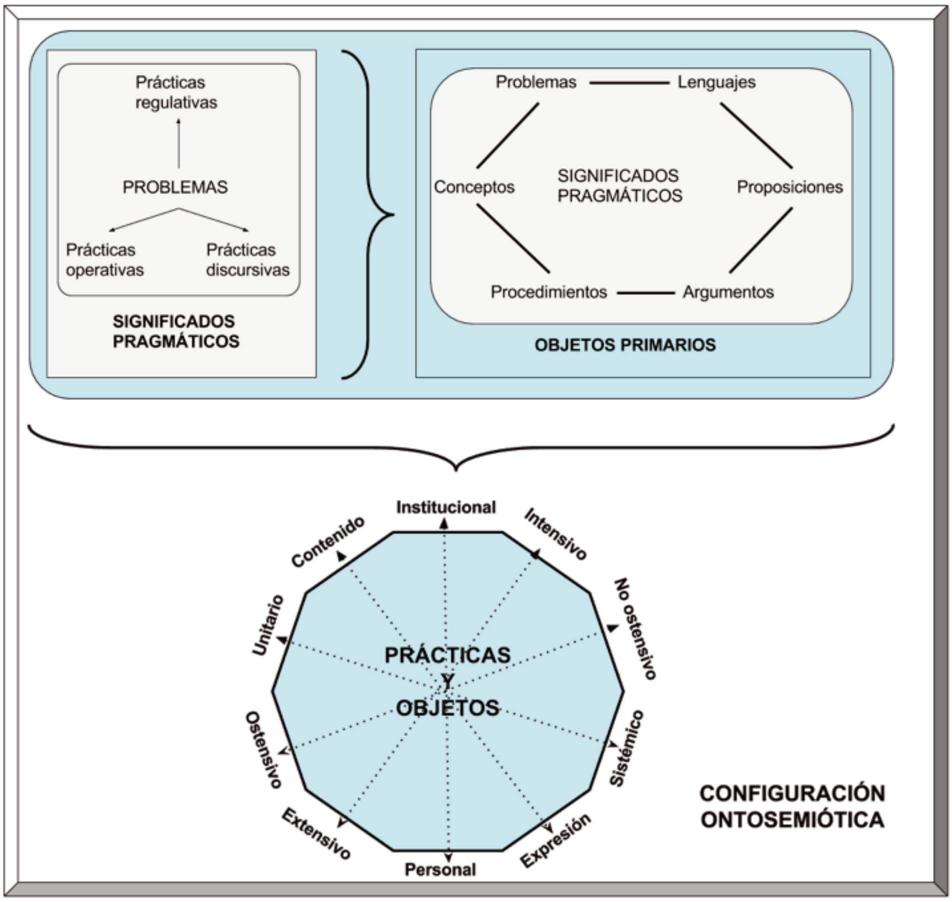


Figura 1. Significados pragmáticos y configuración ontosemiótica
(Fuente: Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017, p. 4)

En este trabajo también aplicamos la noción de significado de un objeto (en este caso, la proporcionalidad) en su versión pragmatista, esto es, entendido como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego en la solución de situaciones - problemas en las que el objeto desempeña un papel clave (Godino y Batanero, 1994).

OBJETOS Y PROCESOS ALGEBRAICOS

Una práctica matemática se considera algebraica si en ella intervienen ciertos tipos de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como "algebraicos". Se consideran como tipos de objetos algebraicos los siguientes (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014):

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.
2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.
3) *Funciones*. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y el álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Asimismo, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones, variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula analítica.
4) *Estructuras, sus tipos y propiedades* (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.), características del álgebra superior o abstracta. El estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, aunque es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo ($\mathbb{N}$, +, ×) de los números naturales.

Procesos algebraicos

Como se indica en Godino et al. (2014), en el caso de las prácticas algebraicas los procesos de particularización – generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008, Mason y Pimm, 1984). Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización.

Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que en el EOS se denomina objeto intensivo, el cual viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Mediante el proceso inverso de particularización se obtienen objetos que se denominan extensivos, esto es, objetos particulares. Una colección finita simplemente enumerada no se considera como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. En ese momento, el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*.

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o *materializada* mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto *ostensivo* que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (*proceso de reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los que se opera de manera sintáctica, analítica o formal.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, tabular, incluso gestual (Radford, 2003).

En el modelo de niveles de algebrización desarrollado en el marco del EOS se analiza la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está fijada de manera objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

MODELO DE NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS

La caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria se basa en la distinción de tres niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados, y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. La Figura 2 resume los criterios que se tienen en cuenta para definir los tres primeros niveles de algebrización.

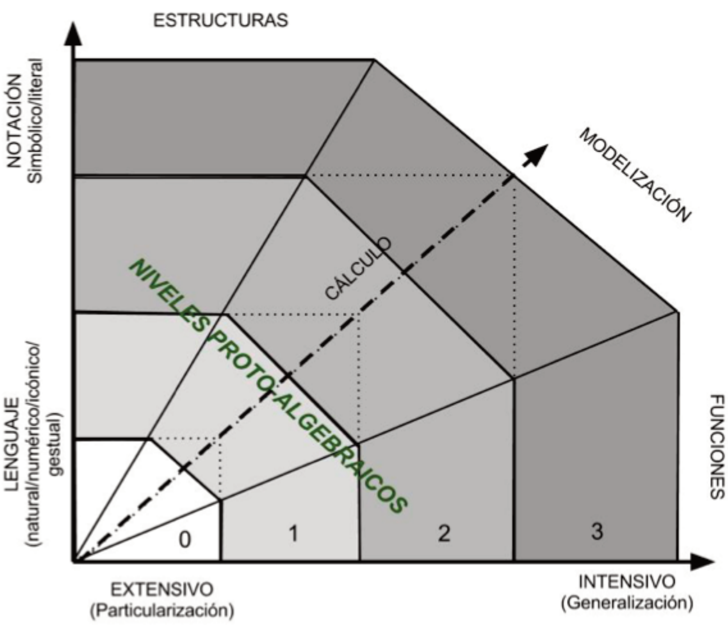


Figura 2. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático (Fuente: Godino et al., 2014, p. 216)

Considerando que los números naturales son también objetos intensivos (entidades generales, abstractas) que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, es necesario atribuirles un primer grado de generalidad o intensión. En el nivel 0 de algebrización no se puede decir que no intervengan objetos intensivos, sino que a tales objetos corresponde un primer grado de intensión. De hecho, es necesario observar que el número 3, por ejemplo, puede considerarse la característica de todos los conjuntos coordinables finitos cuyo cardinal es tres; así, "3" es ya un objeto que representa a una clase. Por ello, la atribución de un carácter algebraico a una práctica matemática supone la intervención de intensivos al menos de un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1.

En Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria. Estos niveles están basados en la consideración de:

1) el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; 2) el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. En los anexos 1 y 2 se incluye una síntesis de los rasgos característicos de cada uno de los niveles.

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

En esta sección aplicamos las herramientas teóricas descritas anteriormente y el modelo de niveles de algebrización para analizar diversos significados de la proporcionalidad, sintetizando el análisis realizado en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017).

El universo de significados de la proporcionalidad se puede clasificar según distintos criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985).

En consecuencia, se pueden delimitar variantes de significados propios de algunos campos de aplicación de la proporcionalidad (geométrico, probabilístico, etc.) y, como veremos seguidamente, según el nivel de algebrización de la actividad matemática realizada para la resolución de los problemas.

En la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.) y sus respectivas medidas. En una fase del proceso de resolución las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números reales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto. En la fase de modelización intra-matemática se ponen en juego los tres significados de la proporcionalidad que describimos seguidamente, conjuntamente con los significados pragmáticos ligados a los contextos de aplicación. Estos tres significados, junto con el informal/cualitativo, no son exhaustivos ni independientes, siendo posible identificar significados parciales dentro de cada categoría y prácticas matemáticas que involucren a varios de ellos. Es importante tener en cuenta los diversos significados en el diseño de los procesos de instrucción, los cuales deben tener lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria y secundaria) y en distintas áreas de contenido, como describe Wilhelmi (2017).

Significados pragmáticos según los niveles de algebrización

La aplicación de los niveles de algebrización de la actividad matemática propuestos en Godino et al. (2014) a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional (RP). Parece razonable y útil para la organización curricular y la gestión de las intervenciones didácticas distinguir tres tipos de significados: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. Estos tipos de significados se complementan con un significado informal/cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

Un análisis informal, puramente cualitativo, de las situaciones de proporcionalidad puede proveer de una estimación que sirva para validar el modo de proceder y el resultado final. Por otro lado, un razonamiento de este tipo se hace necesario, como primer paso, para distinguir si estamos ante una situación de proporcionalidad y si ésta es directa o inversa.

Significado aritmético

Utilizaremos como ejemplo el siguiente problema de valor faltante para mostrar los diversos sistemas de prácticas mediante los cuales se puede abordar su solución:

Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?

El significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división), como ocurre en la siguiente secuencia de prácticas:

1. En las situaciones de compra-venta de la vida cotidiana, es habitual suponer que, al comprar cantidades pequeñas de café, dichas cantidades sean del mismo tipo y calidad.
2. En consecuencia, si se compra el doble, el triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Del mismo modo, si se compra la mitad, la tercera parte, etc. de producto, se deberá pagar la mitad, la tercera parte, etc. de precio.
3. Si un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros, el precio de 100 gramos de café (cinco veces menos) debe ser la quinta parte de 5 euros, esto es, 1 euro.
4. El precio de 50 gramos (mitad de 100 gramos) deberá ser la mitad, esto es, 50 céntimos.
5. De esta manera, 450 gramos de café deben costar, $4 \times 1 + 0{,}50 = 4{,}50$; es decir, 4 euros y 50 céntimos.

La práctica 1 tiene un carácter discursivo-descriptivo de la situación-problema, mientras que las restantes tienen carácter normativo y operativo. En la solución intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; por tanto, según Godino et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización, puesto que no intervienen objetos y procesos algebraicos.

Significado proto-algebraico

El significado proto-algebraico está centrado en la aplicación de la noción de proporción y la resolución de una ecuación de la forma , como, por ejemplo, en la siguiente secuencia de prácticas:

1. Se supone que, si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc., de precio.
2. Por tanto, la relación que se establece entre las cantidades del producto compradas y el precio pagado es de proporcionalidad directa.
3. En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: $5/500 = x/450$; siendo x el precio al que debe venderse 450 gramos de café.
4. En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,
$$5 \times 450 = 500 \times x,$$
5. Luego, $$x = (5 \times 450)/500 = 4{,}5$$
6. Por tanto, el precio del paquete debe ser 4,5 euros.

Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2 (proto-algebraica), según el modelo de Godino et al. (2014), ya que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción.

Una variante diagramática de esta técnica de solución se conoce como la "regla de tres", que en cierto modo "oculta" la intervención de las razones y la proporción, lo cual puede comportar un significado "degenerado" de la proporcionalidad aritmética (Figura 3):

$$\left.\begin{array}{l} 500 — 5 \\ 450 — x \end{array}\right\} \quad x = \frac{450 \times 5}{500} = 4{,}5$$

Figura 3. Regla de tres

Significado algebraico-funcional

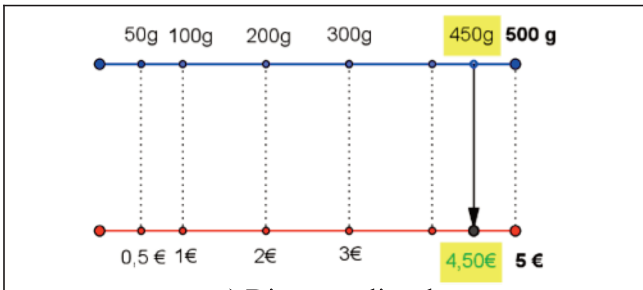
Una de las caracterizaciones del significado propiamente algebraico viene dada por la aplicación de la noción de la función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones: $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(k{\cdot}a) = k{\cdot}f(a)$. Una de estas técnicas se aplica en la siguiente secuencia de prácticas:

1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que pagaremos por dos paquetes de café distintos, será igual al precio de un paquete que pesase lo mismo que los dos juntos.
2. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto Q, y el conjunto de los precios pagados P, $f{:}Q \rightarrow P$ es lineal.
3. En toda función lineal se cumple que la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número $f(k{\cdot}a) = k{\cdot}f(a)$.
4. El coeficiente de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno).
5. Aplicando dichas propiedades al caso se tiene:

$$f(500\text{g}) = 5€;\quad 500 f(1\text{g}) = 5€;\quad f(1\text{g}) = \frac{5}{500}€ \text{ [Un gramo de café cuesta 1 céntimo]}$$

6. $450 f(1\text{g}) = 5€;\quad f(1\text{g}) = 450 \times \frac{5}{500}€;\quad f(450\text{g}) = 4{,}5€$
7. Luego el precio de un paquete de 450 gramos debe ser de 4,5 euros.

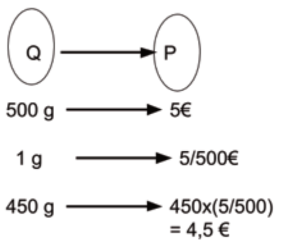
Es posible también considerar soluciones basadas en representaciones diagramáticas, como las que se incluyen en la Figura 4, donde se pone en juego la noción de correspondencia. En estos casos la actividad matemática que se realiza se puede calificar de proto‒algebraica de nivel 1 (anexo 1).



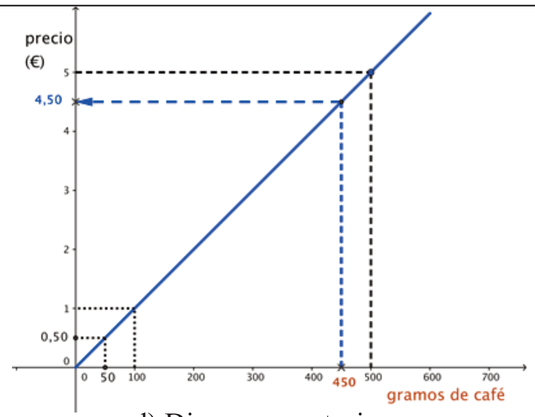
a) Diagrama lineal

Cantidad	Precio
500	5
100	1
50	0,5
400	4
450	4,5

b) Diagrama tabular



c) Diagrama sagital



d) Diagrama cartesiano

Figura 4. Soluciones diagramáticas (Fuente: Godino, et al., 2017, p. 8)

Algunos autores (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Obando, Vasco y Arboledas, 2014) enfatizan el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma y = k·x, en el que k es la razón constante, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. Aunque se hable de la "función lineal", en singular, en realidad se pone en juego el conocimiento de la estructura de una familia de funciones, ya que k interviene como un parámetro, lo que supone un primer contacto con el nivel cuatro de algebrización que definen Godino, Neto et al. (2015).

Dada la eficacia matemática del razonamiento algebraico, parece deseable, desde el punto de vista de la idoneidad epistémica, que los procesos de instrucción tiendan a lograr el nivel algebraico de significación para el razonamiento proporcional. Pero no parece idóneo, desde el punto de vista cognitivo y afectivo, prescindir de los niveles precedentes. No obstante, la resolución de problemas que involucran la proporcionalidad en la vida cotidiana y profesional puede ser idónea mediante la aplicación de procedimientos propios de la significación aritmética, incluso con la variante degenerada de la regla de tres.

SOLUCIONES A UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA – FUNCIONAL CON DIFERENTES NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

En este apartado incluimos el enunciado y posibles soluciones a un problema de modelización algebraica–funcional, las cuales pueden involucrar los niveles 1 a 5 de algebrización (Figura 5). Muestra, con claridad, que la asignación de niveles se refiere a la práctica matemática que se realiza en cada caso. Este ejemplo lo hemos usado en talleres de formación de profesores de educación secundaria para reflexionar sobre las características del razonamiento algebraico escolar.

Enunciado del problema

Supón que remas en kayak 5 millas a favor de la corriente en un río desde tu campamento base hasta una presa, y que seguidamente regresas al campamento. En ausencia de corriente eres capaz de remar a x millas por hora. Si la velocidad de la corriente del río es de 1 milla por hora, escribe una expresión que permita calcular el tiempo total del viaje en función de tu velocidad x de remada.

a) Resuelve la tarea.
b) Identifica el nivel de algebrización que se pone en juego en la realización de la tarea.
c) Enuncia una tarea relacionada de manera que su resolución implique un nivel 1 de algebrización.
d) Ídem, para un nivel 4 y 5

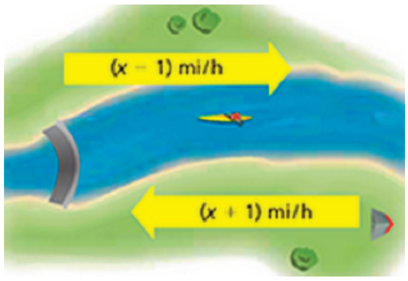


Figura 5. Movimiento uniforme

Respuestas esperadas y niveles de algebrización

a) Sabemos que el espacio recorrido e por un móvil en movimiento uniforme, en un tiempo t, es proporcional a la velocidad x, es decir, $e = x{\cdot}t$, luego, $t = e/x$. Cuando se rema a favor de la corriente la velocidad será $x + 1$, y cuando se va en contra, $x - 1$. Luego el tiempo t, en función de la velocidad x, se puede calcular con la expresión:

$$t = \frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{5(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{10x}{(x+1)(x-1)}$$

b) En la solución dada se encuentra una expresión algebraica racional como criterio de una función de variable real cuyo recorrido es el conjunto de los números reales positivos. Se opera con la variable independiente para obtener una expresión canónica, luego se pone en juego un nivel 3 de algebrización (anexo 1).

La actividad matemática tendría un nivel 2 de algebrización si el estudiante da como solución,

$$t = \frac{5}{x+1} + \frac{5}{x-1}$$

En este caso no se llega a operar con la variable independiente de manera sintáctica. La expresión dada queda ligada a la información contextual de los dos tramos (ida y vuelta) en los que el kayak realiza el movimiento, que da lugar a los dos sumandos y a la circunstancia de remar a favor o en contra de la corriente (sumar o restar 1 a la velocidad de remada).

c) Se puede dar la velocidad de remada (p. e., 3,5 millas /hora) y preguntar por el tiempo que se tarda en hacer el recorrido:

$$t = \frac{5}{3{,}5+1} + \frac{5}{3{,}5-1} = 3{,}11$$

Tiempo igual a 3,11 horas. En este caso solo es necesario hacer cálculos aritméticos, aunque interviene también la regla que define la situación como de proporcionalidad, como es el caso del movimiento uniforme. Por tanto, se asigna el nivel 1 de algebrización.

d) Se puede considerar que la distancia al campamento es una variable *d*, así como también la velocidad de la corriente *c*. En este caso la expresión funcional debe involucrar el uso de dos parámetros, que es el requisito para asignar el nivel 4 de algebrización (anexo 2).

$$t = \frac{d}{x+c} + \frac{d}{x-c}$$

Si se da como dato el tiempo (p.e., $t = 4$ horas) y se pregunta por la velocidad de la corriente *c*, o por la distancia al campamento *d*, entonces será necesario despejar dichos parámetros. El uso conjunto de variables, incógnitas y parámetros y la realización de operaciones con los parámetros es propio del nivel 5 de algebrización (anexo 2):

$$4 = \frac{d}{x+c} + \frac{d}{x-c}$$

$$4(x+c)(x-c) = d(x-c) + d(x+c) = 2xd$$

$$d = \frac{2(x+c)(x-c)}{x}$$

OTRAS INVESTIGACIONES SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN EL MARCO DEL EOS

En Godino, Aké, et al. (2015) se diseña un instrumento de evaluación (Cuestionario CDM-RAE) para la evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos de estudiantes del Grado en Educación Primaria sobre razonamiento algebraico elemental. Se describen las categorías de conocimientos algebraicos tenidas en cuenta (estructuras, funciones y modelización) y las categorías de conocimientos didácticos (facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Asimismo, se describen y analizan las tareas incluidas en el cuestionario informando de la validez de contenido del mismo. El cuestionario consta de 25 ítems que evalúan tanto conocimientos algebraicos como conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en Educación Primaria.

En Godino, Wilhelmi, et al. (2015) se describen y analizan los resultados de aplicar el cuestionario CDM-RAE a una muestra de estudiantes del Grado en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, y que, finalmente, garantice procesos de estudio efectivos en la Educación Primaria. La muestra estuvo compuesta por 597 estudiantes de las Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. El análisis cuantitativo de los resultados permitió explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación de los programas de formación en matemáticas y su didáctica entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos, generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

En Aké, Godino, et al. (2014) se analiza una experiencia formativa de maestros de Educación Primaria orientada al desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La experiencia se realizó en un curso sobre "Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria" donde el razonamiento algebraico elemental fue un tema transversal respecto a los restantes bloques temáticos. La metodología de investigación fue la ingeniería didáctica, entendida en sentido generalizado y basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Las actividades sobre razonamiento algebraico elemental fueron realizadas por 56 estudiantes. El estudio preliminar indica la pertinencia del contenido para la formación de maestros, mientras que los resultados sugieren que el reconocimiento de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización es una competencia difícil de lograr con los medios asignados en el proceso formativo.

Este artículo es un resultado parcial de la tesis doctoral de Aké (2013); otra tesis doctoral centrada también en la formación de maestros en razonamiento algebraico es la de Castro (2011).

El marco del enfoque ontosemiótico ha sido utilizado en otras investigaciones sobre álgebra que no se relacionan con la distinción de niveles de algebrización. Este es el caso de Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2012) y de Sbitneva, Moreno, Rivera y García (2015).

CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES CON OTROS MODELOS

Los niveles de algebrización que se han propuesto están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico: A) El álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; B) El álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales. El aspecto A se concreta en el modelo basado en EOS en dos niveles proto-algebraicos de razonamiento, mientras que el B se asociada a un nivel algebraico consolidado. Los niveles de algebrización que hemos descrito son también interpretables en términos de "capas de generalidad" que describe Radford (2011, p. 311).

El requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir "lo algebraico", como, por ejemplo, Puig y Rojano (2004, p. 198), quienes incluyen entre otras las siguientes características:

- El uso de un sistema de signos para resolver problemas que permita expresar el contenido del enunciado del problema relevante para su solución (su "estructura"), separada de lo que no es relevante.
- La ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos, que les permitan representar a cualquier tipo de objeto matemático.
- El carácter analítico del uso de los sistemas de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica.

Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. "Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “algebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007), proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para diferenciarlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad.

En Godino et al. (2015) se ha iniciado el estudio de la articulación del modelo de niveles de RAE basado en el EOS con las etapas del proceso de algebrización definidas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Bolea, 2002; Gascón, 1999, 2011; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2010).

A pesar de que las “etapas” según la TAD se refieren a recorridos de estudio potenciales y los “niveles” según el EOS a la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, es posible establecer paralelismos entre ambos modelos. Así, se concluye que el nivel 2 del modelo basado en el EOS se corresponde con la etapa 1 de la TAD y la etapa 2 de la TAD se corresponde con el nivel 3 del EOS. La etapa 3 del proceso de algebrización propuesta por la TAD, analizada desde la perspectiva del EOS, lleva a proponer la distinción de dos niveles adicionales (4 y 5 en el modelo EOS), al tener en cuenta la complejidad ontosemiótica del uso de parámetros para expresar familias de ecuaciones y funciones. Por último, el nivel 6 del EOS no se corresponde de manera explícita con ninguna etapa en el modelo basado en la TAD. En la Tabla 1 se resumen estas relaciones.

Tabla 1. Correspondencia entre las etapas (TAD) y los niveles (EOS) de algebrización

EOS	TAD
Nivel 0: aritmético	PCA: programa de cálculo aritmético
Nivel 1: proto-algebraico incipiente	
Nivel 2: proto-algebraico intermedio	Etapa 1: necesidad de formulación simbólica de un PCA
Nivel 3: algebraico consolidado	Etapa 2: igualación de dos PCA
Nivel 4: uso de parámetros	Etapa 3: introducción de parámetros
Nivel 5: manipulación de parámetros	
Nivel 6: tareas estructurales	

Los tipos de objetos y procesos algebraicos considerados en el modelo descrito en este trabajo suponen un análisis microscópico complementario al abordado mediante la noción de praxeología usado en el marco de la TAD. De hecho, el modelo propuesto permite un estudio pormenorizado de los comportamientos de los sujetos, que amplía el carácter institucional abordado desde la identificación de las praxeologías matemáticas y didácticas. Además, al incluir el modelo EOS niveles proto-algebraicos, está más adaptado a etapas donde el razonamiento algebraico es incipiente (tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria), mientras que las sucesivas etapas del proceso de algebrización propuestas desde la TAD en los trabajos citados están más centradas en la caracterización del álgebra en niveles educativos superiores. Así, aunque los criterios usados en ambos modelos teóricos para definir niveles o etapas en el proceso de algebrización son distintos, el análisis teórico realizado muestra que son consistentes y complementarios, reconociendo, no obstante, que la plena articulación de estos modelos deberá ser profundizada en estudios posteriores.

CUESTIONES ABIERTAS

En la identificación de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas se han aplicado las nociones de práctica, objeto y proceso del EOS (configuración ontosemiótica) que permiten hacer análisis de tipo microscópico de la actividad matemática. Pero la noción de significado pragmático de un objeto (p.e., el álgebra), entendido como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas que se ponen en juego ante la resolución de cierto tipo de problemas (Figura 1), permite hacer análisis a nivel macroscópico. Sobre el álgebra escolar se considera que no hay un único significado de referencia, sino diversos, dependiendo del contexto, marco institucional o de las comunidades de prácticas en que tal objeto desempeña su función. El problema esencial que se debe abordar es cómo articular los diversos significados en la progresión de los aprendizajes de los estudiantes, a medida que transitan por los diferentes niveles educativos y contextos institucionales.

En el caso de la proporcionalidad hemos identificado tres significados ligados a niveles de algebrización. Sin duda, desde el punto de vista epistémico, el significado algebraico - funcional reúne características de generalidad y eficacia en la resolución de problemas que llevan a priorizar su desarrollado respecto a otros significados con un ámbito de aplicación más restringido. Pero la idoneidad epistémica no es la única faceta a tener en cuenta. Es posible que el significado algebraico–funcional suponga un reto inalcanzable como primer encuentro al tema para los estudiantes de educación primaria. Además, estar familiarizado con el significado aritmético y el protoalgebraico puede ser un prerrequisito para comprender en toda su generalidad el significado algebraico–funcional.

El modelo de los niveles de algebrización que hemos descrito responde a uno de los problemas del álgebra escolar que se ha abordado aplicando algunas herramientas del EOS. No consideramos que haya un único problema relativo a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. En el marco del EOS se considera que estos procesos involucran varias facetas o dimensiones, cada una de las cuales plantea problemas de investigación específicos. Además del problema epistémico, esto es, relativo a la naturaleza, caracterización y emergencia del propio contenido matemático desde el punto de vista institucional, es necesario plantear y abordar los problemas siguientes:

- *Cognitivo– afectivo*, centrado en la caracterización de los significados personales de los estudiantes.
- *Instruccional*, esto es, cómo promover el desarrollo de los conocimientos y competencias matemáticas en los estudiantes.
- *Ecológico*, identificación y control de los factores que condicionan y soportan los procesos de estudio matemático.

Por otra parte, la definición de niveles de conocimiento y competencia en cualquier campo del saber, como puede ser la geometría o el álgebra, se enfrenta a un problema de difícil solución. El conocimiento tiene, en general, una estructura compleja cuya naturaleza es más bien arborescente que lineal; por tanto, una propuesta de niveles discretos de razonamiento algebraico, como ocurre también con los niveles de razonamiento geométrico de van Hiele, debe justificar por qué se proponen 4, 5 o 6 niveles, y no un número diferente. Entre los niveles 1, 2, 3, etc., ¿es posible, y útil, definir niveles intermedios o subniveles? Teniendo en cuenta que se trata de una modelización, y por tanto, una simplificación de una realidad compleja, como es el *conocimiento* en un campo específico, la definición de subniveles es una cuestión abierta a futuros desarrollos, como ocurre también con el modelo de los niveles de van Hiele. En todo caso, como todo modelo, es necesariamente una descripción simplificada.

Los niveles de razonamiento algebraico se han propuesto para modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en la resolución de problemas matemáticos, esto es, es una descripción de la actividad matemática que se hace bajo la perspectiva de los objetos y procesos característicos del álgebra. Se aplican, por tanto, de manera local y en unas circunstancias temporales y contextuales determinadas. Un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado, y cada manera puede implicar niveles de algebrización diferentes. Parece necesario y útil abordar el estudio de los niveles de algebrización desde una perspectiva más macroscópica, tanto desde el punto de vista institucional como personal.

En el primer caso se trataría de calificar como más o menos algebraicas determinadas formaciones epistemológicas que se despliegan ecológicamente a lo largo de un periodo histórico, o de diferentes etapas curriculares. Las etapas del proceso de algebrización propuestas en el marco de la TAD parece que tienen este carácter. En el segundo caso, esto es, desde el punto de vista personal, el estudio de niveles de algebrización se puede contemplar desde la perspectiva de niveles de desarrollo cognitivo, esto es, como etapas en la vida del estudiante de matemáticas que se pueden calificar como de incremento progresivo más o menos consolidado de conocimiento y competencia algebraica. Esta es una cuestión abierta que requiere nuevos estudios teóricos y empíricos.

Reconocimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 25 – 48.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann. A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 23-37.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, *11*(1), 77-88.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García. y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127 - 150.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques*, *34*(2-3), 167-200.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Blanco, T. F., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de Educación*, *370*, 199-228.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 277-289

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2012). Vectors, change of basis and matrix representation: onto-semiotic approach in the analysis of creating meaning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *43*(1), 11–32.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H.Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 303- 322). Berlin: SpringerVerlag.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Sbitneva, L., Moreno, N., Rivera, D. y García, B. (2015). Evaluation of the efficiency of our teaching practice based on OSA theory: the case of linear algebra course in b-learning. *8th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2015 Proceedings*, pp. 4381-4387.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *27*(1), 77-120.

Anexo 1. Resumen de características de los niveles 0-3 de algebrización

NIVELES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	– Objetos con un primer grado de generalidad (números particulares) – Significado operacional de la igualdad – Variables como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	– Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) – Significado relacional de la igualdad – Variables como incógnitas	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	Natural, numérico, icónico, gestual; se usan símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	– Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) – Significado relacional de la igualdad – Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante	– Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia. – Ecuaciones de la forma, $Ax \pm B = C$ – En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los objetos intensivos reconocidos, aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.
3	– Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. (Objetos intensivos con un segundo grado de generalidad.)	– Operaciones con objetos de un segundo grado de generalidad – Ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ – Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referir a información contextual.

Anexo 2. Resumen de características de los niveles 4 -6 de algebrización

NIVELES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
4	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual
6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con cuarto grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.